Waveletkonstruktion über Unschärferelationen und Anwendungen in der Signalanalyse

von Gerd Teschke

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften
- Dr. rer. nat. -

Vorgelegt im Fachbereich 3 (Mathematik und Informatik)
der Universität Bremen
im Juni 2001

Datum des Promotionskolloquiums: 25. September 2001

Gutachter:	Prof.Dr. Peter Maaß,	Universität Bremen Zentrum für Technomathematik D-28334 Bremen, Germany
	Prof.Dr. Karlheinz Gröchenig,	University of Connecticut Department of Mathematics U-3009 Storrs, CT 06269-3009, USA

Vorwort

Wavelets haben in den letzten Jahren die Entwicklungen in der Mathematik und in Anwendungen entscheidend geprägt. Als ein zusätzliches Analyseverfahren insbesondere in Bereichen der Signal- und Bildverarbeitung haben sich die waveletbasierten Algorithmen neben vielen anderen Verfahren behauptet. Im Bereich der Signalanalyse und Merkmalsextraktion ist eine der Kernfragen die Auflösung in der Phasenraum- beziehungsweise Skalen-Winkel-Raumdarstellung des Signals. Ein hohes Auflösungsvermögen der Signaltransformation steht direkt im Zusammenhang mit dem Lokalisierungsvermögen des Wavelets. Deshalb ist es oft das Ziel, Wavelets zu konstruieren, die optimale Lokalisierungseigenschaften besitzen. Dies bedeutet, unvermeidbare Unschärfen zu minimieren. Da diese sogenannten Unschärferelationen eng an die Signal- beziehungsweise Wavelet-Transformation gebunden sind, ist es klar, daß es kein optimales Wavelet für alle Fälle geben kann. Man hat Abhängigkeiten zum zugehörigen Funktionenraum, zur zugrundeliegenden Gruppe etc.

Diese Arbeit besteht aus einem theoretischen und einem anwendungsorientierten Teil. Der theoretische Teil läßt sich nicht sofort aus der praktischen Anwendung motivieren geht aber obigen Fragestellungen nach, Wavelets mit optimalen Lokalisierungseigenschaften zu finden. Es werden bekannte Resultate im Bereich der Minimierung von Unschärferelationen aufgegriffen und erweitert. Einerseits wird versucht, Unschärferelationen zu entwickeln, die in Sobolevskalen leben und anderseits, Ansätze zu finden, die es erlauben, n-Operator-Unschärfen zu formulieren. Die erzielten Ergebnisse dienen dann als Hilfsmittel, die eine weitergehende Analyse und Lösung des Anwendungsproblems ermöglichen. Das hier dargestellte Anwendungsproblem stammt aus dem Bereich der meteorologischen Radardatenanalyse. Die bisher durch den Deutschen Wetterdienst und das Zentrum für Technomathematik entwickelten und implementierten Algorithmen bedienen sich weitestgehend der diskreten Multiskalen-Analyse und der Statistik. Da diese Anwendung ebenfalls Schwerpunkt meiner Arbeit war und ist, werden die bisherigen Ansätze in knapper Form im Anwendungsteil dargestellt. Intensive Vergleichsrechnungen mit anderen Forschungsinstituten (zum Beispiel NOAA, USA) haben gezeigt, daß die Methoden den derzeitigen technischen Standards überlegen sind. Es gibt aber immer noch Probleme im Bereich der Signalbereinigung und Modellierung. Weitere Verfeinerungen erfordern jedoch zunächst einen kontinuierlichen Ansatz. An diesem Punkt werden die theoretischen Resultate angewandt, um kontinuierliche Multiskalen-Analysen zu generieren.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Entstehen dieser Dissertation beigetragen haben. Besonders bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Peter Maaß, der diese Arbeit erst ermöglichte, mich ermutigte und in vielen Diskussionen fruchtbare Ideen beigetragen hat. Ein ganz besonderer Dank gilt PD Dr. Stephan Dahlke, der sich mit großer Hingabe vielen Detailfragen widmete. Weiterhin gilt mein Dank meiner Zimmerkollegin Silva Fischer, Jenny Niebsch, Ronny Ramlau sowie Mathias Lindemann, die moralischen und inhaltlichen Beistand leisteten.

Bremen, 8. Juni 2001
G. Teschke

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Der Inhalt des theoretischen Teils ist die Konstruktion von Wavelets über Unschärferelationen. Ausgangspunkt dabei ist die Gruppentheorie. Beginnend mit einer Gruppe G sucht man zunächst eine geeignete Darstellung von G im Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Beispiele für G sind die affin-lineare Gruppe $\mathbf{G}_{aff}$ und die Weyl-Heisenberg-Gruppe $\mathbf{G}_{WH}$. Im Fall der bekannten Weyl-Heisenberg Gruppe $\mathbf{G}_{WH}$ ist eine Darstellung im L_2 durch

$$\pi(q,p,\varphi)f(x) = e^{i(\varphi - p'(x-q))}f(x-q)$$

gegeben. Die Darstellungen von $\mathbf{G}_{aff}$ und $\mathbf{G}_{WH}$ im $L_2(\mathbb{R}^n)$ und die entsprechenden Eigenschaften sowie die zugehörigen Integraltransformationen sind bekannt. Es ist jedoch nicht sofort klar, welche Funktionen f zur Darstellung der Gruppe besonders geeignet sind. Motiviert durch die Forderung guter Lokalisierungseigenschaften sind das gerade diejenigen Funktionen, die die zur Gruppe gehörigen Unschärferelationen minimieren. Für die Weyl-Heisenberg-Gruppe $\mathbf{G}_{WH}$ sind das die Gauß 'schen Glockenkurven

$$f(x) = e^{-x^2/2} \ .$$

Im ersten Kapitel werden die Methoden der Gabor- beziehungsweise Wavelet-Analysis derart erweitert, daß nach der obigen Konzeption die bekannten Darstellungen von $\mathbf{G}_{aff}$ und $\mathbf{G}_{WH}$ zu Darstellungen in Sobolev-Räumen modifiziert werden. Dabei sind nun die modifizierten Zulässigkeitsbedingungen und Integraltransformationen auszuarbeiten. Ebenso kann man Kombinationen beider Gruppen betrachten, um so eine Vielzahl möglicher Interpolationen zwischen Gabor- und Wavelet-Analysis zu erhalten. Die Darstellungen im L_2 aus dem semidirekten Produkt beider Gruppen wurden in [Tor92, Tor94, AM92, KT93, Tor91, TAGM95] entwickelt. Die dortigen Ergebnisse sollen auf Sobolev-Räume übertragen werden. Es soll aber auch das direkte Produkt beider Gruppen analysiert werden. Natürliche Darstellungsräume werden dann anisotrope Sobolev-Räume sein.

Im zweiten Kapitel werden, nachdem Darstellungen und Darstellungsräume analysiert wurden, die zur Gruppe gehörigen Unschärferelationen konstruiert. Hierbei werden die bekannten L_2-Ergebnisse der Gruppen $\mathbf{G}_{aff}$ und $\mathbf{G}_{WH}$ erweitert. Die Entwicklung von Unschärferelationen zum semidirekten Gruppenprodukt verschafft Einsichten zur Verallgemeinerung der klassischen Zwei-Operator-Unschärferelation. Diese Resultate sollen dann angewendet werden, um allgemeine n-Operator-Unschärferelationen in Sobolev-Räumen zu konstruieren.

Das dritte Kapitel beinhaltet den anwendungsorientierten Teil. Hier sollen waveletbasierte Methoden zur Analyse von Radardaten des Deutschen Wetterdienstes vorgestellt werden. Dabei werden zunächst Wavelet-Shrinkage-Verfahren aus [DJ94, DJ92, KP94, DJKP93] angesetzt und so modifiziert, daß sie dem Radardatenmodell entsprechen, [LT00a, LT01]. Die Ergebnisse zeigen, daß die angewandten Techniken noch nicht ausreichend sind. Der nächste Schritt soll in einer kontinuierlichen Analyse der komplexen Radardaten bestehen. Dazu wird das Konzept der kontinuierlichen L_2-Multiskalen-Analyse aus [Sta92] aufgegriffen und zu einer H^s-Multiskalen-Analyse erweitert. Abschließend soll eine H^s-Multiskalen-Analyse auf Grundlage der affin-linearen Gruppe $\mathbf{G}_{aff}$ generiert werden.

Das invariante Maß auf $SO(n)$ beziehungsweise auf S^n wird oft benötigt. Da die Konstruktion sehr technisch ist, wird dies im Anhang dargestellt.

Kapitel 1

Gruppendarstellung

1.1 Grundlagen und Notationen

In diesem Kapitel werden grundlegende Definitionen und Aussagen der Gruppen- und Darstellungstheorie eingeführt. Die Notationen orientieren sich weitestgehend an [Rot95, Rob96, SD80, VK95, VK91, VK93].

1.1.1 Gruppen, Gruppendarstellungen und homogene Räume

Definition 1.1.1.1 *Eine* **Gruppe** $(G, \circ)$ *ist eine nichtleere Menge* G *ausgestattet mit einer assoziativen Operation* $\circ$, G *enthält ein Einheitselement* e, *das heißt* $g = e \circ g = g \circ e$ *für alle* $g \in G$, *und zu jedem* $g \in G$ *existiert das inverse Element* $g^{-1} \in G$, *das heißt* $g^{-1} \circ g = e$ *beziehungsweise* $g \circ g^{-1} = e$.

Definition 1.1.1.2 *Eine nichtleere Teilmenge* X *einer Gruppe* G *ist eine* **Untergruppe** *von* G, *falls sie das Einheitselement, alle Produkte und Inversen enthält. Falls* X *eine Untergruppe von* G *ist, notiert man* $X \leq G$.

Definition 1.1.1.3 *Eine Untergruppe* $X \leq G$ *ist eine* **normale Untergruppe**, *bezeichnet mit* $X \lhd G$, *falls für alle* $g \in G$ *gilt* $g \circ X \circ g^{-1} = X$.

Definition 1.1.1.4 *Eine Gruppe heißt* **auflösbar**, *falls sie eine abelsche Reihe besitzt, das heißt* $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$ *in der jeder Faktor* G_{i+1}/G_i *abelsch ist.*

Die Verknüpfung zweier Gruppen ist ein wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit. Zwei Gruppen G und H können über das direkte oder das semidirekte Produkt verbunden werden.

Definition 1.1.1.5 *Seien* G *und* H *Gruppen. Das* **direkte Produkt** *von* G *und* H, *bezeichnet mit* $G \times H$, *ist die Gruppe aller Paare* (g, h) *mit* $g \in G$ *und* $h \in H$ *mit der Gruppenoperation*

$$(g, h) \circ (g', h') = (h \circ h', g \circ g').$$

Bemerkung 1.1.1.6 $G \times H$ ist eine Gruppe mit dem Einheitslement (e_G, e_H) und dem inversen Element $(g,h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$. Weder G noch H sind Untergruppen von $G \times H$. $G \times H$ enthält isomorphe Kopien: $G \times e_H$ und $e_G \times H$.

Definition 1.1.1.7 *Sei X eine (nicht notwendig normale) Untergruppe von einer Gruppe G. Eine Untergruppe $Q \leq G$ heißt* **Komplement** *von X in G, falls $e_G = X \cap Q$ und $XQ = G$.*

Bemerkung 1.1.1.8 Eine Gruppe G ist direktes Produkt von normalen Untergruppen X und Q, falls $e_G = X \cap Q$ und $XQ = G$ gilt.

Definition 1.1.1.9 *Eine Gruppe G heißt* **semidirektes Produkt** *von X und Q, bezeichnet mit $G = X \rtimes Q$, falls $X \lhd G$ und falls $Q_1 \cong Q$ für das Komplement Q_1 von X gilt.*

An einigen Stellen wird der Stabilisator benötigt. Dazu wird zunächst der Begriff einer G-Menge eingeführt.

Definition 1.1.1.10 *Sei X eine Menge und G eine Gruppe. Dann ist X eine* **G-Menge**, *falls es eine Funktion α derart gibt, daß $\alpha : G \times X \to X$ gilt ($\alpha : (g,x) \mapsto gx$)).*

Definition 1.1.1.11 *Sei X eine G-Menge und $x \in X$. Der* **Stabilisator** *von x, bezeichnet mit G_x, ist die Untergruppe*

$$G_x = \{g \in G : \ gx = x\} \leq G.$$

Betrachtet man nun zwei Gruppen, so sind die Abbildungen zwischen diesen Gruppen interessant, die strukturverträglich agieren.

Definition 1.1.1.12 *Seien G_1 und G_2 Gruppen. Eine Abbildung $\pi : G_1 \to G_2$ wird* **Homomorphismus** *genannt, falls sie strukturverträglich ist, das heißt falls für alle $g, g' \in G_1$ gilt*

$$\pi(g \circ g') = \pi(g) \circ \pi(g') \qquad \begin{array}{ccc} G_1 \times G_1 & \xrightarrow{\pi\times\pi} & G_2 \times G_2 \\ \downarrow \circ & & \downarrow \circ \\ G_1 & \xrightarrow{\pi} & G_2 \end{array}$$

wobei die Abbildung $\pi \times \pi$ komponentenweise wirkt

$$\pi \times \pi : G_1 \times G_1 \to G_2 \times G_2, \qquad (g, g') \mapsto (\pi(g), \pi(g')).$$

Man kann sich nun π als Homomorphismus in die Gruppe der unitären Operatoren vorstellen und somit den Begriff einer Gruppendarstellung einführen.

Definition 1.1.1.13 *Bezeichne $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ die linearen Selbstabbildungen eines Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$. Eine* **Darstellung** *π einer Gruppe G im Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$ ist eine homomorphe Abbildung*

$$\pi : G \to \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ .$$

Die Darstellung einer Gruppe ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Zu einer Vielzahl von Gruppen existieren mehrere Darstellungen. Man kann jedoch Äquivalenzklassen von Darstellungen einführen.

Definition 1.1.1.14 *Zwei Darstellungen π_1 und π_2 einer Gruppe G in Räumen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ sind* **äquivalent**, *falls es einen linearen Operator $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ mit stetiger Inverser T^{-1} gibt, so daß*

$$\pi_2(g) = T\pi_1(g)T^{-1}$$

für alle $g \in G$ gilt.

Definition 1.1.1.15 *Ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt* **unitär**, *falls $AA^* = A^*A = Id$ ist. Ein solcher Operator ist normal und bijektiv mit $A^{-1} = A^*$, und A^* ist ebenfalls unitär. Ein Homomorphismus $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ vermöge $g \mapsto \pi(g)$ von einer Gruppe G in die Gruppe der unitären Operatoren $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ wird* **unitäre Darstellung** *genannt.*

Dies bedeutet, daß jedem $g \in G$ ein unitärer Operator $\pi(g) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ zugeordnet werden kann, so daß für alle $g, g' \in G$

$$\pi(g \circ g') = \pi(g) \circ \pi(g') \quad \text{und} \quad \pi(e) = Id$$

gilt. Da $\pi(g)$ unitär ist, folgt unmittelbar

$$\pi(g^{-1}) = \pi^{-1}(g) = \pi^*(g)$$

und für alle $f, h \in \mathcal{H}$

$$\langle \pi(g)f, \pi(g)h \rangle = \langle f, h \rangle.$$

Demzufolge ist $\pi(g)$ isometrisch, denn für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt $\|\pi(g)f\| = \|f\|$ und deshalb $\|\pi(g)\| = 1$. Da das Skalarprodukt durch die Norm bestimmt wird, gilt umgekehrt, daß eine bijektive Isometrie von $\mathcal{H}$ notwendigerweise unitär sein muß.

Beispiel 1.1.1.16 Betrachtet man die die obere Halbebene $\mathbb{H}$ mit dem Verknüpfungsgesetz

$$(a, b) \circ (a', b') = (aa', b + ab'),$$

so hat $\mathbb{H}$ eine Gruppenstruktur. Das Einheitselement ist $(1, 0)$ und das inverse Element ist gegeben durch $(a, b)^{-1} = (1/a, -b/a)$. Diese Gruppe wird affin-lineare Gruppe genannt und mit $\mathbf{G}_{aff} = (\mathbb{H}, \circ)$ bezeichnet. Eine Darstellung dieser Gruppe im $L_2(\mathbb{R})$ erhält man durch

$$\pi : \mathbb{H} \to \mathcal{U}(L_2(\mathbb{R})), \qquad (a, b) \mapsto \pi(a, b) = T_b D_a,$$

wobei T_b die Translation um b und D_a die Dilatation um a bezeichnet. Es ist einzusehen, daß

$$\pi(aa', b + ab') = \pi(a, b)\pi(a', b')$$

gilt, das heißt die Operatormultiplikation in $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$ und die Gruppenoperation $\circ$ sind verträglich. □

Weitere gewünschte Darstellungseigenschaften sind die Stetigkeit und Irreduzibilität.

Definition 1.1.1.17 *Eine Gruppendarstellung π heißt* **stetig**, *falls für jeden Vektor $f \in \mathcal{H}$ die Zuordnung $g \mapsto \pi(g)f \in \mathcal{H}$, mit $g \in G$, stetig ist.*

Definition 1.1.1.18 *Ein Unterraum $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$ ist π-***invariant** *genau dann, wenn er bezüglich aller Operatoren $\pi(g)$, mit $g \in G$, in sich selbst abgebildet wird.*

Diese Definition läßt sich auch über die Orbits von $f \in \mathcal{H}$ beschreiben. Als **Orbit** von f bezeichnet man die Menge

$$O(f) = \{\pi(g)f : \ g \in G\}.$$

Danach ist $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}$ π-invariant, falls $\mathcal{B}$ alle Orbits $O(f)$ enthält

$$\mathcal{B} \text{ ist } \pi\text{−invariant} \Rightarrow \{\pi(g)f : \ g \in G, \ f \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{B}.$$

Falls $O(f)$ in $\mathcal{H}$ dicht ist, so wird f **zyklisch** genannt.

Von besonderem Interesse sind nun diejenigen Darstellungen π, bei denen nur der Nullraum und ganz $\mathcal{H}$ π-invariant sind.

Definition 1.1.1.19 *Eine Gruppendarstellung π heißt* **irreduzibel** *genau dann, wenn die einzigen abgeschlossenen π-invarianten Unterräume der Nullraum $\{0\}$ und ganz $\mathcal{H}$ sind.*

Bemerkung 1.1.1.20 Zu dieser Definition läßt sich folgende äquivalente Aussage formulieren. Eine Gruppendarstellung π heißt irreduzibel genau dann, wenn jeder Vektor $0 \neq g \in \mathcal{H}$ zyklisch ist.

Definition 1.1.1.21 *Eine Gruppe G heißt* **lokalkompakt**, *falls auf ihr eine lokalkompakte Topologie erklärt ist, in der die Abbildung $\zeta : G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \circ g_2^{-1}$ stetig ist.*

Dies bedeutet, daß die Gruppenoperation $\circ$ und die Inversion $\cdot^{-1}$ stetige Operatoren sind. Zum Beispiel genügt die affin-lineare Gruppe $\mathbf{G}_{aff}$ dieser Forderung mit der induzierten Topologie von $\mathbb{R}^2$

$$\zeta\left((a_1, b_1), (a_2, b_2)\right) = \left(a_1 a_2^{-1}, -a_1 a_2^{-1} b_2 + b_1\right) .$$

Betrachtet man die Gruppe $(\mathbb{R}^n, \circ_{\text{Translation}})$, so ist bekannt, daß das Maß $d^n x$ invariant unter der Gruppenoperation ist. Von Bedeutung ist der Satz von Haar. Er besagt, daß für alle (nicht notwendig abelschen) lokalkompakten topologischen Gruppen invariante Radon-Maße existieren. Bei nichtabelschen Gruppen unterscheidet man zwischen rechts- beziehungsweise linksinvariante Maße.

Definition 1.1.1.22 *Sei G eine lokalkompakte topologische Gruppe. Jedes Radon-Maß $\mu_L \neq 0$ auf G, das positiv und linksinvariant ist, heißt ein* **linkes Haar-Maß** *auf G, das heißt für $H \subset G$ gilt*

$$\mu_L(g \circ H) = \mu_L(H) \ .$$

Entsprechend sind die **rechten Haar-Maße** *auf G erklärt:*

$$\mu_R(H \circ g) = \mu_R(H) \ .$$

Gilt $\mu_L = \mu_R$, so wird G **unimodular** *genannt.*

Bemerkung 1.1.1.23 Der Träger jedes linken und jedes rechten Haar-Maßes auf G stimmt mit ganz G überein.

Die Existenz dieser Maße wird durch den *Satz von Haar* abgesichert.

Satz 1.1.1.24 (Haar) *Auf jeder lokalkompakten topologischen Gruppe G existiert mindestens ein linkes und ein rechtes Haar-Maß.*

Beweis: Der Beweis kann in [SD80] nachgeschlagen werden. ■

Bemerkung 1.1.1.25 Die Voraussetzung der Lokalkompaktheit ist wesentlich. Auf einer topologischen Gruppe, die nicht lokalkompakt ist, existiert nicht notwendig ein linksinvariantes reguläres Borel-Maß $\neq 0$ und somit kein Radon-Maß, [Bau92].

Der nächste Satz charakterisiert die Struktur des Maßes bei Produktgruppen, vergleiche [SD80].

Satz 1.1.1.26 *Es seien G_1, G_2 lokalkompakte topologische Gruppen und μ_1 beziehungsweise μ_2 ein linkes (rechtes) Haar-Maß auf G_1 beziehungsweise G_2. Dann ist das Produkt $\mu_1 \otimes \mu_2$ ein linkes (rechtes) Haar-Maß auf der Produktgruppe $G_1 \times G_2$.*

Falls im weiteren nicht explizit erwähnt, wird das linke Haar-Maß betrachtet und mit μ bezeichnet. Die nächste Definition bereitet einen zentralen Satz vor.

Definition 1.1.1.27 *Sei π eine stetige, unitäre Darstellung einer Gruppe G im komplexen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Ein Vektor $f \in \mathcal{H}$ heißt* **zulässig**, *falls*

$$0 < \int_G |\langle \pi(g)f, f\rangle|^2 d\mu(g) < \infty$$

gilt. Eine Darstellung π einer Gruppe G in $\mathcal{H}$ heißt **quadratintegrierbar**, *falls*

- *π irreduzibel ist und*
- *in $\mathcal{H}$ wenigstens ein zulässiger, nichttrivialer Vektor existiert.*

Zur Darstellung insbesondere von kompakten oder lokalkompakten unimodularen beziehungsweise nicht-unimodularen Gruppen existieren ausführliche Untersuchungen [Bar47, GMP85, GMP86, God47, DM76]. Die wesentlichen Resultate sind im folgenden zentralen Satz zusammengefaßt.

Satz 1.1.1.28 *Sei π eine quadratintegrierbare, stetige und unitäre Darstellung der lokalkompakten Gruppe $\mathbf{G}$ im Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Dann existiert ein positiver selbstadjungierter Operator C, so daß für alle zulässigen Vektoren $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathcal{H}$ und für alle $f_1, f_2 \in \mathcal{H}$*

$$\int_{\mathbf{G}} \langle \pi(g)\psi_1, f_1\rangle \langle f_2, \pi(g)\psi_2\rangle \, d\mu(g) = \left\langle C^{1/2}\psi_2, C^{1/2}\psi_1 \right\rangle \langle f_1, f_2\rangle$$

gilt. Der Definitionsbereich von C stimmt mit der Menge der zulässigen Vektoren überein. Falls $\mathbf{G}$ unimodular ist, ist C ein Vielfaches der Identität.

Bei einigen Anwendungen kann es sein, daß die Existenz von

$$\int_{\mathbf{G}} \langle \pi(g)\psi_1, f_1\rangle \langle f_2, \pi(g)\psi_2\rangle \, d\mu(g)$$

nur durch Einschränkung des Integrationsbereiches gesichert werden kann. Das heißt, man geht von der vollen Gruppe G auf einen geeigneten homogenen Raum G/H über, wobei H eine abgeschlossene Untergruppe von G ist.

Definition 1.1.1.29 *Sei X eine Menge und G eine Gruppe. Zu jedem Element $a \in X$ korrespondiert der zugehörige Orbit*

$$O(a) = \{x :\ x = g \circ a,\ g \in G\}.$$

Eine Menge X, die mit dem Orbit eines ihrer Elemente zusammenfällt wird **homogener Raum** *bezüglich G genannt.*

Beispiel 1.1.1.30 Betrachtet man die Anwendung von $SL(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{C}$ die durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \; z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

gegeben ist, so folgt für ein $g \in G$ und $z = x + iy$

$$g(z) = \frac{(ax+b)(cx+d)+y^2ac}{(cx+d)^2+(yc)^2} + iy\frac{ad-bc}{(cx+d)^2+(yc)^2} \; .$$

Da $ad - bc = 1$ gilt, existieren drei Orbits: $\mathbb{R}$ für $\Im z = y = 0$, $\mathbb{C}_+$ für $\Im z > 0$ und $\mathbb{C}_-$ für $\Im z < 0$. □

Agiert man auf dem Quotienten-Raum beziehungsweise auf dem homogenen Raum G/H, so ist es nötig, G/H in G einzubetten. Dies wird durch die kanonische Faser-Bündel-Struktur von G realisiert, siehe [Mac76],

$$\Pi : G \to G/H \; .$$

Definition 1.1.1.31 *Sei σ ein Schnitt dieses Faser-Bündels. Eine auf G/H agierende Darstellung wird σ-**modifizierte Darstellung** genannt und durch $\pi_\sigma := \pi \circ \sigma$ definiert.*

Bemerkung 1.1.1.32 Die Existenz entsprechender Schnitte σ wurde in [Mac76] bewiesen.

Man betrachtet folglich Vektoren im Darstellungsraum, die durch G/H induziert sind und nicht durch die Gruppe selbst. $\sigma(g) \in G$ ist dann ein Repräsentant für jedes $g \in G/H$.

Um die Eigenschaften der resultierenden Darstellung zu analysieren, wird ein Operator $\mathcal{A}$ eingeführt.

Definition 1.1.1.33 *Sei $\psi, f \in \mathcal{H}$. Der Operator $\mathcal{A}$, der durch*

$$\mathcal{A}f(x) := \int_G \langle f, \pi(g)\psi \rangle \, \pi(g)\psi(x) d\mu(g)$$

definiert ist, heißt **Auflösungsoperator**.

Bemerkung 1.1.1.34 $\mathcal{A}$ hängt von ψ ab. Die Analyse von $\mathcal{A}$ klärt Eigenschaften der Darstellung der Gruppe

- Invertierbarkeit von $\mathcal{A}$: Jedes $f \in \mathcal{H}$ kann rekonstruiert werden,
- $\mathcal{A}$ ist Vielfaches der Identität: $\langle \cdot, \pi(g)\psi \rangle$ ist Vielfaches einer Isometrie.

Falls man den Parameterbereich auf $X = G/H$ einschränkt, modifiziert sich $\mathcal{A}$ zu

$$\mathcal{A}_\sigma : f \mapsto \int_X \langle f, \pi \circ \sigma(g)\psi \rangle \, \pi \circ \sigma(g)\psi(x) d\mu(g) \ ,$$

wobei $d\mu$ dann ein quasi-invariantes Maß ist.

Bezüglich des Schnittes σ kann eine allgemeine Definition der Zulässigkeit eingeführt werden, vergleiche dazu [KT93].

Definition 1.1.1.35 *Sei $X = G/H$. Ein Schnitt σ heißt* **zulässig**, *falls ein beschränkter, positiver und invertierbarer Operator $\mathcal{A}$ mit beschränkter Inverse und ein Vektor $\psi \in \mathcal{H}$ existieren, so daß für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt*

$$\int_X |\langle \pi_\sigma(x)\psi, f\rangle|^2 d\mu(x) = \langle f, \mathcal{A}f\rangle \, .$$

Ein Schnitt σ heißt **strikt zulässig**, *falls ein Vektor $\psi \in \mathcal{H}$ und eine positive Konstante K existieren, so daß für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt*

$$\int_X |\langle \pi_\sigma(x)\psi, f\rangle|^2 d\mu(x) = K\|f\|^2.$$

Die allgemeine Struktur von σ wurde in [AAG91a, AAG91b] untersucht. Es wurde gezeigt, daß die Zulässigkeit die Existenz eines Reproduktionskernes impliziert. Die Schwierigkeit besteht in der Analyse des Operators $\mathcal{A}$.

1.1.2 Darstellung in Sobolev-Räumen

In den bisherigen Arbeiten [AAG91a, AAG91b, AM92, TAGM95, Tor91, Tor92, Tor94, KT93], die die Wavelet- und Gabor-Analysis verknüpfen, wird als Darstellungsraum ausschließlich der L_2 gewählt. Dies hat physikalische Gründe: die Überlagerungswahrscheinlichkeit zweier Quantenzustände ψ und ϕ ist in der Form $|\langle \psi, \phi \rangle|^2$ beschreibbar. Sie ist demzufolge eng mit dem L_2-Skalarprodukt verbunden. Mathematisch gesehen, war die Wavelet-Transformation somit bisher nur auf L_2 definiert. Man kann nun den Definitionsbereich auf H^s fortsetzen und erhält dann Bilder in einem Faserraum $\mathcal{F}^s$. Die Intergraltransformation wird dann aber immer noch über ein L_2-Skalarprodukt induziert. Mathematisch sinnvoll ist nun auch die Frage, ob sich auch der Begriff 'Wellenpaket' oder 'Wavelet' auf Distributionen ausweiten läßt und somit auch die Integraltransformation über H^s-Skalarprodukte induziert werden kann. Gesucht sind somit ganz allgemein Darstellungen in den Hilbert-Räumen $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Definition 1.1.2.1 *Für $s \geq 0$ bezeichnet man mit $H^s(\mathbb{R}^n)$ den* **Sobolev-Raum**

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_2(\mathbb{R}^n) \ : \ \|f\|_s < \infty\}$$

und für $s < 0$

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in S'(\mathbb{R}^n) \ : \ \ \|f\|_s < \infty\}$$

jeweils mit der **Sobolev-Norm**

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|\omega\|^2)^s |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Bemerkung 1.1.2.2 Falls $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, so ist immer die Fourier-Transformierte im schwachen Sinn gemeint.

Beginnt man mit einer Darstellung π einer Gruppe G im $L_2(\mathbb{R}^n)$, so ist es durch Modifikation von π möglich, zu einer Darstellung der Gruppe G in $H^s(\mathbb{R}^n)$ zu gelangen.

Definition 1.1.2.3 *Der Operator Λ_s sei durch*

$$\Lambda_s \ : \ S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n), \quad \text{mit} \quad (\Lambda_s f)^\wedge(\omega) = (1 + \|\omega\|^2)^{s/2} \hat{f}(\omega),$$

definiert. Eine Darstellung der Gruppe G in H^s ist nun durch

$$\pi_s(g) := \Lambda_{-s}\pi(g)\Lambda_s \ : \ \ H^s \to H^s$$

definiert, wobei π die Darstellung von G im L_2 repräsentiert.

Λ_s ist im Fourier-Raum definiert. Falls die bisher eingeführten Darstellungen π im Orts-Raum agieren, kann man nach Definition 1.1.1.14 zunächst zur äquivalenten Darstellung $\hat{\pi}$ übergehen

$$\pi = \mathcal{F}^{-1}\hat{\pi}\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}\pi = \hat{\pi}\mathcal{F} \ .$$

Die Darstellung π_s ist auf der Fourierseite durch

$$\hat{\pi}_s(g)\hat{f}(\omega) = (1 + \|w\|^2)^{-s/2}\hat{\pi}(g) \left((1 + \|w\|^2)^{s/2}\hat{f}(\omega)\right)$$

gegeben. Dadurch erhält man eine modifizierte Zulässigkeitsbedingung

$$0 < \int_G |\left\langle \pi_s(g)f, f\right\rangle_{H^s}|^2 d\mu_L(g) < \infty.$$

Der nächste Satz folgt unmittelbar durch einsetzen der Darstellung π_s und benutzen des H^s-Skalarproduktes.

Satz 1.1.2.4 *Seien $f, h \in H^s$. Falls π bezüglich L_2 quadratintegrierbar ist, dann ist die Darstellungen π_s wegen*

$$\left\langle \pi_s(g)f, h\right\rangle_{H^s} = \left\langle \Lambda_s\pi_s(g)f, \Lambda_s h\right\rangle_{L_2} = \left\langle \hat{\pi}(g)(\Lambda_s f)^\wedge, (\Lambda_s h)^\wedge\right\rangle_{L_2}$$

mit der Zulässigkeitsbedingung in H^s quadratintegrierbar.

1.2 Konstruktion von Darstellungen

In diesem Abschnitt werden die der Wavelet-Analysis zugrundeliegende affin-lineare Gruppe und die der Gabor-Analysis zugrundeliegende Weyl-Heisenberg Gruppe eingeführt und die bekannten Darstellungen im L_2 zu Darstellungen im H^s modifiziert und die modifizierten Zulässigkeitsbedingungen bestimmt.
Anschließend werden die beiden Gruppen auf zweierlei Weise miteinander verknüpft. Einerseits über das direkte und andererseits über das semidirekte Gruppenprodukt. Es entstehen Gruppen, die durch Translation, Modulation, Dilatation und Rotation im $\mathbb{R}^n$ generiert werden. Ziel ist es, quadratintegrierbare Darstellungen im H^s und die damit verbundenen Zulässigkeitsbedingungen auszuarbeiten. Bezüglich des semidirekten Gruppenproduktes wurden quadratintegrierbare Darstellungen im L_2 in [Tor91, Tor92, KT93, Tor94] hergeleitet. Diese werden zu Darstellungen im H^s modifiziert.

1.2.1 Affin-lineare und Weyl-Heisenberg Gruppe

Zunächst werden die affin-lineare und die Weyl-Heisenberg Gruppe und deren Darstellung im L_2 wiederholt und zu Darstellungen im H^s modifizert.

Die Gruppe $\mathbf{G}_{aff}$

Definition 1.2.1.1 *Die* **eindimensionale affine Gruppe $\mathbf{G}_{aff}$** *ist durch*

$$\mathbf{G}_{aff} = \Big(\{(q,a): \ q \in \mathbb{R}, \ a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}, \circ\Big),$$

mit dem Gruppengesetz

$$(q,a)\circ(q',a') = (q+aq', aa'),$$

gegeben.

Die Gruppe $\mathbf{G}_{aff}$ ist somit topologisch isomorph zu $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Satz 1.2.1.2 *Das rechte und linke Haar-Maß auf $\mathbf{G}_{aff}$ sind durch*

$$d\mu_R(q,a) = |a|^{-1} da dq \quad und \quad d\mu_L(q,a) = a^{-2} da dq$$

gegeben.

Beweis: Der Beweis kann zum Beispiel in [LMR98] nachgeschlagen werden. ■

Bemerkung 1.2.1.3 Es ist bekannt, daß bis auf unitäre Äquivalenz eine quadratintegrierbare Darstellung von $\mathbf{G}_{aff}$ in $L_2(\mathbb{R}, dx)$ durch

$$\pi(q,a)\psi(x) = |a|^{-1/2}\psi\left(\frac{x-q}{a}\right)$$

gegeben ist. Ein Vektor ψ ist zulässig, falls

$$0 < \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(x)|^2}{|x|} dx < \infty$$

gilt.

Satz 1.2.1.4 *Sei $\psi \in H^s(\mathbb{R})$. Eine quadratintegrierbare Darstellung von $\mathbf{G}_{aff}$ im $H^s(\mathbb{R})$ ist durch*

$$\hat{\pi}_s(q,a)\hat{\psi}(\omega) = |a|^{1/2} e^{-iq\omega}(1+|\omega|^2)^{-s/2}(1+|a\omega|^2)^{s/2}\hat{\psi}(a\omega)$$

gegeben. Ein Vektor $\psi \in H^s(\mathbb{R})$ ist zulässig, falls

$$0 < \int\limits_{\mathbb{R}} (1+|\omega|^2)^s \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

gilt.

Beweis: Sei $\psi \in H^s(\mathbb{R})$, dann hat man

$$\begin{aligned} \langle \pi_s(g)\psi, \psi\rangle_{H^s} &= \langle \Lambda_s \pi_s(g)\psi, \Lambda_s\psi\rangle_{L_2} \\ &= \left\langle |a|^{1/2} e^{-iq\cdot}(1+|a\cdot|^2)^{s/2}\hat{\psi}(a\cdot), (1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{\psi} \right\rangle_{L_2} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbf{G}_{aff}} |\langle \pi_s(g)\psi, \psi\rangle_{H^s}|^2 d\mu(g) = \\ &= 2\pi \int\limits_{\mathbf{G}_{aff}} |a||\mathcal{F}\left((1+|a\cdot|^2)^{s/2}\hat{\psi}(a\cdot)(1+|\cdot|^2)^{s/2}\bar{\hat{\psi}}(\cdot)\right)(q)|^2 dq da/a^2 \\ &= 2\pi \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}} |(1+|a\eta|^2)^{s/2}\hat{\psi}(a\eta)(1+|\eta|^2)^{s/2}\bar{\hat{\psi}}(\eta)|^2 d\eta da/|a| \\ &= 2\pi\|\psi\|_s^2 \int\limits_{\mathbb{R}} (1+|\omega|^2)^s \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega\ . \end{aligned}$$

Die Unität und Irreduzibilität der Darstellung übertragen sich aus dem L_2-Setting, denn zu jedem $\psi \in H^s(\mathbb{R})$ gehört eine Funktion $\varphi = \Lambda_s\psi \in L_2(\mathbb{R})$. Nach der Definition der Darstellung in H^s wirkt auf ϕ die L_2-Darstellung π, die diese Eigenschaften besitzt. ■

Bemerkung 1.2.1.5 Die Darstellung im L_2 kann mit dem Translationsoperator T_q und dem Dilatationsoperator D_a dargestellt werden, $\pi(g) = T_q D_a$. Diese Interpretation modifiziert sich für π_s, denn man hat $\pi_s(g) = \Lambda_{-s} T_q D_a \Lambda_s$.

Definition 1.2.1.6 *Die zugehörige Links-Transformation ist die* **eindimensionale Wavelet-Transformation** *in* $H^s(\mathbb{R})$

$$\mathcal{W}_\psi f(q,a) = \langle \pi_s(q,a)\psi, f\rangle_{H^s}\,.$$

Bemerkung 1.2.1.7 Man kann sich auf eine Untergruppe von $\mathbf{G}_{aff}$, nämlich $\mathbf{G}^+_{aff} \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, einschränken. Im L_2-Fall hat man zwei nicht-äquivalente Darstellungen π_+ beziehungsweise π_- in den Hardy-Räumen

$$\begin{aligned} H_+(\mathbb{R}) &= \{f\in L_2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega)=0,\ \text{falls } \omega<0\} \text{ beziehungsweise} \\ H_-(\mathbb{R}) &= \{f\in L_2(\mathbb{R}) \mid \hat{f}(\omega)=0,\ \text{falls } \omega>0\}. \end{aligned}$$

Die Vektoren in $H_+(\mathbb{R})$ beziehungsweise $H_-(\mathbb{R})$ können zu analytischen Funktionen über die obere beziehungsweise untere komplexe Halbebene fortgesetzt werden. Da die Wavelet Analysis auf $H_+(\mathbb{R})$ auch auf ganz $L_2(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden kann, kann man sich weitestgehend auf $\mathbf{G}^+_{aff}$ beschränken. Wegen der orthogonalen Zerlegung $L_2(\mathbb{R}) = H_+(\mathbb{R}) \oplus H_-(\mathbb{R})$ kann der H^s ebenfalls aufgespaltet werden

$$H^s(\mathbb{R}) = H^s_+(\mathbb{R}) \oplus H^s_-(\mathbb{R})\ .$$

Wenn nicht explizit erwähnt, ist $\mathbf{G}_{aff} \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ gemeint.

Es wird nun die eindimensionale Gruppe $\mathbf{G}_{aff}$ auf n Dimensionen verallgemeinert werden.

Definition 1.2.1.8 *Die* **n-dimensionale affine Gruppe** $\mathbf{G}_{aff}$ *ist durch*

$$\mathbf{G}_{aff} = \Big(\{(q,a,R):\ q\in\mathbb{R}^n,\ a\in\mathbb{R}_+,\ R\in SO(n)\},\circ\Big),$$

mit dem Gruppengesetz

$$(q,a,R)\circ(q',a',R') = (q+aRq', aa', RR'),$$

gegeben.

Die Gruppe $\mathbf{G}_{aff}$ ist topologisch isomorph zu $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\times SO(n)$.

Satz 1.2.1.9 *Das rechte und linke Haar-Maß auf* $\mathbf{G}_{aff}$ *sind durch*

$$d\mu_R(q,a,R) = a^{-1}dadqdm(R) \quad \text{und} \quad d\mu_L(q,a,R) = a^{-(n+1)}dadqdm(R)$$

gegeben, wobei $dm(R)$ *das invariante Haar-Maß auf* $SO(n)$ *bezeichnet.*

Beweis: Sei $H\subset\Omega = R^n\times\mathbb{R}_+\times SO(n)$, dann ist $\mu_L(g\circ H) = \mu_L(H)$ und $\mu_R(H\circ g) = \mu_R(H)$ zu zeigen. Sei nun $\Phi_L(H) = g'\circ H$, das heißt

$$\Phi_L(q,a,R) = (q',a',R')\circ(q,a,R) = (q'+a'R'q, a'a, R'R).$$

Nach dem Satz von Haar kann man eine nichtnegative Gewichtsfunktion γ ansetzen

$$\mu_L(H) = \int_H \gamma(q,a,R) dqdadm(R).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\mu_L(g' \circ H) &= \int_{g'\circ H} \gamma(q,a,R) dqdadm(R) \\ &= \int_H \gamma(\Phi_L(q,a,R)) |\det J_{\Phi_L}(q,a,R)| dqdadm(R) \ .\end{aligned}$$

Benutzt man die Eulerwinkelparametrisierung, siehe Anhang, so hat die Funktionalmatrix die Struktur

$$J_{\Phi_L} = \begin{pmatrix} a'R' & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & Id_{n(n-1)/2} \end{pmatrix} \quad \text{und somit gilt} \quad |\det J_{\Phi_L}(q,a,R)| = (a')^{n+1} \ .$$

Eine mögliche Funktion ist $\gamma(q,a,R) = a^{-(n+1)}$ und somit hat man

$$\mu_L(q,a,R) = a^{-(n+1)} dqdadm(R) \ .$$

Analog geht man beim rechten Haar-Maß vor. Mit

$$\Phi_L(q,a,R) = (q,a,R) \circ (q',a',R') = (q + aRq', aa', RR')$$

ergibt sich folgende Funktionalmatrix

$$J_{\Phi_R} = \begin{pmatrix} Id_n & b & A \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & Id_{n(n-1)/2} \end{pmatrix} \quad \text{und somit} \quad |\det J_{\Phi_L}(q,a,R)| = a' \ ,$$

mit $b \in \mathbb{R}^n$ und A eine $n \times n(n-1)/2$ Matrix. Sowohl b als auch A haben keinen Einfluß auf die Determinante und es folgt

$$\mu_R(q,a,R) = a^{-1} dqdadm(R) \ .$$

■

Bemerkung 1.2.1.10 Bei der n-dimensionalen Verallgemeinerung gibt es zwei unterscheidbare Fälle: Erhöhung der Dimension mit und ohne Erweiterung der n-dimensionalen Gruppe $\mathbf{G}_{aff}$ um die Rotationen im $\mathbb{R}^n$.
Bei Hinzunahme der Rotationen hat man einen Translationsparameter $q \in \mathbb{R}^n$, einen Dilatationsparameter $a > 0$ und eine Rotation R als eine orthogonale $n \times n$ Matrix. Die Rotationsmatrizen können durch Eulerwinkel parametrisiert werden. Für $n = 2$ ist $R = R(\theta)$ eine 2×2 Rotationsmatrix, die durch $\theta \in [0, 2\pi)$ parametrisiert ist. Für $n = 3$ ist $R = R(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ eine 3×3 Rotationsmatrix, die durch drei Euler-Winkel parametrisiert ist. Die Erweiterung um die Rotationen im $\mathbb{R}^n$ generiert gerade die n-dimensionale Euklidische Gruppe. Diese Gruppe wird mit $SIM(n)$ beziehungsweise $IG(n)$ bezeichnet .

Bemerkung 1.2.1.11 Interessant sind diejenigen Funktionen ψ, die axialsymmetrisch, das heißt $SO(n-1)$-invariant, sind. Wegen

$$SO(n)/SO(n-1) \cong S^{n-1}$$

kann jede Rotation $R_n \in SO(n)$ als Produkt KR_{n-1} dargestellt werden, wobei $K \in S^{n-1}$ und $R_{n-1} \in SO(n-1)$ gilt. Beschränkt man sich auf $R \in S^{n-1}$, so ist

$$\mathcal{W}_\psi f \in L_2(IG(n)/SO(n-1), d\zeta(R) dbda/a^{n+1}).$$

Zudem ist die komplette Gruppe $IG(n)$ für $n > 2$ nicht notwendig, um die Vektoren des Hilbert-Raumes aus ihrer Wavelet-Transformierten zu rekonstruieren.

Satz 1.2.1.12 *Sei $\psi \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und axialsymmetrisch. Eine quadratintegrierbare Darstellung von $\mathbf{G}_{aff}$ im $H^s(\mathbb{R}^n)$ ist durch*

$$\hat{\pi}_s(q,a,R)\hat{\psi}(\omega) = |a|^{n/2} e^{-iq'\omega}(1+\|\omega\|^2)^{-s/2}(1+\|aR\omega\|^2)^{s/2}\hat{\psi}(a\omega)$$

gegeben. Ein Vektor $\psi \in H^s(\mathbb{R}^n)$ ist zulässig, falls

$$0 < \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|\omega\|^2)^s \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\|\omega\|^n} d^n\omega < \infty$$

gilt.

Beweis: Sei $\psi \in H^s(\mathbb{R}^n)$, dann hat man zunächst

$$\langle \pi_s(g)\psi, \psi\rangle_{H^s} = (2\pi)^{n/2} a^{n/2} \mathcal{F}\left(K(a,R,\cdot)\right)(q),$$

mit $\hat{\phi}(\omega) := (1+\|\omega\|^2)^{s/2}\hat{\psi}(\omega)$ und

$$K(a,R,\omega) = (1+\|aR\omega\|^2)^{s/2}\hat{\psi}(aR\omega)(1+\|\omega\|^2)^{s/2}\bar{\hat{\psi}}(\omega) = \hat{\phi}(aR\omega)\bar{\hat{\phi}}(\omega)\ .$$

Mit $O^R f(x) = f(R'x)$ folgt dann

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{G}_{aff}} |\langle \pi_s(g)\psi, \psi\rangle_{H^s}|^2 a^{-(n+1)} dq da dm(R) = \\
&= (2\pi)^n \int_{\mathbf{G}_{aff}} |\hat{\phi}(\omega)|^2 |D^{1/a} O^R \hat{\phi}(\omega)|^2 a^{-(n+1)} d\omega da dm(R) \\
&= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\phi}(\omega)|^2 \underbrace{\int_{R_+\times SO(n)} |D^{1/a} O^R \hat{\phi}(\omega)|^2 a^{-(n+1)} da dm(R)\, dw}_{=: I(w)}\ .
\end{aligned}$$

Um $I(w)$ auszuwerten, benutzt man die Faktorisierung $SO(n) \cong S^{n-1} \times SO(n-1)$, das heißt $R = KR_{n-1}$, vergleiche Anhang, die Axialsymmetrie von $\hat{\phi}$, das heißt $O^{KR_{n-1}}\hat{\phi} = O^K\hat{\phi}$ und die Kompaktheit von $SO(n-1)$ und erhält

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \int\limits_{R_+ \times S^{n-1} \times SO(n-1)} |D^{1/a} O^{KR_{n-1}} \hat{\phi}(\omega)|^2 a^{-(n+1)} da d\zeta(K) dm(R_{n-1}) \\ &= \int\limits_{R_+ \times S^{n-1}} |D^{1/a} O^K \hat{\phi}(\omega)|^2 a^{-(n+1)} da d\zeta(K) \cdot vol(SO(n-1)) \ . \end{aligned}$$

Mit der Eulerwinkelparametrisierung folgt

$$\begin{aligned} I(\omega) &= c \int_{\mathbb{R}_+} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} |\hat{\phi}(\sigma(a\|\omega\|, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}))|^2 \quad \ldots \\ & \quad \ldots \quad \sin^{n-2}\theta_{n-1} \sin^{n-3}\theta_{n-2} \cdots \sin\theta_2 d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1} a^{-1} da. \end{aligned}$$

Die Abbildung $\sigma: \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times [0, \pi) \times \cdots \times [0, \pi) \to \mathbb{R}^n$ beschreibt den Übergang von sphärischen zu Euklidischen Koordinaten. Vergleiche im Anhang:

$$\sigma(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) = r(\xi_1, \ldots, \xi_n)'.$$

Mit der Substitution $\tilde{a}\|\omega\| = a$, der Determinante der Jacobi-Matrix $\det(J\sigma)$ und der Substitution für $\hat{\phi}$ hat man

$$I(\omega) = vol(SO(n-1)) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\hat{\phi}(\xi)|^2}{\|\xi\|^n} d\xi = vol(SO(n-1)) \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 + \|\xi\|^2)^s \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\|\xi\|^n} d\xi$$

und letztendlich

$$\int\limits_{\mathbf{G}_{aff}} |\left\langle \pi_s(g)\psi, \psi \right\rangle_{H^s}|^2 a^{-(n+1)} dq da dm(R) =$$

$$(2\pi)^n \cdot vol(SO(n-1)) \cdot \|\psi\|_s^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 + \|\xi\|^2)^s \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\|\xi\|^n} d\xi.$$

■

Definition 1.2.1.13 *Die zugehörige* n**-dimensionale Wavelet-Transformation** *in* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *ist durch*

$$\mathcal{W}_\psi f(q, a, R) = \left\langle \pi_s(q, a, R)\psi, f \right\rangle_{H^s}$$

definiert.

Satz 1.2.1.14 *Sei* $\psi \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *zulässig, dann ist der Integraloperator* $\mathcal{W}_\psi$ *bis auf eine Konstante* $C > 0$ *eine Isometrie zwischen* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *und* $\mathrm{range}(\mathcal{W}_\psi) \subset L_2(\mathbf{G}_{aff}, d\mu_L)$

$$\|\mathcal{W}_\psi f\|_2^2 = C\|f\|_s^2 \quad .$$

Beweis: Es ist zu zeigen, daß der Operator $\mathcal{A}$ ein Vielfaches der Identität ist. Seien $f, \psi \in H^s(\mathbb{R}^n)$, dann ist

$$\mathcal{A}f(x) = \int_{\mathbf{G}_{aff}} \langle f, \pi_s(q,a,R)\psi\rangle_{H^s}\, \pi_s(q,a,R)\psi(x) d\mu(g) \ .$$

Die Fourier-Transformierte ist demnach mit

$$K(a,R,x) = \left(1+\|x\|^2\right)^{s/2} \hat{f}(x) \left(1+\|aRx\|^2\right)^{s/2} \bar{\hat{\psi}}(aRx)$$

durch

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{A}f}(\omega) &= (2\pi)^{n/2} \int_{\mathbf{G}_{aff}} \mathcal{F}^{-1}\left(K(a,R,\cdot)\right)(q) e^{-iq'\omega} dq \quad \times \\ &\qquad a^{n/2}\left(1+\|\omega\|^2\right)^{-s/2} \left(1+\|aR\omega\|^2\right)^{s/2} \hat{\psi}(aR\omega) a^{-(n+1)} da dm(R) \\ &= \hat{f}(\omega)\cdot(2\pi)^n \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+\times SO(n)} \left(1+\|aR\omega\|^2\right)^s |\hat{\psi}(aR\omega)|^2 a^{-1} da dm(R)}_{=I(\omega)}\end{aligned}$$

gegeben. $I(\omega)$ kann analog wie im Beweis des Satzes 1.2.1.12 berechnet werden

$$I(\omega) = I = vol(SO(n-1)) \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+\|\xi\|^2\right)^s \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\|\xi\|^n} d\xi \ ,$$

das heißt $C = (2\pi)^n \cdot I$. ■

Die Gruppe $\mathbf{G}_{WH}$

Definition 1.2.1.15 *Die* **n-dimensionale polarisierte Weyl-Heisenberg Gruppe $\mathbf{G}_{WH}$** *ist durch*

$$\mathbf{G}_{WH} = \left(\{(q,p,\varphi): \ q\in\mathbb{R}^n, \ p\in\mathbb{R}^n, \ \varphi\in S^1, \circ\}\right),$$

mit dem Gruppengesetz

$$(q,p,\varphi)\circ(q',p',\varphi') = (q+q', p+p', \varphi+\varphi'+p\cdot q' \ mod\ 2\pi),$$

gegeben.

Die Gruppe $\mathbf{G}_{WH}$ ist topologisch isomorph zu $\mathbb{R}^{2n}\times S^1$.

Satz 1.2.1.16 *Die Gruppe $\mathbf{G}_{WH}$ ist unimodular mit dem invarianten Haar-Maß*

$$d\mu(g) = dq dp d\varphi.$$

Beweis: Der Beweis kann zum Beispiel in [LMR98] nachgeschlagen werden. ■

Bemerkung 1.2.1.17 Bis auf unitäre Äquivalenz sind alle quadratintegrierbaren Darstellungen der Gruppe $\mathbf{G}_{WH}$ in L_2 durch

$$\pi(q,p,\varphi)\psi(x) = e^{i(\varphi - p\cdot(x-q))}\psi(x-q)$$

gegeben. Ein Vektor ψ ist zulässig, falls $\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Satz 1.2.1.18 *Sei $\psi \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Eine quadratintegrierbare Darstellung von $\mathbf{G}_{WH}$ im $H^s(\mathbb{R}^n)$ ist durch*

$$\hat{\pi}_s(q,p,\varphi)\hat{\psi}(\omega) = e^{i(\varphi - q'\omega)}\left(1+\|\omega\|^2\right)^{-s/2}\left(1+\|\omega+p\|^2\right)^{s/2}\hat{\psi}(\omega+p)$$

gegeben. Ein Vektor ψ ist zulässig, falls $\psi \in H^s(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Beweis: Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\langle \pi_s\psi, \psi\rangle_{H^s} &= \left\langle e^{i(\varphi - q'\cdot)}\left(1+\|\cdot+p\|^2\right)^{s/2}\hat{\psi}(\cdot+p), \left(1+\|\cdot\|^2\right)^{s/2}\hat{\psi}\right\rangle \\
&= (2\pi)^{n/2}e^{i(\varphi+q'p)}\mathcal{F}\left(K(p,\cdot)\right)(q)\ ,
\end{aligned}$$

mit $K(p,\omega) = (1+\|\omega+p\|^2)^{s/2}\,\hat{\psi}(\omega+p)\,(1+\|\omega\|^2)^{s/2}\,\bar{\hat{\psi}}(\omega)$ und daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbf{G}_{WH}} |\langle \pi_s\psi, \psi\rangle_{H^s}|^2 dq dp d\varphi &= (2\pi)^{n+1}\int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} |K(p,q)|^2 dq dp \\
&= (2\pi)^{n+1}\|\psi\|_s^2\|\psi\|_s^2\ .
\end{aligned}$$

■

Definition 1.2.1.19 *Die zugehörige Links-Transformation ist die* **Gabor-Transformation** *in $H^s(\mathbb{R}^n)$*

$$\mathcal{G}_\psi f(q,p,\varphi) = \langle \pi_s(q,p,\varphi)\psi, f\rangle_{H^s}\ .$$

Bemerkung 1.2.1.20 Die Gruppen $\mathbf{G}_{aff}$ und $\mathbf{G}_{WH}$ führen in $H^s(\mathbb{R}^n)$ auf Vektoren mit modifizierten Zulässigkeitsforderungen. Beide Integraltransformationen beinhalten Zeit-Skalen- beziehungsweise Zeit-Frequenz-Analysen.
Interessant aus Sicht der Signalanalyse ist eine Zusammenführung beziehungsweise Interpolation beider Transformationen zu einer Zeit-Skalen-Frequenz-Analyse und die damit verbundene Frage nach den Zulässigkeitsforderungen.

In den folgenden Abschnitten sollen deshalb zwei mögliche Kombinationen der Gruppen $\mathbf{G}_{aff}$ und $\mathbf{G}_{WH}$ analysiert werden. Der erste Zugang über das direkte Produkt ist eine kanonische und unkomplizierte Variante. Der zweite Zugang über das semidirekte Produkt ist aufwendiger und wurde für die Darstellung im $L_2(\mathbb{R}^n)$ in [KT93] ausgearbeitet.

1.2.2 Direkte affine Weyl-Heisenberg Gruppe $\mathbf{G}^d_{aWH}$

Die erste Gruppenkonstruktion soll über das *direkte Produkt* von $\mathbf{G}_{aff}$ mit $\mathbf{G}_{WH}$ durchgeführt werden.

Zunächst soll ein Beispiel illustrieren, daß es wichtig ist, das Produkt über die vollständigen Parameterbereiche der Gruppen einzuführen.

Beispiel 1.2.2.1 Das direkte Produkt der affin-linearen Gruppe mit einer Untergruppe der Weyl-Heisenberg Gruppe $\mathbf{G}_{awh} \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \times S^1$ mit dem Gruppengesetz $(q,p,a,\varphi) \circ (q',p',a',\varphi') = (q+aq', p+p', aa', \varphi+\varphi)$ soll analysiert werden. Sei $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$, dann kann man folgende Darstellung betrachten

$$\pi(g)f(x,y) = a^{-1/2}e^{i(\varphi-px)}f(x,(y-b)/a).$$

Links- beziehungsweise rechtsinvariantes Haar-Maß sind durch

$$d\mu_L(g) = dqdadpd\varphi/a^2 \text{ bzw. } d\mu_R(g) = dqdadpd\varphi/a$$

gegeben. Das Problem ist, daß die Darstellung nicht irreduzibel ist, denn angenommen $f,g \in L_2(\mathbb{R}^2)$, dann hat man für alle $g \in \mathbf{G}_{awh}$

$$\int_{\mathbf{G}_{awh}} |\langle \pi(g)f,g\rangle|^2 d\mu_L(g) \;=\; (2\pi)^3 \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{F}g(\eta,\cdot)(\zeta)|^2 \int_{\mathbb{R}_+} |\mathcal{F}f(\eta,\cdot)(a\zeta)|^2 \frac{da}{a} d\eta d\zeta.$$

Das heißt, $\langle \pi(g)f,g\rangle$ kann für alle $g \in \mathbf{G}_{awh}$ verschwinden ohne daß f und g selbst verschwinden. Dies bedeutet, es gibt nichttriviale Funktionen f und g, so daß $\pi(g)f \perp g$ gilt, womit die Existenz eines echten unter π invarianten Unterraumes $V \subset L_2(\mathbb{R}^2)$ mit $V \oplus V^\perp = L_2(\mathbb{R}^2)$ erbracht ist. Dies bedeutet, daß die Darstellung nicht den Anforderungen entspricht. □

Ein konsequenter Ansatz ist deshalb durch nachfolgende Definition gegeben.

Definition 1.2.2.2 *Die aus dem direkten Produktansatz $\mathbf{G}_{aff} \times \mathbf{G}_{WH}$ resultierende Gruppe mit dem komponentenweisen Gruppengesetz*

$$(g;h) \circ (g';h') = (g \circ g'; h \circ h')$$

oder explizit

$$\begin{aligned}&(q,p,\varphi;b,a,R) \circ (q',p',\varphi';b',a',R')\\ &= (q+q', p+p', \varphi+\varphi'+pq' \; mod\; 2\pi; b+aRb', aa', RR')\end{aligned}$$

wird **direkte affine Weyl-Heisenberg Gruppe** *genannt und mit $\mathbf{G}^d_{aWH}$ bezeichnet.*

Bemerkung 1.2.2.3 Zu den Gruppen $\mathbf{G}_{aff}$ und $\mathbf{G}_{WH}$ gibt es isomorphe Gruppen, die jeweils Untergruppen von $\mathbf{G}_{aWH}^d$ sind, was wiederum Wavelet- und Gaboranalysis als Spezialfälle impliziert.

Die Gruppe $\mathbf{G}_{aWH}^d$ ist topologisch isomorph zu $(\mathbb{R}^{2m} \times S^1, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times SO(n))$. Zur direkten affinen Weyl-Heisenberg Gruppe $\mathbf{G}_{aWH}^d$ sind nun geignete Darstellungen gesucht.

Da man in $\mathbf{G}_{aWH}^d$ ein komponetenweises Gruppengesetz hat, ist es kanonisch, die Darstellung der Gruppe ebenfalls komponentenweise einzuführen. Demtentsprechend können nun verschiedene Ansätze betrachtet werden. Einerseits ist ein Tensor-Produkt-Ansatz und andererseits ist ein anisotroper Ansatz naheliegend.

1.2.3 Darstellung in Tensor Produkte von Sobolev-Räumen

Eine einfache und erwähnenswerte Darstellungsvariante ergibt sich über die **direkte Summe** der Darstellungen. Es wird sich jedoch zeigen, daß diese Darstellungsform nicht sehr innovativ ist.

Darstellung über die direkte Summe

Definition 1.2.3.1 *Seien π_1 und π_2 Darstellungen einer Gruppe G in Hilbert-Räumen $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$. Durch setzen von*

$$\pi(g)(x, y) = (\pi_1(g)x, \pi_2(g)y),$$

mit $x \in \mathcal{H}_1$ und $y \in \mathcal{H}_2$ erhält man eine Darstellung π von G in $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. Diese Darstellung wird **direkte Summe** *von π_1 und π_2 genannt und mit $\pi_1 + \pi_2$ bezeichnet.*

Der Raum $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ besteht aus allen Vektoren (x, y), mit $x \in \mathcal{H}_1$ und $y \in \mathcal{H}_2$. Dieser Raum wird mit dem komponentenweisen Skalarprodukt

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle y_1, y_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}$$

zum Hilbert-Raum. Der Operator $\pi(g)$ der auf $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ agiert, kann als Matrix der Operatoren $\pi_1(g)$ und $\pi_2(g)$ aufgefaßt werden

$$\pi_1 + \pi_2 : G \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2), \quad g \mapsto \begin{pmatrix} \pi_1(g) & 0 \\ 0 & \pi_2(g) \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathcal{H}_1 = H^s$, $\mathcal{H}_2 = H^t$ und entsprechend $f_1 \in H^s(\mathbb{R}^m)$, $f_2 \in H^t(\mathbb{R}^n)$. Die Darstellung der Gruppe $\mathbf{G}_{aWH}^d$ ist über die Fourier-Transformierte gegeben

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_{1,s}(g)\hat{f}_1(\omega) &= e^{i(\varphi - q'\omega)}(1+\|\omega\|^2)^{-s/2}(1+\|\omega+p\|^2)^{s/2}\hat{f}_1(\omega+p)\\ \hat{\pi}_{2,t}(g)\hat{f}_2(\omega) &= a^{n/2}e^{-b'\omega}(1+\|\omega\|^2)^{-t/2}(1+\|aR\omega\|^2)^{t/2}\hat{f}_2(aR\omega).\end{aligned}$$

Satz 1.2.3.2 *Sei $\pi := \pi_{1,s} + \pi_{2,t}$, dann ist π homomorph, stetig und $\pi(g)$ ist für alle $g \in \mathbf{G}^d_{aWH}$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^s+H^t}$ eine unitäre Darstellung.*

Beweis: Sei $g \in \mathbf{G}^d_{aWH}$ und $f_1 + f_2 \in H^s + H^t$, dann gilt

$$\begin{aligned}\pi(g\circ g')(f_1+f_2)(x) &= \pi_{1,s}(g\circ g')f_1(x) + \pi_{2,t}(g\circ g')f_2(x)\\ &= \pi_{1,s}(g)\pi_{1,s}(g')f_1(x) + \pi_{2,t}(g)\pi_{2,t}(g')f_2(x)\\ &= \pi(g)(\pi_{1,s}(g')f_1 + \pi_{2,s}(g')f_2)(x) = \pi(g)\pi(g')(f_1+f_2)(x),\end{aligned}$$

das heißt es gilt $\pi(g\circ g') = \pi(g)\pi(g')$. Da $\pi_{1,s}(g)$ und $\pi_{2,t}(g)$ für alle $g \in \mathbf{G}^d_{aWH}$ unitär sind, ist $\pi(g)$ ebenfalls unitär. ■

Wenn man die Funktionen $\langle\pi(g)f, h\rangle$ betrachtet, macht der Begriff der Zulässigkeit nur Sinn, wenn man in $L_2(\mathbf{G}^d_{aWH}, d\mu)$ die Struktur (Skalarprodukt) des Darstellungsraumes $H^s(\mathbb{R}^m) + H^t(\mathbb{R}^n)$ überträgt. Wählt man das herkömmliche Skalarprodukt, so wäre der einzige zulässige Vektor der Darstellung π der Nullvektor.

Analog zum Darstellungsraum wird $L_2(\mathbf{G}^d_{aWH}, d\mu) = L_2(\mathbf{G}_{WH}, d\eta) + L_2(\mathbf{G}_{aff}, d\zeta)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle F, G\rangle_{L_2(\mathbf{G}^d_{aWH})} = \langle F_1, G_1\rangle_{L_2(\mathbf{G}_{WH})} + \langle F_2, G_2\rangle_{L_2(\mathbf{G}_{aff})}$$

zum Hilbert-Raum.

Satz 1.2.3.3 *Die Darstellung π ist mit den invarianten Haar-Maßen $d\eta$ der Gruppe $\mathbf{G}_{WH}$ und $d\zeta$ der Gruppe $\mathbf{G}_{aff}$ quadratintegrierbar.*

Beweis: Jede Komponente der Vektoren von Funktionen in $H^s(\mathbb{R}^m) + H^t(\mathbb{R}^n)$ und in $L_2(\mathbf{G}_{WH}, d\eta) + L_2(\mathbf{G}_{aff}, d\zeta)$ kann separat behandelt werden. Es übertragen sich die Resultate der Einzeldarstellungen aus den vorigen Abschnitten. ■

Darstellung über das direkte Produkt

Eine besser auf die Gruppenstruktur passende Darstellung ist das **direkte Produkt** $\pi_1 \otimes \pi_2$, vergleiche [VK91]. Diese Form der Darstellung soll im folgenden Abschnitt analysiert werden. Dazu wird es notwendig, geeignete Darstellungsräume zu konstruieren.

Satz 1.2.3.4 *Seien π_1 und π_2 Darstellungen der Gruppen G und H, dann ist*

$$\pi(g,h) = \pi_1(g) \otimes \pi_2(h) \ , \quad g \in G, \ h \in H$$

eine Darstellung des direkten Produktes $G \times H$.

Beweis: Dies kann in [VK91] nachgeschlagen werden. ■

Bemerkung 1.2.3.5 Würde der Operator $\pi(g,h)$ auf dem Tensor-Produkt $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ agieren, das heißt $\pi_1 \otimes \pi_2 : G \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2), \quad g \mapsto \pi_1(g) \otimes \pi_2(h)$, so hätte man einen zur Darstellung passenden Darstellungsraum. Das herkömmliche Skalarprodukt ist aber nicht geeignet und falls man eine entsprechende Linearform hat, so ist der Abschluß von $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ zu betrachten.

Es soll nun ein geeignetes Tensor-Produkt konstruiert werden. Es gibt bis auf Äquivalenz drei verschiedene Möglichkeiten ein Tensor-Produkt von zwei Hilbert-Räumen einzuführen, vergleiche [DF93]. Hier soll die in [Hoc98] ausgeführte Möglichkeit benutzt werden.

Definition 1.2.3.6 *Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ zwei Hilbert-Räume und $\mathcal{H}_1'$ und $\mathcal{H}_2'$ die dazugehörigen Dual-Räume. Sei $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1', \mathcal{H}_2')$ der Raum der Bilinearformen. Dann ist das Tensor-Produkt $x \otimes y$ mit $x \in \mathcal{H}_1$ und $y \in \mathcal{H}_2$ definiert als das Element in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1', \mathcal{H}_2')$ mit*

$$(x \otimes y)(x', y') := x'(x)y'(y) \ , \quad (x', y') \in \mathcal{H}_1' \times \mathcal{H}_2' \ .$$

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ wird durch Tensor-Produkte $x \otimes y$, $(x,y) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, generiert und ist somit definiert als Unterraum von $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1', \mathcal{H}_2')$.

Definition 1.2.3.7 *Seien $f, g \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ mit $f = \sum_{j=1}^{m_j} c_j u_j \otimes v_j$ und $g = \sum_{k=1}^{m_k} d_k w_k \otimes z_k$ und $u_j, w_k \in \mathcal{H}_1$, $v_j, z_k \in \mathcal{H}_2$. Führt man durch*

$$l(f,g) := \sum_{j=1}^{m_j} \sum_{k=1}^{m_k} c_j d_k \left\langle u_j, w_k \right\rangle_{\mathcal{H}_1} \left\langle v_j, z_k \right\rangle_{\mathcal{H}_2}$$

eine Sesquilinearform ein, so wird $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ damit zum Prä-Hilbert-Raum. Das **Tensor-Produkt**

$$\mathcal{H}_1 \otimes_l \mathcal{H}_2$$

wird dann definiert als der Abschluß von $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ bezüglich $l(\cdot,\cdot)$.

Das allgemeine Setting wird nun durch Setzen von $\mathcal{H}_1 := H^{s_1}$ und $\mathcal{H}_2 := H^{s_2}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^s}$, das Skalarprodukt in $H^s(\mathbb{R}^n)$, spezifiziert.

Definition 1.2.3.8 *Seien* $s_1, s_2 \geq 0$ *und* $n, m \in \mathbb{N}$. *Der Raum*

$$H^{s_1,s_2}_{mix}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) := \{u \in L_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \ : \quad \|u\|_{s_1,s_2} < \infty\}$$

mit der Norm

$$\|u\|^2_{s_1,s_2} := \int\limits_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} |(1 + \|k_1\|^2)^{s_1/2}(1 + \|k_2\|^2)^{s_2/2}\mathcal{F}u(k_1, k_2)|^2 dk_1 dk_2$$

heißt **Sobolev-Raum gemischter Glattheit**. *Das Skalarprodukt ist gegeben durch*

$$\langle u, v\rangle_{H^{s_1,s_2}} := \int\limits_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} (1 + \|k_1\|^2)^{s_1}(1 + \|k_2\|^2)^{s_2}\mathcal{F}u(k_1, k_2)\overline{\mathcal{F}v}(k_1, k_2) dk_1 dk_2 \ .$$

Es gilt nun das folgende Theorem.

Theorem 1.2.3.9 *Seien* $s_1, s_2 \geq 0$ *und* $n, m \in \mathbb{N}$, *dann gilt*

$$H^{s_1}(\mathbb{R}^m) \otimes_l H^{s_2}(\mathbb{R}^n) = H^{s_1,s_2}_{mix}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) \ .$$

Beweis: Der Beweis kann in [Hoc98] eingesehen werden. ■

Bemerkung 1.2.3.10 Sei $f \in H^{s_1}(\mathbb{R}^m) \otimes_l H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ und sei $G = \mathbf{G}_{WH}$ und $H = \mathbf{G}_{aff}$, dann ist eine Produktdarstellung von $\mathbf{G}^d_{aWH}$ in $H^{s_1}(\mathbb{R}^m) \otimes_l H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{s_1,s_2}(g, h)(\hat{f})(\omega, \eta) &= (1 + \|\omega\|^2)^{-s_1/2}(1 + \|\eta\|^2)^{-s_2/2}e^{i(\varphi - q'\omega)}a^{n/2}e^{-ib'\eta} \quad \times \\ & \quad (1 + \|\omega + p\|^2)^{s_1/2}(1 + \|aR\eta\|^2)^{s_2/2}\hat{f}(\omega + p, aR\eta) \end{aligned}$$

gegeben. In der äquivalenten Orts- beziehungsweise Zeitdarstellung hat man mit der Definition $(\Lambda_{s_1,s_2}f)^\wedge(k_1, k_2) := (1+\|k_1\|^2)^{s_1/2}(1+\|k_2\|^2)^{s_2/2}\hat{f}(k_1, k_2)$ die Darstellung

$$\pi_{s_1,s_2}(g, h)f(x, y) = \Lambda_{-s_1,-s_2}\pi(g, h)\Lambda_{s_1,s_2}f(x, y) \ .$$

Satz 1.2.3.11 *Die Darstellung* π_{s_1,s_2} *im* $H^{s_1}(\mathbb{R}^m) \otimes_l H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ *ist homomorph, stetig, unitär und quadratintegrierbar. Links- und Rechtsinvariantes Haar-Maß sind gegeben durch*

$$\begin{aligned} d\mu_L(p, q, \varphi, b, a, R) &= a^{-(n+1)} \ dp \ dq \ d\varphi \ db \ da \ dm(R), \\ d\mu_R(p, q, \varphi, b, a, R) &= a^{-1} \ dp \ dq \ d\varphi \ db \ da \ dm(R), \end{aligned}$$

wobei $dm(R)$ *das invariante Maß der* $SO(n)$*-Gruppe bezeichnet. Es kann* $SO(n)$ *durch* $S^{n-1} \cong SO(n)/SO(n-1)$ *und somit* $dm(R)$ *durch* $d\zeta(R)$ *(das invariante Maß der Sphäre) ersetzt werden.*

Beweis: Sei $s_1 = s \geq 0$ und $s_2 = t \geq 0$. Es ist einzusehen, daß $\pi_{s,t}$ eine strukturverträgliche Darstellung ist:

$$\begin{aligned}
\pi_{s,t}((g,h)\circ(g',h')) &= \pi_{s,t}(g\circ g', h\circ h') = \pi_{1,s}(g\circ g') \otimes \pi_{2,t}(h\circ h') \\
&= \pi_{1,s}(g)\pi_{1,s}(g') \otimes \pi_{2,t}(h)\pi_{2,t}(h') \\
&= (\pi_{1,s}(g) \otimes \pi_{2,t}(h))(\pi_{1,s}(g') \otimes \pi_{2,t}(h')) \\
&= \pi_{s,t}(g,h)\pi_{s,t}(g',h')
\end{aligned}$$

Da die Einzeldarstellungen stetig sind, ist $\pi_{s,t}$ ebenfalls stetig. Bei der Berechnung der Haar-Maße kommt es darauf an, die Jacobi-Matrix der Transformationen $\Phi_L(H) = g' \circ H$ und $\Phi_R(H) = H \circ g'$ zu berechnen. Es sollen zwei Fälle betrachtet werden. Einerseits die Verwendung von $SO(n)$ und andererseits die Verwendung von S^{n-1}. Sei zunächst $H \subset (\mathbb{R}^{2m} \times S^1, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times S^{n-1})$:

$$J\Phi_L^{S^{n-1}} = \ldots \qquad\qquad J\Phi_R^{S^{n-1}} = \ldots$$

$$\begin{pmatrix}
Id_m & & & & \cdots & 0 \\
& Id_m & & & & \vdots \\
& & 1 & & & \\
& & & a'R' & & \\
\vdots & & & & a' & \\
0 & \cdots & & & & Id_{n-1}
\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}
Id_m & & & & \cdots & 0 \\
& Id_m & & & & \vdots \\
& & 1 & & & \\
& & & Id_n & & \\
\vdots & & & & a' & \\
0 & \cdots & & A & & Id_{n-1}
\end{pmatrix}$$

und für $H \subset (\mathbb{R}^{2m} \times S^1, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times SO(n))$:

$$J\Phi_L^{SO(n)} = \ldots \qquad\qquad J\Phi_R^{SO(n)} = \ldots$$

$$\begin{pmatrix}
Id_m & & & & \cdots & 0 \\
& Id_m & & & & \vdots \\
& & 1 & & & \\
& & & a'R' & & \\
\vdots & & & & a' & \\
0 & \cdots & & & & Id_r
\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}
Id_m & & & & \cdots & 0 \\
& Id_m & & & & \vdots \\
& & 1 & & & \\
& & & Id_n & & \\
\vdots & & & & a' & \\
0 & \cdots & & A & & Id_r
\end{pmatrix},$$

mit $r = (n-1)n/2$. Daraus folgt

$$\det J\Phi_L^{SO(n)} = (a')^{n+1}\ , \quad \det J\Phi_R^{SO(n)} = a'\ ,$$

$$\det J\Phi_L^{S^{n-1}} = (a')^{n+1} \quad \text{und} \quad \det J\Phi_L^{S^{n-1}} = a'$$

und damit auch die Struktur der Haar-Maße.

Um nun zu zeigen, daß $\pi_{s,t}$ quadratintegrierbar ist, muß gezeigt werden: $\pi_{s,t}$ ist irreduzibel und es existiert wenigstens ein zulässiger Vektor. Angenommen $\pi_{s,t}$ ist reduzibel, das heißt es gibt einen abgeschlossenen, echten Unterraum $V \subseteq H^s(\mathbb{R}^m) \otimes_l H^t(\mathbb{R}^n)$ mit $\pi_{s,t}(g)V \subseteq V\ \forall g \in \mathbf{G}^d_{aWH}$. Unter dieser Annahme gibt es nichttriviale Funktionen $h \in V$ und $f \in V^\perp$.

Seien $f, h \in H^s(\mathbb{R}^m) \otimes_l H^t(\mathbb{R}^n)$ und

$$(\Lambda_{s,t} f)^\wedge (k_1, k_2) = (1 + \|k_1\|^2)^{s/2}(1 + \|k_2\|^2)^{t/2} \hat{f}(k_1, k_2) \ ,$$

dann hat man mit $\Lambda_{s,t} f =: F$ und $\Lambda_{s,t} h =: H$

$$\langle \pi_{s,t}(g) f, h \rangle_{H^s(\mathbb{R}^m) \otimes_l H^t} = \langle \pi(g) F, H \rangle_{L_2(\mathbb{R}^{m+n})} = \left\langle \hat{\pi}(g) \hat{F}, \hat{H} \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}^{m+n})} \ .$$

Da

$$\hat{\pi}(g) \hat{F}(\omega, \eta) = a^{n/2} e^{i\varphi} e^{-i(\omega,\eta)(q,b)'} \hat{F}(\omega + p, aR'\eta)$$

folgt zunächst

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{\pi}(g) \hat{F}, \hat{H} \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}^{m+n})} &= a^{n/2} e^{i\varphi} \int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}} e^{-i(\omega,\eta)(q,b)'} \underbrace{\hat{F}(\omega + p, aR'\eta) \bar{\hat{H}}(\omega, \eta)}_{K(\omega,\eta,p,a,R)} d\omega d\eta \\ &= a^{n/2} e^{i\varphi} (2\pi)^{\frac{m+n}{2}} \mathcal{F}\left(K(\cdot, \cdot, p, a, R)\right)(q, b) \end{aligned}$$

und mit $\Omega = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times SO(n)$ folgt weiter

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbf{G}^d_{aWH}} |\langle \pi(p, q, \varphi, b, a, R) F, H \rangle_{L_2}|^2 a^{-(n+1)} dp dq d\varphi db da dm(R) \\ &= (2\pi)^{m+n} \int\limits_{\mathbf{G}^d_{aWH}} |\mathcal{F}\left(K(\cdot, \cdot, p, a, R)\right)(q, b)|^2 a^n a^{-(n+1)} dp dq d\varphi db da dm(R) \\ &= (2\pi)^{m+n+1} \int\limits_{\Omega} |K(\omega, \eta, p, a, R)|^2 a^{-1} d\omega d\eta db da dm(R) \\ &= (2\pi)^{m+n+1} \int\limits_{\Omega} |\hat{H}(\omega, \eta)|^2 |\hat{F}(\omega + p, aR'\eta)|^2 a^{-1} d\omega d\eta db da dm(R) \\ &= (2\pi)^{m+n+1} \int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}} |\hat{H}(\omega, \eta)|^2 \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \times SO(n)} |\hat{F}(\xi, aR'\eta)|^2 a^{-1} d\xi da dm(R)}_{I(\eta)} d\omega d\eta \ . \end{aligned}$$

Die Berechnung von $I(\eta)$ erfolgt analog wie im Beweis von Satz 1.2.1.12 und führt auf

$$I(\eta) = vol(SO(n-1)) \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\hat{F}(\xi, \zeta)|^2}{\|\zeta\|^n} d\zeta d\xi \ .$$

Die obige Gleichungskette setzt sich dann wie folgt fort

$$= \quad (2\pi)^{m+n+1} \cdot vol(SO(n-1)) \cdot \|h\|_{s,t}^2 \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+\|\xi\|^2)^s (1+\|\zeta\|^2)^t \frac{|\hat{f}(\xi,\zeta)|^2}{\|\zeta\|^n} d\zeta d\xi \quad .$$

Nimmt man nun an, $\pi_{s,t}$ ist reduzibel, dann gäbe es Vektoren

$$0 \neq h \in V \subset H^s(\mathbb{R}^m) \otimes_l H^t(\mathbb{R}^n) \text{ und } 0 \neq f \in V^\perp ,$$

so daß

$$0 = \langle \pi(p,q,\varphi,b,a,R)F, H \rangle_{L_2} \quad .$$

Dies wiederum impliziert, daß

$$0 = \|h\|_{s,t}^2 \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+\|\xi\|^2)^s (1+\|\zeta\|^2)^t \frac{|\hat{f}(\xi,\zeta)|^2}{\|\zeta\|^n} d\zeta d\xi$$

gilt, was ein Widerspruch zu $0 \neq f, h$ ist. Verschwindet $\hat{f}$ in einer Umgebung des Ursprungs und setzt man $f = h \neq 0$ so gilt

$$0 < \|f\|_{s,t}^2 \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+\|\xi\|^2)^s (1+\|\zeta\|^2)^t \frac{|\hat{f}(\xi,\zeta)|^2}{\|\zeta\|^n} d\zeta d\xi < \infty ,$$

was die Existenz zulässiger Vektoren absichert. ■

Bemerkung 1.2.3.12 Eine Funktion $f \in H^s(\mathbb{R}^m) \otimes_l H^t(\mathbb{R}^n)$ ist genau dann zulässig bezüglich der Darstellung $\pi_{s,t}$ der Gruppe $\mathbf{G}_{aWH}^d$, wenn das Integral

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+\|\xi\|^2)^s (1+\|\zeta\|^2)^t \frac{|\hat{f}(\xi,\zeta)|^2}{\|\zeta\|^n} d\zeta d\xi$$

existiert.

Definition 1.2.3.13 *Die zu $\mathbf{G}_{aWH}^d$ gehörige Links-Transformation in $H^s(\mathbb{R}^m) \otimes_l H^t(\mathbb{R}^n)$ heißt* **Gabor-Wavelet-Transformation gemischter Glattheit** *und wird mit*

$$\mathcal{GW}_\psi^{\mathrm{mix}} f(q,p,b,a,R,\varphi) = \langle \pi_{s,t}(q,p,b,a,R,\varphi)\psi, f \rangle_{H^s(\mathbb{R}^m)\otimes_l H^t(\mathbb{R}^n)}$$

bezeichnet.

Folgerung 1.2.3.14 *Sei $\psi \in H^s(\mathbb{R}^m) \otimes_l H^t(\mathbb{R}^n)$ zulässig, dann ist der Integraloperator $\mathcal{GW}_\psi^{\mathrm{mix}}$ bis auf eine Konstante $C > 0$ eine Isometrie zwischen $H^s(\mathbb{R}^m) \otimes_l H^t(\mathbb{R}^n)$ und dem Bildbereich des Operators* $\mathrm{range}(\mathcal{GW}_\psi^{\mathrm{mix}}) \subset L_2(\mathbf{G}_{aWH}^d, d\mu_L)$

$$\|\mathcal{GW}_\psi^{\mathrm{mix}} f\|_2^2 = C\|f\|_{s,t}^2 \ .$$

1.2.4 Darstellung in anisotropen Sobolev-Räumen

In diesem Abschnitt sollen in Anlehnung an [ST87, Tri78, Nik75] anisotrope Sobolev-Räume (für $p = 2$) eingeführt und die Möglichkeit der Darstellung der Gruppe $\mathbf{G}^d_{aWH}$ in diesen Räumen näher analysiert werden.

Definition 1.2.4.1 *Sei $\bar{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$. Der Raum*

$$H^{\bar{s}}_A(\mathbb{R}^{m+n}) := \{u \in S'(\mathbb{R}^{m+n}) \ : \ \|u\|_{A,\bar{s}} < \infty\}$$

mit der Norm

$$\|u\|^2_{A,\bar{s}} := \int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}} | \left((1 + \|k_1\|^2)^{s_1/2} + (1 + \|k_2\|^2)^{s_1/2}\right) \mathcal{F}u(k_1, k_2)|^2 dk_1 dk_2$$

heißt **anisotroper Sobolev-Raum**.

Bemerkung 1.2.4.2 Falls $s \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so können diese anisotropen Sobolev-Räume auch durch

$$\|u\|_{W^{\bar{s}}_2(\mathbb{R}^{m+n})} = \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^{m+n})} + \left\| \frac{\partial^{s_1}}{\partial k_1^{s_1}} u \right\|_{L_2(\mathbb{R}^{m+n})} + \left\| \frac{\partial^{s_2}}{\partial k_2^{s_2}} u \right\|_{L_2(\mathbb{R}^{m+n})}$$

normiert werden, vergleiche dazu [Nik75, ST87]. Dies bedeutet, daß die Glattheitordnung direkt mit der Ableitungsordnung identifiziert werden kann.

Ein Spezialfall eines anisotropen Raumes aus [Tri78] hat folgende Struktur:

Definition 1.2.4.3 *Sei $s_1 \in \mathbb{R}$ und $s_2 \in \mathbb{R}$, dann definiert*

$$H^{s_1,s_2}_T(\mathbb{R}^{m+n}) := \{f \in S'(\mathbb{R}^{m+n}) \ : \ \|u\|_{T,\bar{s}} < \infty\}$$

ebenfalls einen anisotropen Sobolev-Raum mit der Norm

$$\|u\|^2_{T,\bar{s}} := \int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}} |(1 + \|(k_1, k_2)\|^2)^{s_1/2}(1 + \|k_1\|^2)^{s_2/2} \mathcal{F}u(k_1, k_2)|^2 dk_1 dk_2 \ .$$

Bemerkung 1.2.4.4 Für $s_2 = 0$ in Definition 1.2.4.3 gilt $H^{s_1} = H^{\bar{s}}_T$.

Der Satz 1.2.4.5 gibt Auskunft darüber, in welchem Verhältnis $H^{\bar{s}}_{mix}$, $H^{\bar{s}}_A$ und $H^{\bar{s}}_T$ stehen.

Satz 1.2.4.5 *Sei $0 \leq s_1 \in \mathbb{R}$, $0 \leq s_2 \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Mit $\bar{s} = (s_1, s_2)$ und $\tilde{s} = (s_1, \max(s_1, s_2))$ gilt dann*

$$H_T^{\bar{s}} \subseteq H_{mix}^{\bar{s}} \ , \quad H_A^{\bar{2} \cdot s} \subseteq H_{mix}^{\bar{s}} \ , \quad H_A^{2\tilde{s}} \subseteq H_T^{\bar{s}}$$

und somit auch

$$H_A^{2\tilde{s}} \subseteq H_T^{\bar{s}} \subseteq H_{mix}^{\bar{s}} \quad .$$

Beweis: Offensichtlich gilt $\|u\|_{\bar{s}}^2 \leq \|u\|_{T,\bar{s}}^2$ und daraus folgt

$$H_T^{\bar{s}} \subseteq H_{mix}^{\bar{s}} \ .$$

Weiter folgt mit $(1 + \|k_1\|^2)^{s_1/2}(1 + \|k_2\|^2)^{s_2/2} \leq (1 + \|k_1\|^2)^{s_1} + (1 + \|k_2\|^2)^{s_2}$, daß $\|u\|_{A,\bar{s}}^2 \leq \|u\|_{T,2\bar{s}}^2$ und somit

$$H_A^{2\bar{s}} \subseteq H_{mix}^{\bar{s}} \ .$$

Für die vorletzte Inklusion hat man $(1+\|(k_1,k_2)\|^2)^{s_1/2}(1+\|k_2\|^2)^{s_2/2}$ abzuschätzen:

$$\begin{aligned}
&(1 + \|(k_1, k_2)\|^2)^{s_1/2}(1 + \|k_2\|^2)^{s_2/2} \\
&\leq \ (1 + \|(k_1, k_2)\|^2)^{s_1} + (1 + \|k_2\|^2)^{s_2} \\
&\leq \ \left(1 + \|k_1\|^2 + 1 + \|k_2\|^2\right)^{s_1} + (1 + \|k_2\|^2)^{s_2} \\
&\leq \ 2^{s_1} \max\left(1 + \|k_1\|^2, 1 + \|k_2\|^2\right)^{s_1} + (1 + \|k_2\|^2)^{s_2} \\
&\leq \ 2^{s_1} \left[(1 + \|k_1\|^2)^{s_1} + (1 + \|k_2\|^2)^{s_1}\right] + (1 + \|k_2\|^2)^{s_2} \\
&\leq \ 2^{s_1}(1 + \|k_1\|^2)^{s_1} + (2^{s_1} + 1)(1 + \|k_2\|^2)^{\max(s_1,s_2)} \\
&\leq \ (2^{s_1} + 1) \left[(1 + \|k_1\|^2)^{s_1} + (1 + \|k_2\|^2)^{\max(s_1,s_2)}\right]
\end{aligned}$$

und mit $\tilde{s} = (s_1, \max(s_1, s_2))$ hat man $\|u\|_{T,\bar{s}}^2 \leq (2^{s_1} + 1)^2 \|u\|_{A,2\tilde{s}}^2$ und somit

$$H_A^{2\tilde{s}} \subseteq H_T^{\bar{s}}$$

und hieraus folgt zusammenfassend die letzte Inklusion

$$H_A^{2\tilde{s}} \subseteq H_T^{\bar{s}} \subseteq H_{mix}^{\bar{s}} \ .$$

■

Um die Darstellungen zu formulieren, sei

$$\begin{aligned}
(\Lambda_{A,\bar{s}}f)^\wedge(k_1, k_1) \ &:= \ \left[(1 + \|k_1\|^2)^{s_1/2} + (1 + \|k_2\|^2)^{s_2/2)}\right] \hat{f}(k_1, k_1) \text{ und} \\
(\Lambda_{T,\bar{s}}f)^\wedge(k_1, k_1) \ &:= \ \left[(1 + \|k_1\|^2)^{s_1/2}(1 + \|(k_1, k_2)\|^2)^{s_2/2)}\right] \hat{f}(k_1, k_1) \ .
\end{aligned}$$

Die zu betrachtenden Darstellungen sind demzufolge durch

$$\begin{aligned}
\pi_{A,\bar{s}}(g, h)f(x_1, x_2) \ &:= \ \Lambda_{A,-\bar{s}}\pi(g, h)\Lambda_{A,\bar{s}}f(x_1, x_2) \\
\pi_{T,\bar{s}}(g, h)f(x_1, x_2) \ &:= \ \Lambda_{T,-\bar{s}}\pi(g, h)\Lambda_{T,\bar{s}}f(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

gegeben.

Satz 1.2.4.6 *Sei* $\mathbf{G}^d_{aWH}$ *die zugrundeliegende Gruppe und bezeichne* $\diamond$ *wahlweise* A *oder* T. *Die Darstellung* $\pi_{\diamond,\bar{s}}$ *im* $H^{\bar{s}}_{\diamond}(\mathbb{R}^{m+n})$ *ist homomorph, stetig, unitär und quadratintergrierbar. Ein Vektor* $0 \neq f \in H^{\bar{s}}_{\diamond}(\mathbb{R}^{m+n})$ *ist zulässig bezüglich der Darstellung* $\pi_{\diamond,\bar{s}}$ *genau dann, wenn*

$$0 < (2\pi)^{m+n+1} vol(SO(n-1)) \|f\|^2_{\diamond,\bar{s}} \int_{\mathbb{R}^{m+n}} \frac{|(\Lambda_{\diamond,\bar{s}} f)^\wedge(k_1,k_2)|^2}{\|k_2\|^n} d^m k_1 d^n k_2 < \infty$$

gilt.

Beweis: Der Beweis verläuft analog wie der Beweis des Satzes 1.2.3.11. Man hat die Definition von F und H jeweils durch $F_\diamond = \Lambda_{\diamond,\bar{s}} f$ und $H_\diamond = \Lambda_{\diamond,\bar{s}} h$ zu ersetzen. Bei der Konstruktion der Darstellung ist darauf zu achten, daß $\Lambda_{A,-\bar{s}} = \Lambda^{-1}_{A,\bar{s}}$ gilt.■

Definition 1.2.4.7 *Die zu* $\mathbf{G}^d_{aWH}$ *gehörigen Links-Transformationen in* $H^{\bar{s}}_{\diamond}(\mathbb{R}^{m+n})$ *heissen* **anisotrope Gabor-Wavelet-Transformationen** *und werden mit*

$$\mathcal{GW}^{\diamond}_{\psi} f(q,p,b,a,R,\varphi) = \langle \pi_{\diamond,\bar{s}}(q,p,b,a,R,\varphi)\psi, f\rangle_{\diamond,\bar{s}}$$

bezeichnet.

Folgerung 1.2.4.8 *Sei* $\psi \in H^{\bar{s}}_{\diamond}(\mathbb{R}^{m+n})$ *zulässig, dann sind die Integraloperatoren* $\mathcal{GW}^{\diamond}_{\psi}$ *bis auf eine Konstante* $C_\diamond > 0$ *eine Isometrie zwischen* $H^{\bar{s}}_{\diamond}(\mathbb{R}^{m+n})$ *und dem Bildbereich der Operatoren* $\mathrm{range}(\mathcal{GW}^{\diamond}_{\psi}) \subset L_2(\mathbf{G}^d_{aWH}, d\mu_L)$

$$\|\mathcal{GW}^{\diamond}_{\psi} f\|^2_2 = C_\diamond \|f\|^2_{\diamond,\bar{s}} \ .$$

Bemerkung 1.2.4.9 Die in den Sätzen 1.2.3.11 und 1.2.4.6 formulierten Zulässigkeiten simmen mit der in Definition 1.1.1.35 eingeführten *strikten* Zulässigkeit überein. Der Operator $\mathcal{A}$ gemäß Definition 1.1.1.33 war

$$\mathcal{A}f(\cdot) = \int_{\mathbf{G}^d_{aWH}} \langle f, \pi(g)\psi\rangle\, \pi(g)\psi(\cdot) d\mu_L(g).$$

Bezeichne $\diamond$ wahlweise mix, A oder T, sei Id die identische Abbildung und $\psi \in H^{\bar{s}}_{\diamond}(\mathbb{R}^{m+n})$ zulässig, dann ist mit $C = (2\pi)^{m+n+1} vol(SO(n-1))$ der Operator $\mathcal{A}$ durch

$$\mathcal{A} = Id \cdot C \int_{\mathbb{R}^{m+n}} \frac{|(\Lambda_{\diamond,\bar{s}}\psi)^\wedge(k_1,k_2)|^2}{\|k_2\|^n} d^m k_1 d^n k_2$$

gegeben.

Bemerkung 1.2.4.10 Der Operator C nach Satz 1.1.1.28 läßt sich über die Fourier-Transformierte ableiten. Für $\psi \in H^{\bar{s}}_{\diamond}$ hat man

$$(C^{1/2}\psi)^\wedge(\eta,\omega) = \hat{\psi}(\eta,\cdot)(\omega)\|\omega\|^{-n/2}.$$

Um $C^{1/2}$ explizit anzugeben, kann man zumindest für den Fall $n = 1$ den Faltungssatz bezüglich der zweiten Komponente anwenden

$$(C^{1/2}\psi)^\wedge(\eta,\omega) = \hat{\psi}(\eta,\cdot)(\omega)\hat{P}(\omega)$$

mit $P(y) = |x|^{-1/2}/(2\sqrt{2\pi})$. Es ergibt sich für $C^{1/2}$ und $n = 1$ eine Faltung in der zweiten Komponente

$$C^{1/2}\psi(x,y) = P *_2 \psi(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^n} P(y-z)\psi(x,z)d^m x d^n z.$$

Eine allgemeinere und eher formale Deutung des Operators $C^{1/2}$ erhält man, falls man $\mathcal{F}(-\Delta f)(\omega) = \|\omega\|_2^2\hat{f}(\omega)$ benutzt

$$C^{1/2} = (-\Delta)^{-n/4}.$$

1.2.5 Semidirekte affine Weyl-Heisenberg Gruppe $\mathbf{G}_{aWH}$

Die in diesem Abschnitt beschriebene Gruppenkonstruktion führt über das *semidirekte Produkt* von $\mathbf{G}_{WH}$ mit $\mathbf{G}_{aff}$. Ausgangspunkt ist die Gruppe, die durch Translation, Modulation, Dilatation und Rotation im $\mathbb{R}^n$ generiert wird. Diese Gruppe wurde in [Tor92, Tor94, AM92, KT93, Tor91, TAGM95] analysiert. Es wurden irreduzible Darstellungen konstruiert und quadratintegrierbare Darstellungen im $L_2(\mathbb{R}^n)$ vorgeschlagen. Der Schlüssel in der Konstruktion quadratintegrierbarer Darstellungen π liegt in der Einschränkung der Gruppenparameter, das heißt in der Auswahl geeigneter Quotienten-Räume.
Es wird eine der möglichen L_2-Darstellungen von $\mathbf{G}_{aWH}$ ausgewählt und zu einer H^s-Darstellung modifiziert. Die Berechnung der Zulässigkeitsbedingungen wird erst bei der Konstrukion der Unschärfen durchgeführt werden, da die notwendigen Einbettungsabbildungen β nicht eindeutig bestimmt sind und somit keine allgemeingültigen Bedingungen existieren.

Definition 1.2.5.1 *Die Gruppe mit dem generierenden Element*

$$g = (q,p,a,R,\varphi)$$

mit $q,p \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $R \in SO(n)$ *und der Gruppenoperation*

$$(q,p,a,R,\varphi)\circ(q',p',a',R',\varphi') = (q + aRq', p + a^{-1}Rp', aa', RR', \varphi + \varphi' + p(aRq'))$$

wird **semidirekte affine Weyl-Heisenberg Gruppe** *genannt und mit* $\mathbf{G}_{aWH}$ *bezeichnet.*

Das rechtsinverse Element von $g \in \mathbf{G}_{aWH}$ ist

$$(q,p,a,R,\varphi)_R^{-1} = (-a^{-1}R^{-1}q, -aR^{-1}p, a^{-1}, -\varphi + pq).$$

Die affine Weyl-Heisenberg Gruppe ist topologisch isomorph zu

$$\mathbf{G}_{aWH} \cong \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}_+ \times SO(n).$$

Bemerkung 1.2.5.2 Die Gruppe $\mathbf{G}_{aWH}$ ist das semidirekte Produkt der Gruppe $\mathbf{G}_{WH}$ und $\mathbb{R}_+ \times SO(n)$.

Satz 1.2.5.3 *Die Gruppe $\mathbf{G}_{aWH}$ ist unimodular, das heißt linkes und rechtes Haar-Maß stimmen überein*

$$d\mu(q,p,a,R,\varphi) = dqdp\frac{da}{a}dm(R)d\varphi \ ,$$

wobei $dm(R)$ wiederum das invariante Maß auf $SO(n)$ bezeichnet.

Beweis: Die Maße müssen folgender Gleichung genügen:

$$\mu_L(g \circ H) = \mu_L(H) = \mu_R(H) = \mu_R(H \circ g).$$

Sei $\Omega := \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}_+^* \times SO(n) \supset H$. Linkes und Rechtes Haar-Maß werden separat berechnet. Für eine nichtnegative Gewichtsfunktion γ, die nach dem *Satz von Haar* angesetzt werden kann, wird folgender Ansatz gemacht

$$\mu_L(H) = \int_H \gamma(q,p,R,a,\varphi)dq\ dp\ dm(R)\ da\ d\varphi$$

und man erhält

$$\begin{aligned} \mu_L(g \circ H) &= \int_{g \circ H} \gamma(q,p,R,a,\varphi)dq\ dp\ dm(R)\ da\ d\varphi \\ &= \int_{\Phi(H)} \gamma(q,p,R,a,\varphi)dq\ dp\ dm(R)\ da\ d\varphi \quad , \end{aligned}$$

hierbei ist die Transformation $\Phi_L : \Omega \to \Omega$ definiert durch

$$\begin{aligned} \Phi_L(q,p,a,R,\varphi) &= (q',p',a',R',\varphi') \circ (q,p,a,R,\varphi) \\ &= (q' + a'R'q, p' + a'^{-1}R'p, a'a, R'R, \varphi' + \varphi + p'(a'R'q)). \end{aligned}$$

Wie bei der Berechnung der Maße von $\mathbf{G}_{aff}$ bzw. $\mathbf{G}_{aWH}^d$ liefert hier der Transformationssatz

$$\begin{aligned} \mu_L(g \circ H) &= \int_H \gamma(\Phi(q,p,a,R,\varphi))|detJ\Phi_L(q,p,a,R,\varphi)|dq\ dp\ dm(R)\ da\ d\varphi \\ &= \int_H \gamma(\Phi_L(q,p,a,R,\varphi))a'dq\ dp\ dm(R)\ da\ d\varphi \\ &\overset{!}{=} \int_H \gamma(q,p,a,R,\varphi)dq\ dp\ dm(R)\ da\ d\varphi \\ &= \mu_L(H) \end{aligned}$$

d.h. $\gamma(\Phi_L(q,p,a,R,\varphi))a' \overset{!}{=} \gamma(q,p,a,R,\varphi)$. Als eine mögliche Funktion kann man $\gamma(q,p,a,R,\varphi) = a^{-1}$ wählen. Somit folgt

$$d\mu_L(q,p,a,R,\varphi) = \gamma(q,p,a,R,\varphi)dq\ dp\ dm(R)\ da\ d\varphi = a^{-1}dq\ dp\ dm(R)\ da\ d\varphi.$$

Analog ist ist Rechnung für

$$\begin{aligned}\Phi_R(q,p,a,R,\varphi) &= (q,p,a,R,\varphi)\circ(q',p',a',R',\varphi') \\ &= (q+aRq', p+a^{-1}Rp', aa', RR', \varphi+\varphi'+p(aRq')).\end{aligned}$$

Es ergibt sich ebenfalls $\gamma(\Phi_R(q,p,a,R,\varphi))a' \stackrel{!}{=} \gamma(q,p,a,R,\varphi)$ und somit die Unimodularität. ■

1.2.6 Darstellung in Sobolev-Räumen

Gesucht sind nun quadratintegrierbare Darstellungen der Gruppe $\mathbf{G}_{aWH}$. Da nun anders als im Fall der direkten affinen Weyl-Heisenberg Gruppe $\mathbf{G}^d_{aWH}$ eine semidirekte Gruppe vorliegt, die kein komponentenweises Agieren fordert, soll es genügen, Darstellungen im klassischen H^s zu untersuchen. Prinzipiell sind die Tensor-Produkt- und anisotropen Sobolev-Räume ebenfalls als Darstellungsraum möglich. Es sind dann die entsprechenden Glattheitsmodule $\Lambda_{\diamond,\bar{s}}$ anzusetzen.

Mit der Methode der koadjungierten Orbits werden in [KT93] irreduzible Darstellungen in L_2 konstruiert und klassifiziert. Das folgende Lemma faßt die Ergebnisse aus [KT93] des eindimensionalen Falles zusammen.

Lemma 1.2.6.1 *Die irreduziblen Darstellungen im $L_2(\mathbb{R})$ der eindimensionalen semidirekten affine Weyl-Heisenberg Gruppe $\mathbf{G}_{aWH}$ lassen sich in drei Klassen unterteilen*

i) Degenerierte Darstellungen: Charaktere von $\mathbf{G}_{aWH}$,

ii) Affin-artige Darstellungen:

$$\pi(q,p,a,\varphi)f(x) = \sqrt{a}e^{i(xq+\mu p/x)}f(ax) ,$$

iii) Stone-von-Neumann-artige Darstellungen:

$$\pi(q,p,a,\varphi)f(x) = \sqrt{a}e^{i(\lambda^*\log(a)+t^*(\varphi+xq))}f(a(x+p)).$$

Beweisidee: Die vollständige n-dimensionale Herleitung kann in [KT93] eingesehen werden. Hier soll nur die Konstruktionsidee der koadjungierten Orbits skizziert und für den eindimensionalen Fall die Stone-von-Neumann Darstellung prinzipiell hergeleitet werden.
Ziel ist es zunächst, die adjungierte Aktion von $\mathbf{G}_{aWH}$ auf der zugehören Lie-Algebra $\mathcal{G}_{aWH}$ zu konstruieren. Dazu kann man die Elemente von $\mathbf{G}_{aWH}$ als Matrizen auffassen

$$g = \begin{pmatrix} 1 & (aR'q)' & \varphi \\ 0 & aR & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

wobei die Gruppenoperation durch Matrixmultiplikation abgesichert wird. Die Lie-Algebra $\mathcal{G}_{aWH}$ wird ebenfalls als Lie-Algebra von Matrizen aufgefaßt

$$\mathcal{G}_{aWH} \cong \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \zeta' & t \\ 0 & r^\lambda & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \zeta, x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, r \in so(n) \right\}.$$

Jedes Element $X \in \mathcal{G}_{aWH}$ kann dann in der Form

$$X = x^i \cdot Q_i + \zeta^i \cdot P_i + \lambda K + R_i^j \cdot J_j^i + tT$$

dargestellt werden, wobei $\lambda, t \in \mathbb{R}$, $x, \zeta \in \mathbb{R}^n$, R_i^j sind die Koeffizienten von $r \in so(n)$. Der Zusammenhang zwischen den Matrizen von $\mathbf{G}_{aWH}$ und $\mathcal{G}_{aWH}$ ist durch die exp - Abbildung gegeben.
Es soll sich jetzt auf eindimensionale Parameter beschränkt werden. Begonnen wird mit der Berechnung der *adjungierten Aktion* von $\mathbf{G}_{aWH}$ in $\mathcal{G}_{aWH}$. Seien $g = (q, p, a, \varphi) \in \mathbf{G}_{aWH}$ und (x, ζ, λ, t) die Koordinaten eines Elementes $X \in \mathcal{G}_{aWH}$ zur Basis $\{Q, P, K, T\}$. Mit

$$Ad(g)X = gXg^{-1} = (ax - \lambda q, a^{-1}\zeta + \lambda p, \lambda, t + apx - a^{-1}q\zeta - pq\lambda)$$

folgt die adjungierte Aktion

$$Ad(g) = \begin{pmatrix} a & 0 & -q & 0 \\ 0 & a^{-1} & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ap & -a^{-1}q & -pq & 1 \end{pmatrix}$$

und bezüglich der Basis $\{Q^*, P^*, K^*, T^*\}$ berechnet man die koadjungierte Aktion

$$Ad^*(g) = Ad'(g^{-1}) \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 & -p \\ 0 & a & 0 & q \\ a^{-1}q & -ap & 1 & -pq \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ein Funktional $F \in \mathcal{G}^*_{aWH}$ hat die Darstellung

$$F = x_0^* Q^* + \zeta_0^* P^* + \lambda_0^* K^* + t_0^* T^*.$$

Zusammen mit der koadjungierten Abbildung folgt der koadjungierte Orbit

$$\begin{cases} x_0^* \to x^* = a^{-1}x_0^* - pt_0^* \\ \zeta_0^* \to \zeta^* = a\zeta_0^* + qt_0^* \\ \lambda_0^* \to \lambda^* = a^{-1}qx_0^* - ap\zeta_0^* + \lambda_0^* - pqt_0^* \\ t_0^* \to t^* = t_0^* \end{cases}.$$

Es soll nur der Stone-von-Neumann Typ näher betrachtet werden. Diese Orbits sind durch $t^* \neq 0$ beschrieben. In diesem Fall lassen sich zu jedem Startwert x_0^*, ζ_0^* Werte q, p und a finden, so daß $x^* = \zeta^* = 0$ gilt, so daß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_0^* = \zeta_0^* = 0$ wählen kann und man hat somit

$$\begin{cases} x^* = -pt_0^* \\ \zeta^* = qt_0^* \\ \lambda^* = \lambda_0^* + \frac{x^*\zeta^*}{t^*} \\ t^* = t_0^* \end{cases}.$$

Diese Orbits sind somit durch $t^*, \lambda^* \in \mathbb{R}$ charakterisiert. Für den koadjungierten Orbit gilt $O_F \cong \mathbf{G}_{aWH}/G_F$, wobei G_F der Stabilisator von F bezüglich $\mathbf{G}_{aWH}$ ist

$$G_F = \{g \in \mathbf{G}_{aWH} : Ad^*(g)F = F\} \quad \text{und} \quad F = t^*T^* + \lambda^*K^* \ .$$

Die koadjungierte Abbildung $Ad^*(g)$ agiert nun wie folgt

$$\begin{aligned} Ad^*(g)F &= -pt^*T^* + qt^*T^* + \lambda^*K^* - pqt^*T^* \\ &= (q - p - pq + 1)t^*T^* + \lambda^*K^* \ . \end{aligned}$$

Um die Invarianz absichern muß $p = q = 0$ gelten und daraus folgt

$$G_F = \{(0, 0, a, \varphi) : \quad a \in \mathbb{R}_+, \varphi \in \mathbb{R}\} \ .$$

Jetzt benutzt man das folgende Lemma.

Lemma 1.2.6.2 *Falls H eine Polarisierung in $\mathcal{G}_{aWH}$ ist und die Pukanzky Bedingung*

$$Ad^*(\exp(H))F = F + H^\perp$$

erfüllt, dann sind die durch die Charaktere von $\mathbf{H}$ bezüglich F induzierten Darstellungen π irreduzibel. Die Charaktere haben die Form $\chi_F(h) = e^{i\langle F,X\rangle}$, mit $h = \exp(X) \in \mathbf{H} = \exp(H)$.

Eine Polarisierung bezüglich F ist durch

$$H = \mathbb{R} \cdot Q + \mathbb{R} \cdot K + \mathbb{R} \cdot T$$

gegeben. Sei $X = (x, 0, \lambda, t) = xQ + \lambda K + tT \in H \subset \mathcal{G}_{aWH}$, so kann man die zugehörigen Gruppenelemente mit $\exp(X) = (x(e^\lambda - 1)/\lambda, 0, e^\lambda, t)' \in \mathbf{H}$ identifizieren. Um die Pukanzky Bedingung zu testen, benötigt man

$$Ad^*(exp(X)) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} & 0 & x(e^\lambda - 1)/\lambda \\ e^{-\lambda}x(e^\lambda - 1)/\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und notiert man $F = (0, 0, \lambda^*, t^*)'$, so hat man

$$Ad^*(\exp(H))F = \begin{pmatrix} 0 \\ t^*x(e^\lambda - 1)/\lambda \\ \lambda^* \\ t^* \end{pmatrix} = F + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t^*x(e^\lambda - 1)/\lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in H^\perp}$$

und F definiert die folgenden Charaktere χ_F von $\mathbf{H}$ wie folgt $\chi_F(q, 0, a, \varphi) = e^{i(\lambda^* \log(a) + t^*\varphi)}$. Sei nun $(q, 0, a, \varphi) = h \in \mathbf{H}$, $(0, x, 1, 0) = g_h \in \mathbf{H} \setminus \mathbf{G}_{aWH}$ und $(q, p, a, \varphi) = g \in \mathbf{G}_{aWH}$, dann gilt

$$(0, x, 1, 0) \circ (q, p, a, \varphi) = (q, x + p, a, \varphi + xq) = (q, 0, a, \varphi + xq) \circ (0, 0, a(x + p), 0)$$

und mit $f(h \circ g) = \chi_F(h) f(g)$ hat man letztendlich

$$\begin{aligned}
\pi(g)f(x) &= \chi_F(q,0,a,\varphi + xq) f(a(x+p)) \\
&= e^{\langle (0,0,\lambda^*,t^*),(\cdot,\cdot,\log(a),\varphi+xq)\rangle} f(a(x+p)) \\
&= e^{i(\lambda^* \log(a) + t^*(\varphi+xq))} f(a(x+p))
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 1.2.6.3 Das Lemma 1.2.6.1 zeigt, daß man zwischen Wavelet-Analysis und Gabor-Analysis interpoliert.

Theorem 1.2.6.4 *Die Darstellungen aus Satz 1.2.6.1 der eindimensionalen affinen Weyl-Heisenberg Gruppe $\mathbf{G}_{aWH}$ sind nicht quadratintegrierbar.*

Beweis: Dies ist leicht nachzurechnen und kann in [KT93] eingesehen werden. ■

Eine Konsequenz des Theorems ist es, daß die Konstruktion zulässiger Wavelets nicht auf dem gesamten Parameterbereich der Gruppe $\mathbf{G}_{aWH}$ sondern auf Quotienten-Räumen stattfinden muß.

Der allgemeine Fall $n \geq 2$ ist wesentlich aufwendiger, da aufgrund der $SO(n)$ - Gruppe die Methode der koadjungierten Orbits nicht direkt angewandt werden kann. Die Orbitstruktur ist komplexer, fällt aber wieder in die drei wesentlichen Klassen, degenerierte, affin-artige und Stone-von-Neumann-artige Orbits, auseinander. Die degenerierten Orbits sind $SO(n)$-Orbits und fallen nicht in die Kategorie der Zeit-Frequenz-Analyse und sollen deshalb nicht näher untersucht werden. Von den affin-artigen Orbits soll hier ebenfalls abgesehen werden. Die interessanteste Darstellung aus Sicht der Interpolation zwischen Gabor- und Wavelet-Analysis ist die Stone-von-Neumann Darstellung. Da λ^* im Kontext der Zeit-Frequenz-Analyse als nicht relevant scheint, soll $\lambda^* = 0$ gewählt werden. Ohne weitere Einschränkung kann man $t^* = 1$ wählen.

Lemma 1.2.6.5 *Sei $\mathbf{G}_{aWH}$ die zugrundeliegende Gruppe, dann ist eine resultierende Stone-Von-Neumann Darstellung im $L_2(\mathbb{R}^n)$ durch*

$$\pi(q,p,a,R,0))f(x) = a^{-n/2} e^{ip(x-q)} f\left(R' \frac{x-q}{a}\right)$$

gegeben. Diese Darstellung π ist nicht quadratintegrierbar.

Folgerung 1.2.6.6 *Nach Definition 1.1.2.3 ist eine äquivalente Stone-Von-Neumann Darstellung von $\mathbf{G}_{aWH}$ in $H^s(\mathbb{R}^n)$ durch*

$$\hat{\pi}_s(g)\hat{f}(\omega) = a^{n/2}(1+\|\omega\|^2)^{-s/2} e^{-i\omega q}(1+\|aR'(\omega-p)\|^2)^{s/2} \hat{f}(aR'(\omega-p))$$

gegeben.

Bemerkung 1.2.6.7 Nach Satz 1.1.2.4 reicht es, die Quadratintegrierbarkeit bezüglich π zu abzusichern, um die Quadratintegrierbarkeit bezüglich π_s zu erhalten. Dies mindert den technischen Aufwand. Die modifizierten Zulässigkeitsbedingungen sind dann leicht zu errechnen. Der kommende Abschnitt beinhaltet entsprechende Faktorisierungen von $\mathbf{G}_{aWH}$, die entsprechende Zulässigkeiten nach Definition 1.1.1.35 gewährleisten.

1.2.7 Quadratintegrierbarkeit modulo einer Untergruppe

Um zu Faktorisierungen überzugehen, ist notwendig, die Darstellung anzupassen.

Definition 1.2.7.1 *Sei Γ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbf{G}_{aWH}$ und sei $X = \mathbf{G}_{aWH}/\Gamma$ ein homogener Raum. Die Abbildung*

$$\Pi : \mathbf{G}_{aWH} \to X$$

wird Faserbündel genannt. Sei σ ein Borel-Schnitt dieses Faserbündels, $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum und $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ die Gruppe unitärer Abbildungen, dann bezeichnet man mit

$$\pi_\sigma : X \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

die Restriktion von π auf den homogenen Raum X mit

$$\pi_\sigma = \pi \circ \sigma \ .$$

Die folgenden Untergruppen von $\mathbf{G}_{aWH}$ sollen Ausgangspunkt bei der Suche nach zulässigen oder strikt zulässigen Schnitten σ sein

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &:= \{(0,0,a,1,\varphi) \in \mathbf{G}_{aWH}\} \\ \Gamma_2 &:= \{(0,p,1,1,\varphi) \in \mathbf{G}_{aWH}\} \\ \Gamma_3 &:= \{(0,0,a,R,\varphi) \in \mathbf{G}_{aWH}\} \ . \end{aligned}$$

Satz 1.2.7.2 *Seien folgende homogene Räume $X_1 = \mathbf{G}_{aWH}/\Gamma_1$, $X_2 = \Gamma_2 \setminus \mathbf{G}_{aWH}$ und $X_3 = \mathbf{G}_{aWH}/\Gamma_3$ gegeben. Seien weiter $\beta_1 : X_1 \to \Gamma_1$, $\beta_2 : X_2 \to \Gamma_2$ und $\beta_3 : X_3 \to \mathbb{R}_+$, $\rho_3 : X_3 \to SO(n)$ stückweise differenzierbare Abbildungen, dann existieren strikt zulässige Schnitte*

$$\begin{aligned} \sigma_1(q,p,R) &= (q,p,\beta_1(q,p,R),R,0) \ , \\ \sigma_2(q,a,R) &= (q,\beta_2(q,a,R),a,R,0) \ , \\ \sigma_3(q,p) &= (q,p,\beta_3(p),\rho_3(p),0) \ . \end{aligned}$$

Die zugehörigen Darstellungen $\pi_{\sigma_1} : X_1 \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$, $\pi_{\sigma_2} : X_2 \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$, $\pi_{\sigma_3} : X_3 \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \pi_{\sigma_1}\psi(x) &= |\beta_1(q,p,R)|^{-n/2} e^{ip(x-q)} \psi\left(\beta_1(q,p,R)^{-1} R'(x-q)\right) \ , \\ \pi_{\sigma_2}\psi(x) &= a^{-n/2} e^{i\beta_2(q,a,R)(x-q)} \psi\left(a^{-1} R'(x-q)\right) \ , \\ \pi_{\sigma_3}\psi(x) &= \beta_3(p)^{-n/2} e^{ip(x-q)} \psi\left(\beta_3(p)^{-1} \rho_3(p)'(x-q)\right) . \end{aligned}$$

Beweis: Ein konstruktiver Existenzbeweis befindet sich in [KT93] ■

Bemerkung 1.2.7.3 Aufgrund der Mehrdeutigkeit der Einbettungsfunktionen β und ρ existieren keine allgemeingültigen Zulässigkeitsbedingungen an die Funktion ψ. Die Berechnung von entsprechenden Bedingung wird deshalb verschoben, bis konkrete Forderung bei der Lösung von Unschärferelationen benötigt werden. Es wird sich zeigen, daß die Freiheitsgrade bei der Forderung nach Zulässigkeit geringer sind als bei strikter Zulässigkeit. Die strikte Zulässigkeit liefert jedoch "gut" berechenbare Bedingungen, wogegen die Beschreibung des Operators $\mathcal{A}$ wesentlich schwieriger sein wird.

Definition 1.2.7.4 *Sei* $\mathbf{G}_{aWH}$ *die zugrundeliegende Gruppe und* X *ein homogener Raum. Seien die Einbettungen in* $\mathbf{G}_{aWH}$ *derart, daß der Schnitt* σ *strikt zulässig ist. Die zu* X *gehörige Transformation in* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *heißt* **Gabor-Wavelet-Transformation** *und wird mit*

$$\mathcal{GW}_\psi f(q,p,a,R,\varphi) = \langle \pi_{\sigma,s}\psi, f\rangle_s$$

bezeichnet.

Kapitel 2

Unschärfen und Waveletkonstruktion

In diesem Kapitel sollen zu den in Kapitel 1.2 konstruierten Darstellungen Wavelets gefunden werden, die kanonische Kandidaten der entsprechenden Darstellungen sind. Kanonisch soll in diesem Fall heißen, sie minimieren eine zur Darstellung gehörende Unschärferelationen.
Dazu wird das klassische Konstruktionsprinzip einer Unschärferelation als Ausgangspunkt dienen. Im allgemeinen existieren zu einer Darstellung mehrere Unschärferelationen. Ideal wäre der Fall, man fände ein Wavelet, das simultan alle Relationen minimieren würde. Dies ist im allgemeinen jedoch nicht möglich.
Deshalb werden zwei Ansätze verfolgt, die mehr als eine Relation einbeziehen. Eine Möglichkeit findet eine Interpretation über die Einbettungsfunktion β. Die andere beruht auf die Definition von Unschärfefunktionalen.

Bei der Berechnung und Konstruktion von Unschärferelationen wird sich auf die Darstellungen der Gruppen $\mathbf{G}_{WH}$, $\mathbf{G}_{aff}$, $\mathbf{G}_{aWH}$ in $H^s(\mathbb{R}^n)$ und $\mathbf{G}^d_{aWH}$ in $H^{\bar{s}}_\diamond(\mathbb{R}^{m+n})$ bezogen. Im Fall der semidirekten Weyl-Heisenberg Gruppe soll nur die Stone-von-Neumann Darstellung betrachtet werden. Insgesamt sind somit die Darstellungen

$$\begin{aligned}
\pi_{s,\sigma_1} &: \mathbf{G}_{aWH}/\Gamma_1 \to \mathcal{U}\left(H^s(\mathbb{R}^n)\right) \\
\pi_{s,\sigma_2} &: \Gamma_2 \setminus \mathbf{G}_{aWH} \to \mathcal{U}\left(H^s(\mathbb{R}^n)\right) \\
\pi_{s,\sigma_3} &: \mathbf{G}_{aWH}/\Gamma_3 \to \mathcal{U}\left(H^s(\mathbb{R}^n)\right) \\
\pi_{\diamond,\bar{s}} &: \mathbf{G}^d_{aWH} \to \mathcal{U}\left(H^{\bar{s}}_\diamond(\mathbb{R}^{m+n})\right)
\end{aligned}$$

zu analysieren.

2.1 Klassische Unschärfekonstruktion

Bevor die Unschärferelationen konstruiert werden, soll der Zusammenhang zwischen Gruppe, Lie-Algebra und infinitesimalen Operatoren dargestellt werden.

2.1.1 Darstellung einer Lie-Algebra

Zu den eingeführten Gruppen wurden Darstellungen π in den Hilbert-Raum H^s entwickelt. Zu diesen Darstellungen gehören Darstellungen π der zugehörigen Lie-Algebra $\mathcal{G}$.

Definition 2.1.1.1 *Sei $X \in \mathcal{G}$ und korrespondiere zu diesem X eine einparametrige Untergruppe $g(t)$, dann werden die Differentiale der Abbildung π*

$$\pi(X) = \frac{d\pi(g(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{\pi(g(t)) - Id}{t}$$

infinitesimale Operatoren *der Darstellung π von G genannt.*

Bemerkung 2.1.1.2 Die Dimension von G und $\mathcal{G}$ ist gleich und entspricht der Anzahl der Gruppenparameter. Sei die Dimension r, dann ist es ausreichend r infinitesimale Operatoren $\pi(X_1), \dots, \pi(X_r)$ zu kennen.

Definition 2.1.1.3 *Mit der Dimension des Darstellungsraumes $\mathcal{H}$ identifizert man die* **Dimension der zugehörigen Darstellung** *π.*

Bemerkung 2.1.1.4 Die Darstellungen π der Gruppen $\mathbf{G}_{aWH}$ und $\mathbf{G}^d_{aWH}$ sind unendlichdimensional. Für diesen Fall kann der Grenzwert aus Definition 2.1.1.1 nicht für alle $x \in \mathcal{H}$ existieren, [VK91]. Aber er existert für $x \in \mathcal{H}_0$, dem sogenannten Gärding Unterraum $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$. Für $X \in \mathcal{G}$ ist $\mathcal{H}_0$ unter $\pi(X)$ invariant. Man kann nun zeigen, daß $\mathcal{H}_0$ in $\mathcal{H}$ überall dicht ist, [VK91].

Definition 2.1.1.5 *Sei $g \in \mathbf{G}$, e das Einheitselement und die Dimension von $\mathbf{G}$ sei r, dann werden mit*

$$A_i := \frac{\partial\pi(g_1, \dots, g_r)}{\partial g_i}\Big|_{g=e} \quad f\ddot{u}r \quad i = 1, \dots, r$$

die infinitesimalen Operatoren bezüglich $\mathcal{G}$ bezeichnet.

Bemerkung 2.1.1.6 Aus physikalischer Sicht repräsentieren die Operatoren A_i Beobachtungen im Zustands-Raum $\mathcal{H}$, von dem angenommen wird, daß er ein Hilbert-Raum ist. Nach dem Satz von Hellinger-Toeplitz, [Häu92], ist jeder symmetrische Operator A eines Hilbert-Raumes stetig. Um die Bemerkung 2.1.1.4 praktisch zu motivieren, sei angemerkt, daß die Grundoperatoren der Quantenmechanik im allgemeinen nun zwar symmetrisch, aber unstetig sind. Sie sind also nicht auf dem gesamten Hilbert-Raum definiert. Ohne Kenntnis von Bemerkung 2.1.1.4 hat man wegen der Selbstadjungiertheit der quantenmechanischen Operatoren immer noch den folgenden Dichtheitsschluß.

Satz 2.1.1.7 *Ein selbstadjungierter Operator A ist immer dicht definiert, symmetrisch und abgeschlossen. Stetig braucht er jedoch nicht zu sein.*

Beweis: Der Beweis befindet sich in [Häu92]. ■

Bemerkung 2.1.1.8 In der Quantenmechanik werden selbstadjungierte Operatoren bevorzugt, um reellwertige Unschärfen zu erhalten. Der klassiche Hilbert-Raum L_2 ist nicht die einzige Möglichkeit. Man kann ebensogut den Schwartz-Raum $\mathcal{S}$ wählen. Bei vielen Anwendungen ist er jedoch zu klein, sein Dual-Raum $\mathcal{S}'$, der Raum der temperierten Distributionen, ist wesentlich reichhaltiger. Um diese Fälle nicht auszugrenzen, wurden die Gruppendarstellungen in H^s konstruiert.

2.1.2 Konstruktionsansatz

Definition 2.1.2.1 *Sei A ein Operator auf $\mathcal{D}(A)$. Der* **Erwartungswert** *von A zu einem Zustand $\psi \in \mathcal{D}(A)$ ist definiert durch*

$$\mu_\psi(A) := \frac{\langle A\psi, \psi\rangle}{\|\psi\|}.$$

Die **Varianz** *von A zu einem Zustand $\psi \in \mathcal{D}(A)$ ist definiert durch*

$$\Delta_\psi^2(A) = \mu_\psi\left((A - \mu_\psi(A))^2\right) = \mu_\psi(A^2) - \mu_\psi(A)^2.$$

Das folgende grundlegende Theorem zeigt die Konsequenzen nichtkommutierender, selbstadjungierter Operatoren.

Theorem 2.1.2.2 *Seien A, B nichtkommutierende, selbstadjungierte Operatoren mit $[A, B] = iC$, dann gilt*

i) $\forall t \in \mathbb{R}$: $(A - itB)^*(A - itB) = A^2 + tC + t^2B^2$.

ii) $\forall \psi \in \mathcal{D}([A, B])$ *mit* $\|\psi\|_2 = 1$, $\|(A - itB)\psi)\|^2 = \mu_\psi(A^2) + t\mu_\psi(C) + t^2\mu_\psi(B^2)$.

iii) $\forall \psi \in \mathcal{D}([A, B])$, $\mu_\psi(C)^2 \leq 4\mu_\psi(A^2)\mu_\psi(B^2)$.

iv) Gleichheit in iii) gilt genau dann, wenn $\exists t \in \mathbb{R} : \ (A - itB)\psi = 0$ *oder dazu äquivalent* $(A^2 + t^2B^2)\psi = -tC\psi$.

Beweis: Die Aussagen *i)* und *ii)* folgen nacheinander aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}(A - itB)^*(A - itB) &= (A + itB)(A - itB) \\ &= A^2 - it(AB - BA) + t^2B^2 \\ &= A^2 + tC + t^2B^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 \leq \|(A - itB)\psi\|^2 &= \mu_\psi\left((A - itB)^*(A - itB)\right) \\ &= \mu_\psi(A^2) + t\mu_\psi(C) + t^2\mu_\psi(B^2).\end{aligned}$$

Der Ausdruck $\mu_\psi(A^2) + t\mu_\psi(C) + t^2\mu_\psi(B^2)$ ist nichtnegativ, das heißt für die Diskriminate und somit für *iii)*

$$D = \left(\frac{\mu_\psi(C)}{2\mu_\psi(B^2)}\right)^2 - \frac{\mu_\psi(A^2)}{\mu_\psi(B^2)} \leq 0 \quad \text{also}$$

$$\mu_\psi(C)^2 \leq 4\mu_\psi(A^2)\mu_\psi(B^2) \quad \text{(Unschärferelation).}$$

Gleichheit in $\mu_\psi(C)^2 \leq 4\mu_\psi(A^2)\mu_\psi(B^2)$ entsteht, falls $D = 0$ gilt. Das heißt falls ein $t \in \mathbb{R}$ existiert, wobei t doppelte Nullstelle ist. Das kann nur der Fall sein, falls

$$(A - itB)\psi = 0 \quad \text{oder} \quad (A^2 + t^2B^2)\psi = -tC\psi,$$

womit auch *iv)* bewiesen ist. ■

Bemerkung 2.1.2.3 Sei nun $A = T - \mu_\psi(T)$ und $B = S - \mu_\psi(S)$, dann läßt sich eine sogenannte Unschärferelation

$$|\left\langle [T,S]\psi, \psi \right\rangle|^2 \leq 4\|(T - \mu_\psi(T))^2\psi\|^2\|(S - \mu_\psi(S))^2\psi\|^2 = 4\Delta_\psi^2(T)\Delta_\psi^2(S)$$

formulieren.

Im Heisenberg'schen Sinn drückt sie die Beziehung der Varianzen von Position und Moment aus. Verschwindet die untere Schranke, so hat man die triviale Ungleichung

$$\Delta_\psi^2(T)\Delta_\psi^2(S) \geq 0 \ .$$

Findet man ein ψ mit $\Delta_\psi^2(T)\Delta_\psi^2(S) = 0$, so muß wenigsten $\Delta_\psi^2(T)$ oder $\Delta_\psi^2(S)$ verschwinden, das kann aber nur der Fall sein, falls ψ ein Eigenvektor von T beziehungsweise S ist, denn:

Satz 2.1.2.4 *Sei $\psi \in \mathcal{D}(A)$. Falls ψ ein Eigenvektor von A ist, dann gilt $\Delta_\psi^2(A) = 0$ und $\mu_\psi(A)$ der zugehörige Eigenwert.*

Beweis: Ist $A\psi = \lambda\psi$, dann folgt $\mu_\psi(A) = \lambda$ und damit $\Delta_\psi^2(A) = \lambda^2 - \lambda^2 = 0$. ■

Ist ψ nun ein Eigenvektor, so erübrigt sich die Suche nach minimierenden Vektoren. Kann ψ nämlich nach orthonormalen Eigenvektoren ψ_λ entwickelt werden, so hat man

$$\psi = \sum_\lambda \left\langle \psi_\lambda, \psi \right\rangle \psi_\lambda = \sum_\lambda c_\lambda \psi_\lambda \ ,$$

und mit $A\psi_\lambda = \alpha_\lambda\psi_\lambda$

$$\mu_\psi(A) = \left\langle \psi, A\psi \right\rangle = \sum_\lambda \alpha_\lambda |c_\lambda|^2,$$

das heißt man kennt die Wahrscheinlichkeitswerte von A. Deshalb sind die relevanten und auch interessanten die nichttrivialen Unschärferelationen.

Bemerkung 2.1.2.5 Die Formulierung der Unschärferelation in Bemerkung 2.1.2.3 ist natürlich. Das minimierende Element ψ ist jedoch im gewissen Sinn invariant unter einem Basiswechsel der zugehörigen Lie-Algebra $\mathcal{G}$. Das heißt, falls $\{T, S\}$ eine Basis von $\mathcal{G}$ ist, dann kann man zu einer neuen Basis $\{A, B\}$ vermöge

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ S \end{pmatrix}$$

übergehen, mit $ad - bc \neq 0$. Falls $[T, S] \neq 0$ und T und S selbstadjungiert so hat man sofort $0 \neq [A, B] = (ad - bc)\,[T, S]$ und mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind A und B selbstadjungiert, das heißt A und B induzieren wieder eine Unschärferelation.

Satz 2.1.2.6 *Sei $\{A, B\}$ eine neue Basis gemäß Bemerkung 2.1.2.5 bezüglich der urspünglichen Basis $\{T, S\}$ in $\mathcal{G}$. Falls ψ der Bedingungsgleichung*

$$(A - \mu_\psi(A))\psi = it(B - \mu_\psi(B))\psi$$

genügt, das heißt die Unschärfe bezüglich A und B minimiert, so genügt ψ auch der Bedingungsgleichung

$$(T - \mu_\psi(T))\psi = \frac{itd - b}{a - itc}(S - \mu_\psi(S))\psi.$$

Gilt zudem $ab + t^2cd = 0$, so minimiert ψ auch die Unschärfe bezüglich T und S. In diesem Sinn ist ψ invariant unter Basiswechsel.

Beweis: Der Satz ist durch direktes Nachrechnen einzusehen. ■

2.1.3 Unschärferelationen von $\mathbf{G}_{aff}$ und $\mathbf{G}_{WH}$

In diesem Unterabschnitt werden jeweils für $\mathbf{G}_{aff}$ und $\mathbf{G}_{WH}$ die Unschärfen konstruiert und die minimierenden Elemente berechnet. Um zum Teil bekannte Ergebnisse zu wiederholen und um die Unschärferelationen in $H^s(\mathbb{R}^n)$ vorzubereiten sei der Darstellungraum zunächst der $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Die *Heisenberg'sche Unschärferelation* basiert auf $\mathbf{G}_{WH} \cong \mathbb{R}^{2n} \times S^1$ mit der bereits eingeführten Darstellung

$$\pi(q, p, \varphi)\psi(x) = e^{i(\varphi - p\cdot(x-q))}\psi(x - q)\ .$$

Sei $\psi \in L_2(\mathbb{R}^n)$, dann sind die zugehörigen selbstadjungierten Operatoren mit $e = (0, 0, 0)$

$$\begin{aligned}
A_\varphi\psi(x) &= i\frac{\partial}{\partial\varphi}\pi(q, p, \varphi)\psi(x)|_e = -\psi(x) \\
A_{p_j}\psi(x) &= i\frac{\partial}{\partial p_j}\pi(q, p, \varphi)\psi(x)|_e = x_j\psi(x) \\
A_{q_j}\psi(x) &= i\frac{\partial}{\partial q_j}\pi(q, p, \varphi)\psi(x)|_e = i\frac{\partial}{\partial x_j}\psi(x)\ .
\end{aligned}$$

Mann hat natürlicherweise $2n+1$ Basiselemente beziehungsweise Operatoren mit folgenden Kommutatorbeziehungen

$$\left[A_{p_j}, A_{p_k}\right] = 0, \quad \left[A_{q_j}, A_{q_k}\right] = 0, \quad \left[A_\varphi, A_{p_j}\right] = 0, \quad \left[A_\varphi, A_{q_j}\right] = 0,$$
$$\left[A_{p_j}, A_{q_k}\right] = i\delta_{jk} A_\varphi,$$

das heißt, daß sich nach Theorem 2.1.2.2 beziehungsweise Bemerkung 2.1.2.3 n Relationen ergeben

$$|\langle iA_\varphi \psi, \psi\rangle|^2 = \|\psi\|^4 \leq 4\Delta_\psi^2(A_{p_j})\Delta_\psi^2(A_{q_j}) \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Im Fall $n = 1$ wird nach Theorem 2.1.2.2 *iv)* die Relation minimiert, falls es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\left(A_{p_1} - \mu_\psi(A_{p_1})\right)\psi(x) = it\left(A_{q_1} - \mu_\psi(A_{q_1})\right)\psi(x).$$

Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ hat man jedoch ein System partieller Differentialgleichungen

$$\Theta = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1}\psi(x) = \frac{\mu_1 - x_j}{t_j}\psi(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\psi(x) = \frac{\mu_n - x_n}{t_n}\psi(x) \end{cases}$$

mit $\mu_j = \mu_\psi(A_{p_j}) - it_j\mu_\psi(A_{q_j})$. Jede einzelne Differentialgleichung steht für eine Relation. Man kann nun jede Relation für sich betrachten oder aber versuchen, daß ganze System simultan zu lösen.

Lemma 2.1.3.1 *Für Konstanten $t_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ und*

$$\mu_j = \mu_\psi(A_{p_j}) - it_j\mu_\psi(A_{q_j}) \;, \quad \alpha_j = \beta_j + \mu_j^2/(2t_j) \quad mit \quad j = 1, \ldots, n$$

ist

$$\psi(x) = \exp\left[\sum_{j=1}^n \left(-\frac{(x_j - \mu_j)^2}{2t_j} + \alpha_j\right)\right]$$

eine Lösung des Systems Θ.

Beweis: ψ liegt im Definitionsbereich von $\left[A_{p_j}, A_{q_j}\right]$ für alle $j = 1, \ldots, n$ und erfüllt jede Gleichung von Θ. ■

Theorem 2.1.3.2 *Die untere Schranke der Heisenberg'schen Unschärfe in n Dimensionen wird mit ψ aus Lemma 2.1.3.1 angenommen.*

Die *Affine Unschärferelation* in n Dimensionen basiert auf $\mathbf{G}_{aff} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times SO(n)$ mit der Darstellung

$$\pi(q, a, R)\psi(x) = a^{-n/2}\psi\left(R^{-1}\frac{x-q}{a}\right).$$

Die Situation im Fall $n = 1$ und $n = 2$ wurde in [DM95] untersucht. Die Resultate werden in Lemma 2.1.3.3 und Theorem 2.1.3.5 zusammengefaßt.

Für $n = 1$ ergeben sich mit $e = (0,1)$ zunächst die folgenden Operatoren

$$\begin{aligned}\tilde{A}_a\psi(x) &= \frac{\partial}{\partial a}\pi(q,a)\psi(x)|_e = -\frac{1}{2}\psi(x) - x\psi'(x)),\\ \tilde{A}_q\psi(x) &= \frac{\partial}{\partial q}\pi(q,a)\psi(x)|_e = -\psi'(x).\end{aligned}$$

$\tilde{A}_a$ und $\tilde{A}_q$ sind nicht selbstadjungiert, deshalb werden sie zu $A_a := i\tilde{A}_a$ und $A_q := i\tilde{A}_q$ modifiziert.

Lemma 2.1.3.3 *Für alle $\psi \in \mathcal{D}([A_a, A_q])$ mit $\|\psi\|_2 = 1$ gilt die Relation*

$$|\mu_\psi(A_q)|^2 \leq 4\left(\|\psi'\|_2^2 - \mu_\psi(A_q)^2\right)\left(\|x\psi'\|_2^2 - 1/4\|\psi\|_2^2 - \mu_\psi(A_a)^2\right).$$

Beweis: Der Beweis kann in [DM95] eingesehen werden. ∎

Bemerkung 2.1.3.4 $\|\psi\|_2 = 1$ bedeutet eine Normierung des Erwartungswertes $\mu_\psi(A) = \langle A\psi, \psi\rangle / \|\psi\| = \langle A\psi, \psi\rangle$.

Gesucht ist nun diejenige Funktionenschar mit der die untere Schranke angenommen wird.

Theorem 2.1.3.5 *Seien $t, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 > t\mu_2$ gegeben. Sei nun ψ definiert durch*

$$\psi(x) := c(x - it)^\alpha, \quad mit \quad \alpha = -1/2 + t\mu_2 + i\mu_1.$$

Falls c so gewählt ist, daß $\|\psi\|_2 = 1$, dann gilt $\mu_\psi(A_a) = \mu_1$, $\mu_\psi(A_q) = \mu_2$ und ψ minimiert die affine Unschärferelation in Lemma 2.1.3.3.

Beweis: Der Beweis ist in [DM95] enthalten. ∎

Bemerkung 2.1.3.6 Damit die Funktion ψ zusätzlich die Zulässigkeitsbedingung erfüllt, muß gelten $-t\mu_2 > 1/2$.

Die Konstante c kann explizit angegeben werden.

Satz 2.1.3.7 *Die Normierungskonstante c der Funktion ψ aus Theorem 2.1.3.5 hängt von t, μ_1 und μ_2 ab*

$$c = \frac{\Gamma(-\alpha)}{(-2t)^{t\mu_2}\sqrt{2\pi}\sqrt{\Gamma(-2t\mu_2)}}.$$

Beweis: Sei ψ wie in Theorem 2.1.3.5 definiert, dann gilt für die Fouriertransformierte

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{f. } \omega < 0 \\ \tilde{c}\cdot\omega^{-\alpha-1}e^{t\omega}, & \text{f. } \omega > 0, \end{cases}$$

mit $\tilde{c} = c \cdot \sqrt{2\pi}(-i)^\alpha \Gamma(-\alpha)^{-1}$ mit $t\mu_2 < 1/2$ (Regularität der Γ-Funktion) und $t < 0$. Nach Parseval folgt

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_2^2 &= \langle \hat{\psi}, \hat{\psi} \rangle \\
&= 2\pi |c|^2 | - i^\alpha|^2 |\Gamma(-\alpha)|^{-2} \int_0^\infty \omega^{-1-2t\mu_2} e^{2t\omega} d\omega \\
&= 2\pi |c|^2 | - i^\alpha|^2 |\Gamma(-\alpha)|^{-2} (-2t)^{2t\mu_2} \int_0^\infty x^{-2t\mu_2 - 1} e^{-x} dx \\
&= 2\pi |c|^2 | - i^\alpha|^2 |\Gamma(-\alpha)|^{-2} (-2t)^{2t\mu_2} \Gamma(-2t\mu_2).
\end{aligned}$$

Wegen der Zulässigkeit gilt wenigstens $-t\mu_2 > 1/2$, somit ist $\Gamma(-2t\mu_2)$ und auch $\Gamma(-\alpha)$ nicht singulär und mit der Forderung $\|\psi\|_2^2 = 1$ folgt

$$c = \frac{\Gamma(-\alpha)}{(-2t)^{t\mu_2}\sqrt{2\pi}\sqrt{\Gamma(-2t\mu_2)}}, \quad \text{das heißt} \quad \tilde{c} = \frac{1}{(-2t)^{t\mu_2}\sqrt{\Gamma(-2t\mu_2)}}.$$

■

Wird nun die Dimension auf $n = 2$ erhöht, so ist die Rotation R ebenfalls relevant. Mit $e = ((0,0), 1, Id)$, Id ist identische Rotation, ergeben sich folgende Operatoren

$$\begin{aligned}
A_\theta \psi(x) &= i \frac{\partial}{\partial \theta} \pi(q_1, q_2, a, \theta) \psi(x)|_e = i \nabla \psi \cdot (x_2, -x_1)^t \\
A_a \psi(x) &= i \frac{\partial}{\partial a} \pi(q_1, q_2, a, \theta) \psi(x)|_e = -i\psi(x) - i \nabla \psi \cdot x \\
A_{q_1} \psi(x) &= i \frac{\partial}{\partial q_1} \pi(q_1, q_2, a, \theta) \psi(x)|_e = -i \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\
A_{q_2} \psi(x) &= i \frac{\partial}{\partial q_2} \pi(q_1, q_2, a, \theta) \psi(x)|_e = -i \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad ,
\end{aligned}$$

wobei $\nabla \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right)^t$. Folgende Kommuntatorbeziehungen gelten:

$$[A_\theta, A_{q_1}] = -iA_{q_2},\ [A_\theta, A_{q_2}] = -iA_{q_1},\ [A_a, A_{q_1}] = iA_{q_1},\ [A_a, A_{q_2}] = iA_{q_2},$$
$$[A_a, A_\theta] = 0,\ [A_{q_1}, A_{q_2}] = 0\ .$$

Im klassischen Kontext kann man nun vier Unschärferelationen formulieren.

Lemma 2.1.3.8 *Falls* $\psi \in \mathcal{D}([A_\theta, A_{q_1}])$, $\mathcal{D}([A_\theta, A_{q_2}])$, $\mathcal{D}([A_a, A_{q_1}])$ *bzw.* $\mathcal{D}([A_a, A_{q_2}])$ *mit* $\|\psi\|_2 = 1$, *dann gilt jeweils*

$$\begin{aligned}
\mu_\psi^2(A_{q_2}) &\leq 4 \left(\|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\|_2^2 - \mu_\psi^2(A_{q_1}) \right) \\
&\quad \times \left(\|\frac{\partial \psi}{\partial x_1} x_2\|_2^2 + \|\frac{\partial \psi}{\partial x_2} x_1\|_2^2 - 2\Re \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x_2} x_2, \frac{\partial \psi}{\partial x_1} x_1 \right\rangle - \mu_\psi^2(A_\theta) \right) \quad , \\
\mu_\psi^2(A_{q_1}) &\leq 4 \left(\|\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\|_2^2 - \mu_\psi^2(A_{q_2}) \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \times \left(\|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}x_2\|_2^2 + \|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}x_1\|_2^2 - 2\Re\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial x_2}x_2, \frac{\partial\psi}{\partial x_1}x_1 \right\rangle - \mu_\psi^2(A_\theta) \right) \ , \\
\mu_\psi^2(A_{q_1}) \ \leq \ & 4\left(\|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\|_2^2 - \mu_\psi^2(A_{q_1}) \right) \left(\|\nabla\psi\cdot x\|_2^2 - \|\psi\|_2^2 - \mu_\psi^2(A_a) \right) \quad bzw. \\
\mu_\psi^2(A_{q_2}) \ \leq \ & 4\left(\|\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\|_2^2 - \mu_\psi^2(A_{q_2}) \right) \left(\|\nabla\psi\cdot x\|_2^2 - \|\psi\|_2^2 - \mu_\psi^2(A_a) \right) \ .
\end{aligned}
$$

Beweis: Die Berechnung der Varianzen kann in [DM95] eingesehen werden. ■

Nach Theorem 2.1.2.2 hat man nun folgendes System partieller Differentialgleichungen, wobei die Lösung jeder Gleichung separat das minimierende Element der zugehörigen Unschärfe liefert

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial\psi}{\partial x_1}x_2 - i\frac{\partial\psi}{\partial x_2}x_1 - \mu_\psi(A_\theta)\psi &= t_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - it_1\mu_\psi(A_{q_1})\psi \\
i\frac{\partial\psi}{\partial x_1}x_2 - i\frac{\partial\psi}{\partial x_2}x_1 - \mu_\psi(A_\theta)\psi &= t_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - it_2\mu_\psi(A_{q_2})\psi \\
-i\psi(x) - i\frac{\partial\psi}{\partial x_1}x_1 - i\frac{\partial\psi}{\partial x_2}x_2 - \mu_\psi(A_a)\psi &= t_3\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - it_3\mu_\psi(A_{q_1})\psi \\
-i\psi(x) - i\frac{\partial\psi}{\partial x_1}x_1 - i\frac{\partial\psi}{\partial x_2}x_2 - \mu_\psi(A_a)\psi &= t_4\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - it_4\mu_\psi(A_{q_2})\psi \ .
\end{aligned}
$$

Bemerkung 2.1.3.9 Wie bei den Heisenberg Relationen wäre es optimal, eine Funktion ψ zu finden, die simultan das gesamte System lößt. Es kann jedoch gezeigt werden, daß dies nicht möglich ist.

Im klassischen Unschärfeansatz sind zunächst die separaten Lösungen des Systems von Interesse.

Satz 2.1.3.10 *Sei $\psi \in L_2(\mathbb{R}^2)$ hinreichend glatt. Die Differentialgleichung*

$$
i\frac{\partial\psi}{\partial x_1}x_2 - i\frac{\partial\psi}{\partial x_2}x_1 - \mu_1\psi = it\left(-i\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \mu_2\psi\right)
$$

wird durch

$$
\psi(x_1,x_2) = \phi\left(-\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} - itx_2\right)(ix_1 + x_2 + it)^{it\mu_2-\mu_1} \quad ,
$$

die Differentialgleichung

$$
i\frac{\partial\psi}{\partial x_1}x_2 - i\frac{\partial\psi}{\partial x_2}x_1 - \mu_1\psi = it\left(-i\frac{\partial\psi}{\partial x_2} - \mu_2\psi\right)
$$

durch

$$
\psi(x_1,x_2) = \phi\left(\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} - itx_1\right)(ix_1 + x_2 + t)^{it\mu_2-\mu_1} \quad ,
$$

die Differentialgleichung

$$
-i\psi(x) - i\frac{\partial\psi}{\partial x_1}x_1 - i\frac{\partial\psi}{\partial x_2}x_2 - \mu_1\psi = it\left(-i\frac{\partial\psi}{\partial x_1} - \mu_2\psi\right)
$$

durch

$$\psi(x_1,x_2)=\phi\left(\frac{x_2}{x_1-it}\right)(x_1-it)^{-1+t\mu_2+i\mu_1}$$

und die Differentialgleichung

$$-i\psi(x)-i\frac{\partial\psi}{\partial x_1}x_1-i\frac{\partial\psi}{\partial x_2}x_2-\mu_1\psi=it\left(-i\frac{\partial\psi}{\partial x_2}-\mu_2\psi\right)$$

durch

$$\psi(x_1,x_2)=\phi\left(\frac{x_2-it}{x_1}\right)x_1^{-1+t\mu_2+i\mu_1}$$

gelöst.

Beweis: Um die erste Differentialgleichung zu testen, substituiert man $\phi\left(-\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_2^2}{2}-itx_2\right)=\phi(r)$, dann folgt

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1}=\frac{d\phi}{r}(-x_1),\quad \frac{\partial\phi}{\partial x_2}=\frac{d\phi}{r}(-x_2-it).$$

Damit ergeben sich die Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} &= \frac{d\phi(r)}{dr}(-x_1)\left(ix_1+x_2+it\right)^{it\mu_2-\mu_1}\\ &\quad +i\phi(r)(it\mu_2-\mu_1)\left(ix_1+x_2+it\right)^{it\mu_2-\mu_1-1}\\ \frac{\partial\psi}{\partial x_2} &= \frac{d\phi(r)}{dr}(-x_2-it)\left(ix_1+x_2+it\right)^{it\mu_2-\mu_1}\\ &\quad +\phi(r)(it\mu_2-\mu_1)\left(ix_1+x_2+it\right)^{it\mu_2-\mu_1-1}\end{aligned}$$

und durch Einsetzen in die linke Seite der Differentialgleichung erhält man

$$\begin{aligned} l.S. &= i\left\{\left(\frac{d\phi(r)}{dr}(-x_1x_2)-\frac{d\phi(r)}{dr}(-x_2-it)x_1\right)\left(ix_1+x_2+it\right)^{it\mu_2-\mu_1}\right.\\ &\quad \left.+\ \phi(r)(it\mu_2-\mu_1)(ix_2-x_1)\left(ix_1+x_2+it\right)^{it\mu_2-\mu_1-1}\right\}\\ &\quad -\mu_1\phi(r)\left(ix_1+x_2+it\right)^{it\mu_2-\mu_1}\\ &= it\left(-i\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)-i\left(x-i(x_2+it)\right)\phi(r)(it\mu_2-\mu_1)\left(ix_1+x_2+it\right)^{it\mu_2-\mu_1-1}\\ &\quad -\mu_1\phi(r)\left(ix_1+x_2+it\right)^{it\mu_2-\mu_1}\\ &= it\left(-i\frac{\partial\psi}{\partial x_1}-\mu_2\phi(r)\left(ix_1+x_2+it\right)^{it\mu_2-\mu_1}\right)=r.S.\end{aligned}$$

Analog prüft man die zweite Differentialgleichung (selber Typ) nach. Bis auf die Substitution $\phi\left(\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^2}{2}-itx_1\right)=\phi(r)$ und somit

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1}=\frac{d\phi}{r}(x_1-it),\quad \frac{\partial\phi}{\partial x_2}=\frac{d\phi}{r}(x_2)$$

ist die Rechnung identisch.
Für die dritte Differentialgleichung benutzt man $\phi\left(\frac{x_2}{x_1-it}\right)=\phi(r)$ und hat somit

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1}=\frac{d\phi}{dr}\left(-\frac{x_2}{(x_1-it)^2}\right)\ ,\quad \frac{\partial\phi}{\partial x_2}=\frac{d\phi}{dr}\left(\frac{1}{(x_1-it)}\right)\ .$$

Die Ableitungen sind dann mit $\gamma=-1+t\mu_2+i\mu_1$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} &= \frac{d\phi}{dr}\frac{-x_2}{(x_1-it)^2}(x_1-it)^\gamma+\phi(r)\gamma(x_1+it)^{\gamma-1}\\ \frac{\partial\psi}{\partial x_2} &= \frac{d\phi}{dr}\frac{1}{x_1-it}(x_1-it)^\gamma.\end{aligned}$$

Einsetzen in die linke Seite der entsprechenden Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}l.S. &= -i\left\{\frac{-x_2}{(x_1-it)^2}\phi'(x_1-it)^\gamma x_1+\phi\gamma(x_1+it)^{\gamma-1}x_1+\phi'\frac{y}{x_1-it}(x_1-it)^\gamma\right\}\\ &\quad -(i+\mu_1)\psi(x_1-it)^\gamma\\ &= it\left\{-i\frac{-x_2}{(x_1-it)^2}\phi'(x-it)^\gamma\right.\\ &\quad\left.-i\phi(-1+t\mu_2+i\mu_1-t\mu_2-i\mu_2x_1-1)(x_1-it)^{\gamma-1}\right\}\\ &= it\left\{-i\left(\frac{-x_2}{(x_1-it)^2}\phi'(x-it)^\gamma+\phi\gamma(x_1-it)^{\gamma-1}\right)-\mu_2\phi(x_1-it)^\gamma\right\}\\ &= r.S.\end{aligned}$$

Und analog wird die Lösung der vierten Differentialgleichung bewiesen. Mit $\phi\left(\frac{x_2-it}{x_1}\right)=\phi(r)$ und hat man

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1}=\frac{d\phi}{dr}\left(-\frac{x_2-it}{x_1^2}\right)\ ,\quad \frac{\partial\phi}{\partial x_2}=\frac{d\phi}{dr}\frac{1}{x_1}$$

und mit $\gamma=-1+t\mu_2+i\mu_1$ ist einfach nachzurechnen

$$\begin{aligned}l.S. &= -i\left\{-\frac{x_2-it}{x_1^2}\phi' x_1x_1^\gamma+\phi\gamma x_1^\gamma x_1+\frac{x_2}{x_1}\phi' x_1^\gamma\right\}-(i+\mu_1)\phi x_1^\gamma\\ &= it(-i)\phi' x_1^{\gamma-1}-i\phi\gamma x_1^\gamma-(i+\mu_1)\phi x_1^\gamma\\ &= it\left\{-i\phi' x_1^{\gamma-1}-\mu_2\phi x_1^\gamma\right\}=r.S.\end{aligned}$$

Die Funktion ϕ ist so zu wählen, daß $\psi\in L_2(\mathbb{R}^2)$ und die Zulässigkeitsbedingung erfüllt. Konkret wird dies erst für H^s angegeben. ■

In Bemerkung 2.1.3.9 wurde angedeutet, daß das System nicht simultan lösbar ist. Nimmt man an, ψ genügt simultan den letzten beiden Gleichungen des Systems, dann können diese voneinander subtrahiert werden. Dann hat man

$$t_3\frac{\partial\psi}{\partial x_1}-t_4\frac{\partial\psi}{\partial x_2}=it_3\mu_\psi(A_{q_1})-it_4\mu_\psi(A_{q_2})\ .$$

Diese Gleichung ist für nichttriviale Werte t_3 und t_4 nur für $\psi = 0$ erfüllt. Dies gilt analog für die ersten beiden Gleichungen des Systems. Simultane Lösungen würden sich also für $t_i = 0$ finden lassen. Dies geht auch aus der Struktur der Lösung hervor, vergleiche Satz 2.1.3.10.

Bemerkung 2.1.3.11 ψ ist simultane Lösung der ersten beziehungsweise der letzten beiden Gleichungen des Systems, falls

$$\psi \in ker(A_\theta) \quad oder \quad A_\theta \psi = \lambda \psi \; .$$

beziehungsweise

$$\psi \in ker(A_a) \quad oder \quad A_a \psi = \lambda \psi \; .$$

gilt.

Falls $\psi \in ker(A)$, so folgt $\mu_\psi(A) = 0$. Das heißt ψ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 0. Nach Satz 2.1.2.4 gilt dann aber $\Delta^2_\psi = 0$. Falls ψ ein Eigenvektor einer der Operatoren einer Unschärfe ist, werden triviale Unschärferelationen produziert. Dies ist auch anhand der Diskriminatenbedingung einzusehen: für $t_i = 0$ hat man anstatt einer Parabel lediglich eine Konstante.

Im folgenden Abschnitt wird nun zu den Darstellungen in H^s übergegangen. Es soll analysiert werden, wie sich die Unschärferelationen modifizieren und, dies dann im kommenden Abschnitt, welche Struktur die Relationen der Gruppen $\mathbf{G}^d_{aWH}$ und $\mathbf{G}_{aWH}$ besitzen.

Definition 2.1.3.12 *Sei A ein Operator auf $\mathcal{D}(A) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$. Der* **Erwartungswert** *von A zu einem Zustand $\psi \in \mathcal{D}(A)$ mit $\|\psi\|_s = 1$ ist definiert durch*

$$\mu_{s,\psi}(A) := \langle A\psi, \psi \rangle_{H^s} \, .$$

Die **Varianz** *von A zu einem Zustand $\psi \in \mathcal{D}(A)$ mit $\|\psi\|_s = 1$ ist definiert durch*

$$\Delta^2_{s,\psi}(A) = \mu_{s,\psi}\left((A - \mu_{s,\psi}(A))^2\right) = \mu_{s,\psi}(A^2) - \mu_{s,\psi}(A)^2.$$

Für die einfach zu berechnenden eindimensionalen Fälle der Gruppen $\mathbf{G}_{WH}$ und $\mathbf{G}_{aff}$ gilt nun das folgende Lemma.

Lemma 2.1.3.13 *Sei $\psi \in H^s(\mathbb{R})$. Sei $\mathbf{G}_{WH}$ die zugrundeliegende Gruppe, dann sind die infinitesimalen Operatoren*

$$A_q\hat{\psi}(\eta) = \eta\hat{\psi}(\eta) \; , \quad A_p\hat{\psi}(\eta) = \frac{is\eta}{1+\eta^2}\hat{\psi}(\eta) + i\hat{\psi}'(\eta)$$

selbstadjungiert. Sei $\mu_1, \mu_2, t \in \mathbb{R}$ und $\mu = \mu_1 - it\mu_2$, $\alpha = \mu^2/(2t)$ dann wird die Unschärfe

$$\mu_{s,\psi}(-i[A_p, A_q])^2 \leq \Delta^2_{s,\psi}(A_p)\Delta^2_{s,\psi}(A_q)$$

durch

$$\hat{\psi}(\eta) = c \cdot \exp\left[-\frac{(\eta-\mu)^2}{2t} + \alpha\right] \left(1+\eta^2\right)^{-s/2}$$

für $t < 0$ minimiert.
Falls $\mathbf{G}_{aff}$ die zugrundeliegende Gruppe ist, dann sind die selbstadjungierten Operatoren durch

$$A_b\hat{\psi}(\omega) = \omega\hat{\psi}(\omega)\ , \quad A_a\hat{\psi}(\omega) = i\frac{1}{2}\hat{\psi}(\omega) + \frac{is\omega^2}{1+\omega^2}\hat{\psi}(\omega) + i\omega\hat{\psi}'(\omega)$$

gegeben. Sei $\mu_1, \mu_2, t \in \mathbb{R}$, dann wird die Unschärfe

$$\mu_{s,\psi}(-i[A_a, A_b])^2 \leq \Delta^2_{s,\psi}(A_a)\Delta^2_{s,\psi}(A_b)$$

durch

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 0 & f.\ \omega < 0 \\ c \cdot e^{t\omega}\omega^{-1/2-t\mu_2-i\mu_1}\left(1+\omega^2\right)^{-s/2} & f.\ \omega > 0 \end{cases} ,$$

mit $t < 0$. Weiterhin muß $t\mu_2 < -1/2$ gelten, damit nach Bemerkung 1.1.2.4 die Quadratintegrierbarkeit und somit auch die Beschränktheit von c gesichert ist.

Beweis: Zunächst wird nachgewiesen, daß A_q und A_p auf H^s selbstadjungiert sind (für A_q klar). Mit

$$\left[\left(1+\eta^2\right)^{s/2}\hat{\psi}\right]' = s\eta\left(1+\eta^2\right)^{s/2-1}\hat{\psi} + \left(1+\eta^2\right)^{s/2}\hat{\psi}'$$

folgt

$$\begin{aligned}
\left\langle A_p\hat{\psi}, \hat{\psi}\right\rangle_{H^s} &= \left\langle (1+\eta^2)^{s/2}\left(is\eta/(1+\eta^2)\hat{\psi} + i\hat{\psi}'\right), (1+\eta^2)^{s/2}\hat{\psi}\right\rangle_{L_2} \\
&= \left\langle i\left[\left(1+\eta^2\right)^{s/2}\hat{\psi}\right]', \left(1+\eta^2\right)^{s/2}\hat{\psi}\right\rangle_{L_2} \\
&= \left\langle \left(1+\eta^2\right)^{s/2}\hat{\psi}, i\left[\left(1+\eta^2\right)^{s/2}\hat{\psi}\right]'\right\rangle_{L_2} = \left\langle \hat{\psi}, A_p\hat{\psi}\right\rangle_{H^s} .
\end{aligned}$$

Um die Unschärfe zu minimieren, ist folgende Differentialgleichung zu lösen

$$\eta\hat{\psi} - \mu_1\hat{\psi} = it\left(i\hat{\psi}' + is\eta/(1+\eta^2)\hat{\psi} - \mu_2\hat{\psi}\right) .$$

Mit $\mu = \mu_1 - it\mu_2$ ergibt sich

$$\frac{d\hat{\psi}}{\hat{\psi}} = \left(\mu/t - \eta/t - s\eta/(1+\eta^2)\right) d\eta .$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist für ein $c \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\hat{\psi}(\eta) = c \cdot \exp\left[-\frac{(\eta-\mu)^2}{2t} + \frac{\mu^2}{2t}\right] \left(1+\eta^2\right)^{-s/2}$$

und diese Funktion ist für $t > 0$ in H^s.

Man sieht, daß der Operator A_b selbstadjungiert ist. Um die Selbstadjungiertheit von A_a zu testen, kann man

$$\begin{aligned}\left[\left(1+\omega^2\right)^{s/2}\hat{\psi}\right]' &= s\omega\left(1+\omega^2\right)^{s/2-1}\hat{\psi}+\left(1+\omega^2\right)^{s/2}\hat{\psi}' \quad \text{und}\\ \left[\left(1+\omega^2\right)^{s/2}\omega\hat{\psi}\right]' &= s\omega^2\left(1+\omega^2\right)^{s/2-1}\hat{\psi}+\left(1+\omega^2\right)^{s/2}\hat{\psi}+\left(1+\omega^2\right)^{s/2}\omega\hat{\psi}'\end{aligned}$$

benutzen und es folgt

$$\begin{aligned}\left\langle A_a\hat{\psi},\hat{\psi}\right\rangle_{H^s} &= \Big\langle i\frac{1}{2}(1+\omega^2)^{s/2}\hat{\psi}+is\omega^2(1+\omega^2)^{s/2-1}\hat{\psi}+i(1+\omega^2)^{s/2}\omega\hat{\psi}\ ,\\ &\qquad (1+\omega^2)^{2/s}\hat{\psi}\Big\rangle_{L_2}\\ &= \Big\langle i\frac{1}{2}(1+\omega^2)^{s/2}\hat{\psi}+i\left[\left(1+\omega^2\right)^{s/2}\omega\hat{\psi}\right]'-i(1+\omega^2)^{s/2}\hat{\psi}\ ,\\ &\qquad (1+\omega^2)^{2/s}\hat{\psi}\Big\rangle_{L_2}\\ &= -i/2\left\langle(1+\omega^2)^{s/2}\hat{\psi},(1+\omega^2)^{s/2}\hat{\psi}\right\rangle_{L_2}+\\ &\qquad \left\langle i\left[\left(1+\omega^2\right)^{s/2}\omega\hat{\psi}\right]',(1+\omega^2)^{s/2}\hat{\psi}\right\rangle_{L_2}\\ &= -i/2\left\langle(1+\omega^2)^{s/2}\hat{\psi},(1+\omega^2)^{s/2}\hat{\psi}\right\rangle_{L_2}+\\ &\qquad -i\left\langle\left(1+\omega^2\right)^{s/2}\omega\hat{\psi},s\omega\left(1+\omega^2\right)^{s/2-1}\hat{\psi}+\left(1+\omega^2\right)^{s/2}\hat{\psi}'\right\rangle_{L_2}\\ &= \Big\langle(1+\omega^2)^{s/2}\hat{\psi}\ ,\\ &\qquad i/2(1+\omega^2)^{s/2}\hat{\psi}+is\omega^2\left(1+\omega^2\right)^{s/2-1}\hat{\psi}+i\omega\left(1+\omega^2\right)^{s/2}\hat{\psi}'\Big\rangle_{L_2}\\ &= \left\langle\hat{\psi},A_a\hat{\psi}\right\rangle_{H^s}\quad .\end{aligned}$$

Die zu lösende Differentialgleichung ist nun

$$\frac{d\hat{\psi}}{\hat{\psi}}=\left(t-t\mu_2/\omega-1/2\omega-i\mu_1/\omega-s\omega/(1+\omega^2)\right)d\omega.$$

Für $\omega>0$ und ein $c\in\mathbb{R}$ ist eine Lösung

$$\hat{\psi}(\omega)=c\cdot e^{t\omega}\omega^{-1/2-t\mu_2-i\mu_1}\left(1+\omega^2\right)^{-s/2}$$

ansonsten $\hat{\psi}(\omega)=0$. Damit $\hat{\psi}\in H^s$ gilt und ψ zulässig ist, muß $t<0$ und $t\mu_2<-1/2$ gewählt werden. ■

Lemma 2.1.3.13 zeigt, daß die minimierenden Vektoren bis auf den Glättungsfaktor $(1+\omega^2)^{-s/2}$ erhalten bleiben. Der Beweis der Selbstadjungiertheit beruht im wesentlichen auf die Anwendung der Produktregel und der partiellen Integration.

Die Unschärferelationen haben im Detail nun folgende Struktur.

Satz 2.1.3.14 *Für $\psi \in \mathcal{D}([A_a, A_b]) \subset H^s(\mathbb{R})$ mit $\|\psi\|_s = 1$ hat die affine Unschärferelation in $H^s(\mathbb{R})$ folgende Struktur:*

$$\begin{aligned} \mu_{s,\psi}(A_b)^2 &\leq 4\left(\|\omega\hat{\psi}\|_s^2 - \mu_{s,\psi}(A_b)^2\right) \\ &\qquad \times \left(\left\|\frac{s\omega^2}{1+\omega^2}\hat{\psi} + \omega\hat{\psi}'\right\|_s^2 - 1/4\|\hat{\psi}\|_s^2 - \mu_{s,\psi}(A_a)^2\right). \end{aligned}$$

Beweis: Die Varianzen in H^s können direkt angegeben werden:

$$\Delta^2_{s,\psi}(A_b) = \mu_{s,\psi}(A_b^2) - \mu_{s,\psi}(A_b)^2 \text{ mit } \mu_{s,\psi}(A_b^2) = \left\langle A_b\hat{\psi}, A_b\hat{\psi}\right\rangle_{H^s} = \|\omega\hat{\psi}\|_s^2$$

und

$$\Delta^2_{s,\psi}(A_a) = \mu_{s,\psi}(A_a^2) - \mu_{s,\psi}(A_a)^2 \text{ mit } \mu_{s,\psi}(A_a^2) = \ldots$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \frac{1}{2}\hat{\psi} + \frac{s\omega^2}{1+\omega^2}\hat{\psi} + \omega\hat{\psi}', \frac{1}{2}\hat{\psi} + \frac{s\omega^2}{1+\omega^2}\hat{\psi} + \omega\hat{\psi}'\right\rangle_{H^s} \\
&= \left\langle \left[(1+\omega^2)^{s/2}\omega\hat{\psi}\right]' - \frac{1}{2}(1+\omega^2)^{s/2}\hat{\psi}, \left[(1+\omega^2)^{s/2}\omega\hat{\psi}\right]' - \frac{1}{2}(1+\omega^2)^{s/2}\hat{\psi}\right\rangle_{L_2} \\
&= \frac{1}{4}\|\hat{\psi}\|_s^2 + \left\|\left[(1+\omega^2)^{s/2}\omega\hat{\psi}\right]'\right\|_2^2 - \frac{1}{2}\left\langle (1+\omega^2)^{s/2}\hat{\psi}, \left[(1+\omega^2)^{s/2}\omega\hat{\psi}\right]'\right\rangle_{L_2} \\
&\qquad -\frac{1}{2}\left\langle \left[(1+\omega^2)^{s/2}\omega\hat{\psi}\right]', (1+\omega^2)^{s/2}\hat{\psi}\right\rangle_{L_2} \\
&= \frac{1}{4}\|\hat{\psi}\|_s^2 + \left\|\left[(1+\omega^2)^{s/2}\omega\hat{\psi}\right]'\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\langle \left[(1+\omega^2)^{s/2}\hat{\psi}\right]', (1+\omega^2)^{s/2}\omega\hat{\psi}\right\rangle_{L_2} \\
&\qquad -\frac{1}{2}\left\langle \left[(1+\omega^2)^{s/2}\omega\hat{\psi}\right]', (1+\omega^2)^{s/2}\hat{\psi}\right\rangle_{L_2} \\
&= \frac{1}{4}\|\hat{\psi}\|_s^2 + \left\|\left[(1+\omega^2)^{s/2}\omega\hat{\psi}\right]'\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\langle s\omega/(1+\omega^2)\hat{\psi} + \hat{\psi}', \omega\hat{\psi}\right\rangle_{H^s} \\
&\qquad -\frac{1}{2}\left\langle s\omega^2/(1+\omega^2)\hat{\psi} + \hat{\psi} + \omega\hat{\psi}', \hat{\psi}\right\rangle_{H^s} \\
&= -\frac{1}{4}\|\hat{\psi}\|_s^2 + \left\|\left[(1+\omega^2)^{s/2}\omega\hat{\psi}\right]'\right\|_2^2 = -\frac{1}{4}\|\hat{\psi}\|_s^2 + \left\|\frac{s\omega^2}{1+\omega^2}\hat{\psi} + \hat{\psi} + \omega\hat{\psi}'\right\|_s^2
\end{aligned}$$

und mit

$$\left\langle \omega\hat{\psi}', \hat{\psi}\right\rangle_{H^s} = -\|\hat{\psi}\|_s^2 - \left\langle \hat{\psi}, \frac{2s\omega^2}{1+\omega^2}\hat{\psi}\right\rangle_{H^s} - \left\langle \hat{\psi}, \omega\hat{\psi}'\right\rangle_{H^s}$$

gilt

$$\left\|\frac{s\omega^2}{1+\omega^2}\hat{\psi} + \hat{\psi} + \omega\hat{\psi}'\right\|_s^2 = \left\|\frac{s\omega^2}{1+\omega^2}\hat{\psi} + \omega\hat{\psi}'\right\|_s^2$$

und somit

$$\mu_{s,\psi}(A_a^2) = -\frac{1}{4}\|\hat{\psi}\|_s^2 + \left\|\frac{s\omega^2}{1+\omega^2}\hat{\psi} + \omega\hat{\psi}'\right\|_s^2.$$

Der Fall $s = 0$ stimmt mit der bekannten affinen Unschärfe in $L_2(\mathbb{R})$ überein. Für den Kommutator gilt

$$[A_a, A_b]\hat{\psi} = i\omega\hat{\psi} = iA_b\hat{\psi}$$

und demzufolge ist nach dem grundlegenden Theorem 2.1.2.2 die untere Schranke $\mu_{s,\psi}(A_b)^2$. ■

Die Selbstadjungiertheit zu zeigen, war im Detail sehr aufwendig. Man kann nun einen Satz formulieren, der unter natürlichen Voraussetzungen die Selbstadjungiertheit der infinitesimalen Operatoren auf $H^s(\mathbb{R}^n)$ impliziert und somit die Rechnungen für $n = 2$ wesentlich vereinfacht.

Satz 2.1.3.15 *Sei π eine Darstellung der Gruppe $\mathbf{G}$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$. Die infinitesimalen Operatoren bezüglich π sind dann durch*

$$A_i f(x) = \frac{\partial}{\partial g_i} \pi(g) f(x) \Big|_e$$

gegeben. Falls eine weitere Darstellung der Gruppe $\mathbf{G}$ in $H^s(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\pi_s := \Lambda_{-s} \pi \Lambda_s \ , \quad \mathit{mit} \quad (\Lambda_s f)^\wedge(\omega) = (1 + \|\omega\|^2)^{s/2} \hat{f}(\omega)$$

definiert ist und die Operatoren A_i in $L_2(\mathbb{R}^n)$ selbstadjungiert sind, dann sind die infinitesimalen Operatoren bezüglich π_s

$$B_i \phi(x) = \frac{\partial}{\partial g_i} \pi_s(g) \phi(x) \Big|_e$$

in $H^s(\mathbb{R}^n)$ selbstadjungiert.

Beweis: Zunächst kann man zur äquivalenten Darstellung $\hat{\pi} = \mathcal{F} \pi \mathcal{F}^{-1}$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$ übergehen, die im Fourier-Raum agiert. Nach Parseval folgt sofort, falls $\hat{A}_i$ der infinitesimale Operator bezüglich $\hat{\pi}$ ist, dann ist dieser selbstadjungiert, falls A_i selbstadjungiert ist

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{A}_i \hat{f}, \hat{f} \right\rangle_{L_2} &= \left\langle \mathcal{F} \frac{\partial}{\partial g_i} \pi(g) \mathcal{F}^{-1} \hat{f}, \hat{f} \right\rangle_{L_2} = \left\langle \frac{\partial}{\partial g_i} \pi(g) f, f \right\rangle_{L_2} \\
&= \left\langle f, \frac{\partial}{\partial g_i} \pi(g) f \right\rangle_{L_2} = \left\langle \hat{f}, \mathcal{F} \frac{\partial}{\partial g_i} \pi(g) \mathcal{F}^{-1} \hat{f} \right\rangle_{L_2} = \left\langle \hat{f}, \hat{A}_i \hat{f} \right\rangle_{L_2} .
\end{aligned}$$

Sei nun $\phi \in H^s(\mathbb{R}^n)$, dann folgt mit $\hat{f}(\omega) := (1 + \|\omega\|^2)^{s/2} \hat{\phi}(\omega)$, $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R}^n)$, und der Anwendung von Parseval

$$\begin{aligned}
\langle B_i \phi, \phi \rangle_{H^s} &= \left\langle \Lambda_s \Lambda_{-s} \frac{\partial}{\partial g_i} \pi(g) \Lambda_s \phi, \Lambda_s \phi \right\rangle_{L_2} = \left\langle \hat{A}_i \hat{f}, \hat{f} \right\rangle_{L_2} \\
&= \left\langle \hat{f}, \hat{A}_i \hat{f} \right\rangle_{L_2} = \langle \phi, B_i \phi \rangle_{H^s}
\end{aligned}$$

und sofort mit

$$\hat{B}_i \hat{\phi}(\omega) := \frac{\partial}{\partial g_i} \hat{\pi}_s(g) \hat{\phi}(\omega) = (1 + \|\omega\|^2)^{-s/2} \frac{\partial}{\partial g_i} \hat{\pi}(g) \hat{f}(\omega) = (1 + \|\omega\|^2)^{-s/2} \hat{A}_i \hat{f}(\omega)$$

die Selbstadjungiertheit von B_i bzw. $\hat{B}_i$. ■

Mit diesem Satz setzt sich die Selbstadjungiertheit sämtlicher infinitesimaler Operatoren auf $L_2(\mathbb{R}^n)$ auf die zugehörigen infinitesimalen Operatoren auf $H^s(\mathbb{R}^n)$ fort.

Wird die Dimension von $n = 1$ auf $n = 2$ erhöht, so läßt sich die Darstellung der Gruppe $\mathbf{G}_{WH}$ wie im Fall $L_2(\mathbb{R}^2)$ verallgemeinern. Die minimierenden Vektoren besitzen bis auf den Glättungsfaktor die selbe Struktur. Dies gilt nicht für die Verallgemeinerung von $\mathbf{G}_{aff}$. Die infinitesimalen Operatoren (im Fourier-Raum) der Gruppe $\mathbf{G}_{aff}$ auf $H^s(\mathbb{R}^2)$ sind durch

$$\begin{aligned}
A_a\hat{f}(\omega) &= i\hat{f}(\omega) + i\frac{s\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\hat{f}(\omega) + i\nabla\hat{f}\cdot\omega \\
A_\theta\hat{f}(\omega) &= i\nabla\hat{f}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\omega \\
A_{b_1}\hat{f}(\omega) &= \omega_1\hat{f}(\omega) \quad \text{und} \quad A_{b_2}\hat{f}(\omega) = \omega_2\hat{f}(\omega)
\end{aligned}$$

gegeben. Mit

$$\nabla\left(\frac{s\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\omega = 0$$

gelten folgende bereits bekannten Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned}
[A_a, A_\theta] = 0\ , \quad [A_a, A_{b_1}] = iA_{b_1}\ , \quad [A_a, A_{b_2}] = iA_{b_2}\ , \\
[A_{b_1}, A_{b_2}] = 0\ , \quad [A_\theta, A_{b_1}] = iA_{b_2}\ , \quad [A_\theta, A_{b_2}] = -iA_{b_1}\ .
\end{aligned}$$

Daraus lassen sich in Analogie zu Lemma 2.1.3.8 H^s-modifizierte Unschärferelationen aufstellen.

Satz 2.1.3.16 *Die resultierenden Unschärferelationen stimmen mit denen aus Lemma 2.1.3.8 bis auf die H^s-Norm und die Varianz des Operators A_a überein:*

$$\begin{aligned}
\mu_{s,\psi}(A_{b_2})^2 &\leq 4\left(\|\omega_1\hat{\psi}\|_s^2 - \mu_{s,\psi}(A_{b_1})^2\right) \\
&\quad\times\left(\left\|\omega_2\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\omega_1}\right\|_s^2 + \left\|\omega_1\frac{\partial\psi}{\partial\omega_2}\right\|_s^2 - 2\Re\left\langle\omega_2\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\omega_2}, \omega_1\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\omega_1}\right\rangle_{H^s} - \mu_{s,\psi}(A_\theta)^2\right)\ , \\
\mu_{s,\psi}(A_{b_1})^2 &\leq 4\left(\|\omega_2\hat{\psi}\|_s^2 - \mu_{s,\psi}(A_{b_2})^2\right) \\
&\quad\times\left(\left\|\omega_2\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\omega_1}\right\|_s^2 + \left\|\omega_1\frac{\partial\psi}{\partial\omega_2}\right\|_s^2 - 2\Re\left\langle\omega_2\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\omega_2}, \omega_1\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\omega_1}\right\rangle_{H^s} - \mu_{s,\psi}(A_\theta)^2\right)\ , \\
\mu_{s,\psi}(A_{b_1})^2 &\leq 4\left(\|\omega_1\hat{\psi}\|_s^2 - \mu_{s,\psi}(A_{b_1})^2\right)\left(\left\|\frac{s\|\omega\|^2}{1+\|w\|^2}\hat{\psi} + \nabla\hat{\psi}\cdot\omega\right\|_s^2 - \|\hat{\psi}\|_s^2 - \mu_{s,\psi}(A_a)^2\right)\ , \\
\mu_{s,\psi}(A_{b_2})^2 &\leq 4\left(\|\omega_2\hat{\psi}\|_s^2 - \mu_{s,\psi}(A_{b_2})^2\right)\left(\left\|\frac{s\|\omega\|^2}{1+\|w\|^2}\hat{\psi} + \nabla\hat{\psi}\cdot\omega\right\|_s^2 - \|\hat{\psi}\|_s^2 - \mu_{s,\psi}(A_a)^2\right)\ .
\end{aligned}$$

Beweis: Die Erwartungswerte

$$\mu_{s,\psi}(A_{b1}^2) = \|\omega_1\hat{\psi}\|_s^2 \quad \text{und} \quad \mu_{s,\psi}(A_{b2}^2) = \|\omega_2\hat{\psi}\|_s^2$$

sowie

$$\begin{aligned}\mu_{s,\psi}(A_\theta) &= \left\langle \omega_2 \frac{\partial\hat\psi}{\partial\omega_1} - \omega_1 \frac{\partial\hat\psi}{\partial\omega_2}, \omega_2 \frac{\partial\hat\psi}{\partial\omega_1} - \omega_1 \frac{\partial\hat\psi}{\partial\omega_2} \right\rangle_{H^s} \\ &= \left\|\omega_2 \frac{\partial\hat\psi}{\partial\omega_1}\right\|_s^2 + \left\|\omega_1 \frac{\partial\hat\psi}{\partial\omega_2}\right\|_s^2 - 2\Re \left\langle \omega_1 \frac{\partial\hat\psi}{\partial\omega_2}, \omega_2 \frac{\partial\hat\psi}{\partial\omega_1} \right\rangle_{H^s}\end{aligned}$$

folgen direkt und mit

$$\left\langle \nabla\hat\psi\cdot\omega, \hat\psi \right\rangle_{H^s} = -2\|\hat\psi\|_s^2 - 2\left\langle \hat\psi, \frac{s\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\hat\psi \right\rangle_{H^s} - \left\langle \hat\psi, \nabla\hat\psi\cdot\omega \right\rangle_{H^s}$$

hat man

$$\begin{aligned}\mu_{s,\psi}(A_a^2) &= \left\langle \hat\psi + \frac{s\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\hat\psi + \nabla\hat\psi\cdot\omega, \hat\psi + \frac{s\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\hat\psi + \nabla\hat\psi\cdot\omega \right\rangle_{H^s} \\ &= \|\hat\psi\|_s^2 + \left\|\frac{s\|\omega\|^2}{1+\|w\|^2}\hat\psi\right\|_s^2 + \|\nabla\hat\psi\cdot\omega\|_s^2 \\ &\quad + \left\langle \frac{s\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\hat\psi, \hat\psi \right\rangle_{H^s} + \left\langle \hat\psi, \frac{s\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\hat\psi \right\rangle_{H^s} \\ &\quad + \left\langle \nabla\hat\psi\cdot\omega, \hat\psi \right\rangle_{H^s} + \left\langle \hat\psi, \nabla\hat\psi\cdot\omega \right\rangle_{H^s} \\ &\quad + \left\langle \frac{s\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\hat\psi, \nabla\hat\psi\cdot\omega \right\rangle_{H^s} + \left\langle \nabla\hat\psi\cdot\omega, \frac{s\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\hat\psi \right\rangle_{H^s} \\ &= -\|\hat\psi\|_s^2 + \left\|\frac{s\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\hat\psi + \nabla\hat\psi\cdot\omega\right\|_s^2 .\end{aligned}$$

■

Satz 2.1.3.17 *Die infinitesimalen Operatoren auf $H^s(\mathbb{R}^2)$ stimmen bis auf A_a mit denen auf $L_2(\mathbb{R}^2)$ überein. Demzufolge ändern sich nur die Differentialgleichungen, die von A_a abhängen*

$$i\hat\psi + \frac{is\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\hat\psi + i\nabla\hat\psi\cdot\omega - \mu_1\hat\psi = it\left(\omega_l\hat\psi - \mu_2\hat\psi\right) \quad \textit{mit} \quad l = 1,2 \;.$$

Eine Lösung der Differentialgleichung für $l = 1$ ist durch

$$\hat\psi(\omega) = \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad \omega_2/\omega_1 \le 0 \\ \hat\phi\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\omega_1^{-1-i\mu_1-t\mu_2} e^{t\omega_1}(1+\|\omega\|^2)^{-s/2} \quad \textit{sonst} \end{cases}$$

und für $l = 2$ durch

$$\hat\psi(\omega) = \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad \omega_2/\omega_1 \le 0 \\ \hat\phi\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\omega_1^{-1-i\mu_1-t\mu_2} e^{t\omega_2}(1+\|\omega\|^2)^{-s/2} \quad \textit{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

Beweis: Der Nachweis erfolgt wie im Beweis des Satzes 2.1.3.10 durch Einsetzen in die Differentialgleichung. ■

Bemerkung 2.1.3.18 Das bedeutet, daß diese beiden Lösungen der Differentialgleichungen den Regularitätfaktor ausgleichen. Somit werden die Zulässigkeitsforderungen unabhänging von s sein.

Der nächste Satz gibt an, welche Bedingungen t, μ_1, μ_2 und ϕ erfüllen müssen, damit ψ ein Wavelet ist. Die Lösung wird auf $\omega_1, \omega_2 > 0$ eingeschränkt.

Satz 2.1.3.19 *Sei $\omega_1, \omega_2 > 0$. Damit die in Satz 2.1.3.17 angegebenen Lösungen der Differentialgleichungen die $H^s(\mathbb{R}^2)$-Zulässigkeitsbedingung erfüllen, muß*

$$l = 1: \qquad t < 0 \ , \quad t\mu_2 < -1 \ , \quad 0 < \int_0^\infty \frac{|\hat{\phi}(\eta)|^2}{1+\eta^2} d\eta < \infty$$

$$l = 2: \qquad t < 0 \ , \quad t\mu_2 < -1 \ , \quad 0 < \int_0^\infty \frac{|\hat{\phi}(\eta)|^2 \eta^{2+2t\mu_2}}{1+\eta^2} d\eta < \infty$$

gelten und $\hat{\phi}$ muß so gewält werden, daß $\hat{\psi}$ differenzierbar ist.

Beweis: Die $H^s(\mathbb{R}^2)$-Zulässigkeitsbedingung war

$$0 < \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 + \|\omega\|^2\right)^s \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\|\omega\|^2} d\omega =: M < \infty \ .$$

Im Fall $l = 1$ kann das Integral durch die Substitution $\omega_3 = \omega_2/\omega_1 > 0$, mit $\omega_1 d\omega_3 = d\omega_2$, getrennt werden

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\infty \frac{|\hat{\phi}(\omega_3)|^2}{1+\omega_3^2} d\omega_3 \int_0^\infty \omega_1^{-3-2t\mu_2} e^{2t\omega_1} d\omega_1 \\ &= \int_0^\infty \frac{|\hat{\phi}(\omega_3)|^2}{1+\omega_3^2} d\omega_3 \left(\frac{-1}{2t}\right)^{-2-2t\mu_2} \Gamma(-2-2t\mu_2) \ . \end{aligned}$$

Damit nun $0 < M < \infty$ gilt, müssen obige Bedingungen erfüllt sein.
Im Fall $l = 2$ kann man wieder $\omega_3 = \omega_2/\omega_1 > 0$ substituieren, allerdings mit $-\omega_2/\omega_3^2 d\omega_3 = d\omega_1$, und erhält

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\infty \frac{|\hat{\phi}(\omega_3)|^2 \omega_3^{2+2t\mu_2}}{1+\omega_3^2} d\omega_3 \int_0^\infty \omega_2^{-3-2t\mu_2} e^{2t\omega_2} d\omega_2 \\ &= \int_0^\infty \frac{|\hat{\phi}(\omega_3)|^2 \omega_3^{2+2t\mu_2}}{1+\omega_3^2} d\omega_3 \left(\frac{-1}{2t}\right)^{-2-2t\mu_2} \Gamma(-2-2t\mu_2) \ . \end{aligned}$$

Analog impliziert die Forderung $0 < M < \infty$ obige Bedingungen. ■

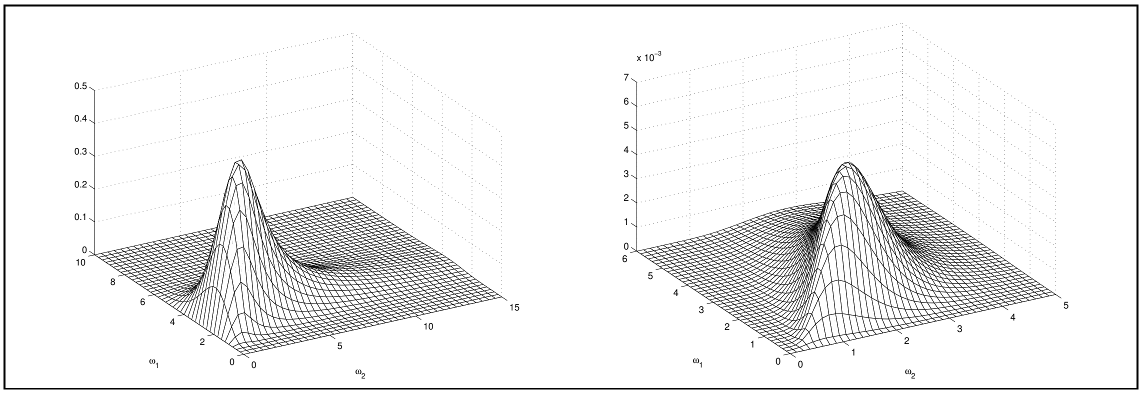

Abbildung 2.1: Links: Fourier-Transformierte eines minimierenden Wavelets bezüglich der $A_a - A_{b_1}$-Unschärferelation, Rechts: Fourier-Transformierte eines minimierenden Wavelets bezüglich der $A_a - A_{b_2}$-Unschärferelation.

Beispiel 2.1.3.20 Es werden zwei Wavelets als Lösungen der Differentialgleichungen in Satz 2.1.3.17 angegeben, Abbildung 2.1. Der Einfachheit wird die Darstellung auf der Fourierseite realisiert. Für $l = 1$ sei $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 3$, $t = -3$ und $s = 0$. Mit $\hat{\phi}(\omega) = \omega(1 + \omega^4)^{-1}$ folgt

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad \omega_1\omega_2 \leq 0 \\ \frac{\omega_2\omega_1^{11}e^{-3\omega_1}}{\|\omega\|_4^4} \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

Für $l = 2$ sei $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 2$, $t = -3$ und $s = 0$ und mit $\hat{\phi}(\omega) = \omega^{10}(1 + \omega^2)^{-4}$ hat man dann

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad \omega_1, \omega_2 \leq 0 \\ \frac{\omega_1^3\omega_2^{10}e^{-3\omega_2}}{\|\omega\|^8} \quad \text{für} \quad \omega_1, \omega_2 > 0 \end{cases} .$$

Diese Funktionen sind wegen $\mu_1 = 0$ reellwertig, was aber nur ein Spezialfall ist. Allgemein gilt $\mu_1 \in \mathbb{R}$. □

In Satz 2.1.3.10 wurden minimierende Lösungen der L_2-Unschärferelationen bezüglich A_θ und A_{b_l} angegeben. Für die Darstellung in H^s sollen nun die Bedingungen an $\hat{\phi}$ für eine vereinfachte Version ($\mu_2 = 0$, Fourier-Darstellung) notiert werden.

Satz 2.1.3.21 *Die Differentialgleichungen zur Minimierung der Unschärfen bezüglich A_θ und A_{b_l} für $l = 1, 2$ sind in der Fourier-Darstellung durch*

$$i\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\omega_1}\omega_2 - i\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\omega_2}\omega_1 - \mu_1\hat{\psi} = it\left(\omega_l\hat{\psi} - \mu_2\hat{\psi}\right) \mathit{mit} \quad l = 1, 2$$

gegeben. Für $l = 1$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 0 \quad \mathit{für} \quad \omega_2 < 0 \\ \hat{\phi}\left(\|\omega\|^2\right)(i\omega_1 + \omega_2)^{i\mu_2 t - \mu_1}e^{-\omega_2 t} \quad \mathit{sonst} \end{cases}$$

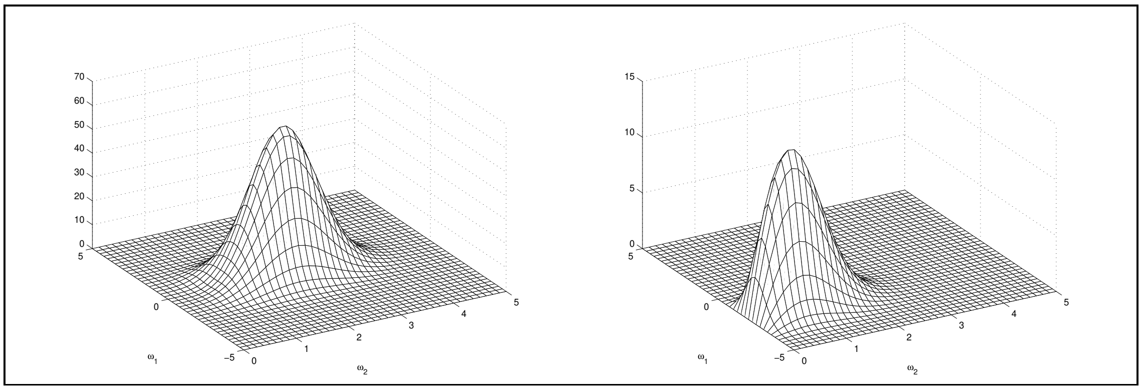

Abbildung 2.2: Links: Fourier-Transformierte eines minimierenden Wavelets bezüglich der $A_\theta - A_{b_1}$-Unschärferelation, Rechts: Fourier-Transformierte eines minimierenden Wavelets bezüglich der $A_\theta - A_{b_2}$-Unschärferelation.

und für $l = 2$

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r \quad \omega_2 < 0 \\ \hat{\phi}\left(\|\omega\|^2\right)(i\omega_1 + \omega_2)^{i\mu_2 t - \mu_1} e^{\omega_1 t} & sonst \end{cases} .$$

Beweis: Die Lösungen sind durch direktes Einsetzen, wie im Beweis des Satzes 2.1.3.10, nachprüfbar. ∎

Bemerkung 2.1.3.22 Falls $\mu_2 = 0$ gewählt wird, vereinfacht sich die Zulässigkeitsbedingung an ψ für $l = 1$ zu

$$0 < \int_{[0,\infty]\times\mathbb{R}} \left(1 + \|\omega\|^2\right)^s e^{-2\omega_2 t} \frac{|\hat{\phi}(\|\omega\|^2)|^2}{\|\omega\|^{2+2\mu_1}} d\omega < \infty$$

und für $l = 2$ zu

$$0 < \int_{[0,\infty]\times\mathbb{R}} \left(1 + \|\omega\|^2\right)^s e^{\omega_1 t} \frac{|\hat{\phi}(\|\omega\|^2)|^2}{\|\omega\|^{2+2\mu_1}} d\omega < \infty .$$

Beispiel 2.1.3.23 In Abbildung 2.2 werden zwei Wavelets dargestellt, die der vereinfachten Zulässigkeit gemäß Bemerkung 2.1.3.22 genügen. Die Darstellung wird wieder auf der Fourierseite realisiert. Für $l = 1, 2$ sei $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 0$, $t = -3$ und $s = 0$. Mit

$$\hat{\phi}(\omega) = (1 + \omega)^{-s/2} \omega^{2+\mu_1} e^{-|\omega|} = \omega e^{-|\omega|}$$

folgt für $l = 1$

$$\hat{\psi}(\omega) = (i\omega_1 + \omega_2)\|\omega\|^2 e^{-\|\omega\|^2} e^{\omega_2}$$

und für $l = 2$

$$\hat{\psi}(\omega) = (i\omega_1 + \omega_2)\|\omega\|^2 e^{-\|\omega\|^2} e^{-\omega_1} .$$

□

Bemerkung 2.1.3.24 Es wurden für verschiedene Fälle, $\mathbf{G}_{WH}$ in L_2 beziehungsweise H^s und $\mathbf{G}_{aff}$ in L_2 beziehungsweise H^s, die Unschärferelationen und die Lösungen für minimierende Vektoren hergeleitet und zugehörige Bedingungen analysiert. Hervorzuheben ist, daß im Darstellungsraum H^s modifizierte Differentialgleichungen und entsprechend modifizerte Relationen entstehen, die für $s = 0$ mit denen in L_2 zusammenfallen. Ein besonderer Freiheitsgrad im affinen Fall ist die freie Wahl der Funktion $\hat{\phi}$.

2.1.4 Unschärferelationen von $\mathbf{G}_{aWH}$ und $\mathbf{G}^d_{aWH}$

In diesem Abschnitt sollen die Unschärferelationen zu den Gruppen $\mathbf{G}_{aWH}$ und $\mathbf{G}^d_{aWH}$ hergeleitet werden. Als Darstellungsraum sei der $H^s(\mathbb{R}^n)$ gewählt. Die Darstellungen im $L_2(\mathbb{R}^n)$ und entsprechende Aussagen ergeben sich für $s = 0$.

Semidirekte affine Weyl-Heisenberg Gruppe

Die affine Weyl-Heisenberg Gruppe $\mathbf{G}_{aWH}$ ist gemäß ihrer Definition 1.2.5.1 topologisch isomorph zu $\mathbf{G}_{aWH} \cong \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}_+ \times SO(n)$. Nach der Methode der koadjungierten Orbits konnte man verschiedene Darstellungen unterscheiden. Die sogenannte Stone-von-Neumann Darstellung

$$\pi(q, p, a, R))f(x) = a^{-n/2} e^{ip(x-q)} f(R'((x-q)/a)) \quad ,$$

soll hier näher analysiert werden. Sie ist nach Lemma 1.2.6.5 nicht quadratintegrierbar. Wie in Abschnitt 1.2.7 bemerkt, ist es notwendig, zu Quotienten- oder sogenannten homogenen Räumen überzugehen. Das heißt, anstatt der vollen Gruppe $\mathbf{G}_{aWH}$ wird ein homogener Raum $X = \mathbf{G}_{aWH}/\Gamma$, der durch eine abgeschlossene Untergruppe Γ bestimmt ist, betrachtet. Sei nun $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum und die Gruppe unitärer Abbildungen $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ der Darstellungsraum von X, dann geht man zu einer modifizierten Darstellung von $\mathbf{G}_{aWH}$ in $\mathcal{H}$ über

$$\pi_\sigma : X \to \mathcal{U}(\mathcal{H}) \quad , \qquad \pi_\sigma = \pi \circ \sigma \ .$$

Bemerkung 2.1.4.1 Um die Quadratintegrierbarkeit abzusichern, können verschiedene Untergruppen Γ angesetzt werden. Es sollen Γ_1, Γ_2 und Γ_3 aus Abschnitt 1.2.7 gewählt werden. Die Existenz von zulässigen beziehungsweise strikt zulässigen Schnitten σ_β hängt von der Wahl der Einbettungsabbildungen β und ρ ab.

Es werden die Bedingungen für die strikte Zulässigkeit ausgearbeitet werden. Das nächste Lemma wird dazu benötigt.

Lemma 2.1.4.2 *Sei k ein Kovektor und p ein Vektor im $\mathbb{R}^n$ und sei weiter das Tensorprodukt durch $k \otimes p$ gegeben. Dann gilt*

$$\det(k \otimes p - Id) = (-1)^n (1 - \langle k, p \rangle) \ .$$

Beweis: Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich. Für $n = 2$ hat man

$$\det \begin{pmatrix} k_1p_1 - 1 & k_1p_1 \\ k_2p_1 & k_2p_2 - 1 \end{pmatrix} = 1 - k_1p_1 - k_2p_2 = 1 - \langle k, p \rangle \ .$$

Eine Induktion liefert schließlich $(-1)^n(1 - k_1p_1 - k_2p_2 - \ldots - k_np_n)$. ■

Der folgende Satz charakterisiert die H^s-Zulässigkeitsbedingung für die Darstellung des homogenen Raumes $X_1 = \mathbf{G}_{aWH}/\Gamma_1$.

Satz 2.1.4.3 *Sei $\psi \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $\Gamma = \Gamma_1$ und sei weiter σ_1 durch*

$$\sigma_1(q, p, R) = (q, p, \beta_1(q, p), R, 0)$$

gegeben und $\beta_1 : X_1 \to \Gamma_1$ eine stückweise differenzierbare Abbildung. Sei weiter $g = (q, p, R) \in X_1$, dann ist eine Darstellung durch

$$\hat{\pi}_{s,\sigma_1}(g)\hat{\psi}(\omega) = \Lambda_{-s}\hat{\pi}_{\sigma_1}(g)\Lambda_s\hat{\psi}(\omega) \quad =$$

$$\left(1 + \|\omega\|^2\right)^{-s/2} |\beta_1(p, R)|^{n/2} e^{-i\omega q} \left(1 + \|\beta_1(p, R)R'(\omega - p)\|^2\right)^{s/2} \hat{\psi}\left(\beta_1(p, R)R'(\omega - p)\right)$$

gegeben. Falls

$$0 < \int_{SO(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left(1 + \|k\|^2\right)^s}{|1 - \langle \Theta, Rk \rangle|} |\hat{\psi}(k)|^2 dk dm(R) < \infty \ ,$$

wobei Θ ein konstanter $(0, 1)$-Tensor (Kovektor) ist, dann ist σ_1 strikt zulässig.

Beweis: Wie in den anderen H^s-Zulässigkeitsbeweisen wird der H^s Fall auf den L_2 Fall zurückgeführt. Dieser Beweis beinhaltet eine knappe und nachvollziehbare Rechnung. Eine ausführliche Disskusion für den L_2 Fall kann in [KT93] eingesehen werden.
Zum Beweis: Es war $\Gamma_1 = \{(0, 0, a, 1, \varphi) \in \mathbf{G}_{aWH}\} \cong \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ und somit hat man $X_1 = \mathbf{G}_{aWH}/\Gamma_1 \cong \mathbb{R}^{2n} \times SO(n)$, das heißt X_1 kann durch $(q, p, R) \in \mathbb{R}^{2n} \times SO(n)$ parametrisiert werden. X_1 ist mit den Maßen

$$d\mu_L(q, p, R) = dqdpdm(R) = d\mu_R(q, p, R)$$

ausgestattet und hat somit unimodulare Struktur. Man hat zunächst folgende allgemeine Darstellung in $L_2(\mathbb{R}^n)$

$$\pi_{\sigma_1}(q, p, R)\psi(x) = |\beta_1(q, p, R)|^{-n/2} e^{ip(x-q)} \psi\left(R'(x - q)/\beta_1(q, p, R)\right) \ .$$

Sei $g \in X_1$ und $\psi \in H^s$, dann hat man mit der Transformationformel für die Darstellung in $H^s(\mathbb{R}^n)$

$$\pi_s(g) = \Lambda_{-s}\pi(g)\Lambda_s$$

folgende Darstellung von X_1 in H^s

$$\hat{\pi}_{s,\sigma_1}(g)\hat{\psi}(\omega) = \left(1 + \|\omega\|^2\right)^{-s/2} |\beta_1(p, R)|^{n/2} e^{-i\omega q} \hat{\phi}\left(\beta_1(p, R)R'(\omega - p)\right) \quad ,$$

mit $\hat{\phi}(\omega) = (1 + \|\omega\|^2)^{s/2}\,\hat{\psi}(\omega) \in L_2(\mathbb{R}^n)$, siehe auch Folgerung 1.2.6.6. Die Darstellung hängt nun stark von der Einbettung β_1 ab. Allgemein darf β_1 von q, p und R abhängen. Der Einfachheit wegen sei β_1 eingeschränkt auf $\beta_1(q,p,R) = \beta_1(p,R)$. Sei nun $f \in H^s$, dann ist die Transformierte bezüglich $\psi \in H^s$

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_\psi f(q,p,R) &= \langle f, \pi_{s,\sigma_1}(p,R)\psi\rangle_{H^s} \\
&= \langle \Lambda_s f, \Lambda_s \pi_{s,\sigma_1}(p,R)\psi\rangle_{L_2} \\
&= |\beta_1(p,R)|^{n/2} \left\langle (\Lambda_s f)^\wedge, e^{-i\cdot q}\hat{\phi}(\beta_1(p,R)R'(\cdot - p))\right\rangle_{L_2} \\
&= |\beta_1(q,R)|^{n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\Lambda_s f)^\wedge(\omega) e^{i\omega q}\bar{\hat{\phi}}(k_\omega)\, d\omega \quad ,
\end{aligned}$$

mit $k_\omega = k_\omega(p,R) = \beta_1(p,R)R'(\omega - p)$. Betrachte nun

$$F(x) = \int\limits_{X_1} \mathcal{W}_\psi f(q,p,R)\pi_{\sigma_1}(q,p,R)\psi(x)dqdpdm(R)$$

mit der Fourier-Transformierten (hierbei sei $\beta_1 = \beta_1(p,R)$)

$$\begin{aligned}
\hat{F}(\eta) &= (2\pi)^{n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{X_1} |\beta_1|^{n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\Lambda_s f)^\wedge(\omega) e^{i\omega q}\bar{\hat{\phi}}(k_\omega)\, d\omega \quad \times \\
&\qquad \pi_{s,\sigma_1}(q,p,R)\psi(x)e^{-i\eta x}dxdqdpdm(R) \\
&= (2\pi)^{n/2} \int\limits_{X_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\beta_1|^{n/2}(\Lambda_s f)^\wedge(\omega) e^{i\omega q}\bar{\hat{\phi}}(k_\omega)\, d\omega \quad \times \\
&\qquad (1 + \|\eta\|^2)^{-s/2} e^{-i\eta q}\hat{\phi}(k_\eta(p,R))\, dqdpdm(R) \\
&= (2\pi)^n \int\limits_{SO(n)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\left(|\beta_1|^{n/2}(\Lambda_s f)^\wedge(\cdot)\bar{\hat{\phi}}(k_\cdot)\right)(q)e^{-i\eta q}dq \quad \times \\
&\qquad \hat{\phi}(k_\eta(p,R))\, dpdm(R)(1 + \|\eta\|^2)^{-s/2} \\
&= (2\pi)^{3n/2} \int\limits_{SO(n)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\beta_1|^n (\Lambda_s f)^\wedge(\eta)\bar{\hat{\phi}}(k_\eta)\,\hat{\phi}(k_\eta(p,R))\, dpdm(R)(1 + \|\eta\|^2)^{-s/2} \\
&= (2\pi)^{3n/2}(\Lambda_s f)^\wedge(\eta) \int\limits_{SO(n)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\beta_1(p,R)|^n |\hat{\phi}(k_\eta(p,R))|^2\ dpdm(R)(1 + \|\eta\|^2)^{-s/2} \\
&= (2\pi)^{3n/2}\hat{f}(\eta) \int\limits_{SO(n)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\beta_1(p,R)|^n |\hat{\phi}(k_\eta(p,R))|^2\ dpdm(R)\ ,
\end{aligned}$$

mit $k_\eta(p,R) = \beta_1(p,R)R'(\eta - p)$. Für die Transformation $p \to k_\eta$ bezeichne

$$J_\eta = |\det(\nabla_p \cdot k)|$$

die Determinante der Jakobi-Matrix. Die folgenden Argumente werden nur für $n = 2$ formuliert. Die Verallgemeinerung ist aber mit Lemma 2.1.4.2 und Eulerwinkeldarstellung einzusehen. Mit $k_\eta(p, R) =: k$ ergibt sich wegen

$$\nabla_p \cdot k = \begin{pmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial p_1} & \frac{\partial k_2}{\partial p_1} \\ \frac{\partial k_1}{\partial p_2} & \frac{\partial k_2}{\partial p_2} \end{pmatrix} \quad \text{und mit} \quad k = \beta_1(p, R) \begin{pmatrix} \cos\theta(\eta_1 - p_1) - \sin\theta(\eta_2 - p_2) \\ \sin\theta(\eta_1 - p_1) + \cos\theta(\eta_2 - p_2) \end{pmatrix}$$

die Matrixdarstellung

$$\begin{aligned} \nabla_p \cdot k &= -\beta_1 R + \nabla_p \beta_1 \cdot (\eta - p)' R = -\beta_1 R + \beta_1^{-1} \nabla_p \beta_1 \cdot k'_\eta \\ &= \Big(- Id + \beta_1^{-2} \nabla_p \beta_1 \cdot k'_\eta R' \Big) \beta_1 R = \Big(- Id + \beta_1^{-2} \nabla_p \beta_1 \otimes R k_\eta \Big) \beta_1 R \end{aligned}$$

und somit die Determinante $J_\eta = |\beta_1(p, R)|^n |\det\Big(\beta_1^{-2} \nabla_p \beta_1 \otimes R k_\eta - Id\Big)|$. Nach Lemma 2.1.4.2 hat man $J_\eta = |\beta_1(p, R)|^n |1 - \big\langle \beta_1^{-2} \nabla_p \beta_1, Rk \big\rangle|$. Nach Definition 1.1.1.35 ist σ_1 strikt zulässig, falls $\hat{f}$ mit einer Konstanten multipliziert wird. Dies ist der Fall, falls $\beta_1^{-2} \nabla_p \beta_1$ nicht von η und p abhängt, also etwa $\beta_1^{-2} \nabla_p \beta_1 = -\Theta$ für einen konstanten Kovektor Θ und das heißt letztendlich

$$\begin{aligned} 0 &< \int\limits_{SO(n)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|\hat{\phi}(k)|^2}{|1 - \langle \Theta, Rk \rangle|} dk dm(R) \\ &= \int\limits_{SO(n)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + \|k\|^2)^s}{|1 - \langle \Theta, Rk \rangle|} |\hat{\psi}(k)|^2 < \infty \quad , \end{aligned}$$

was, wie schon bemerkt, die strike Zulässigkeit impliziert, da $\mathcal{A}_{\sigma_1}$ somit ein Vielfaches der Identität ist. ■

Bemerkung 2.1.4.4 Falls $\beta_1^{-2} \nabla_p \beta_1 = -\Theta$, so ist ein natürlicher Ansatz gegeben durch

$$\beta_1(p, R) = \frac{1}{\langle \Theta, p \rangle + \varphi(R)} ,$$

wobei φ eine hinreichend reguläre Funktion von R ist. Diese Wahl für β_1 ist keineswegs eindeutig - zeigt aber, wie im Fall der Vereinfachung, $\beta_1(q, p, R) = \beta_1(p, R)$, β_1 gewählt werden kann, um strikte Zulässigkeit abzusichern. Wählt man $\Theta = 0$, so impliziert dies, daß β_1 konstant sein muß. Dieser Fall reduziert die Zulässigkeitsbedingung auf die Annahme $\psi \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und korrespondiert zur Gabor-Analysis.

Der Beweis des Satzes 2.1.4.3 zeigt die Struktur des Operators $\mathcal{A}_{\sigma_1}$ über den nach der Definition 1.1.1.33 die Zulässigkeit abgesichert werden kann.

Folgerung 2.1.4.5 *Gelten die selben Voraussetzungen wie in Satz 2.1.4.3, dann ist der Operator $\mathcal{A}_{\sigma_1}$ bezüglich π_{s,σ_1} ein Faltungsoperator mit dem Faltungskern κ, der über die Fourier-Transformierte $\hat{\kappa}$ gegeben ist*

$$\hat{\kappa}(\eta) = (2\pi)^n \int\limits_{SO(n)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\beta_1(p, R)|^n |\hat{\phi}\left(\beta_1(p, R) R'(\eta - p)\right)|^2 \, dp dm(R) \quad .$$

$\hat{\kappa}$ ist eine nichtnegative Funktion. β_1 und ψ müssen so gewählt werden, daß $\hat{\kappa}$ beschränkt und echt positiv ist.

Bemerkung 2.1.4.6 Der Fall $s = 0$ stimmt mit der in [KT93, TAGM95] berechneten L_2-Zulässigkeitsbedingung überein.

Der folgende Satz beinhaltet Bedingungen an die Wahl von β und ψ, um strikte H^s-Zulässigkeit für $\Gamma = \Gamma_2$ beziehungsweise $\Gamma = \Gamma_3$ abzusichern. Auch in diesen Fällen werden die vorgeschlagenen Parametrisierungs- beziehungsweise Einbettungsfunktionen β nicht eindeutig sein. Vielmehr ist es schwierig, eine allgemeingültige Darstellung der Determinante zu finden.

Satz 2.1.4.7 *Sei $\psi \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Sei $\Gamma = \Gamma_2$ und $\sigma_2(q, a, R) = (q, \beta_2(a, R), a, R, 0)$, wobei $\beta_2 : X_2 \to \Gamma_2$ eine stückweise differenzierbare Abbildung ist. Falls die Darstellung durch $\pi_{s,\sigma_2} = \Lambda_{-s}\pi_{\sigma_2}\Lambda_s$ gegeben und v ein konstanter Kovektor ist, dann ist σ_2 strikt zulässig, falls*

$$0 < \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + \|k\|^2)^s}{|1 - \langle v, k\rangle\,|} |\hat{\psi}(k)|^2 dk < \infty \ .$$

Sei $\Gamma = \Gamma_3$ und $\sigma_3(p, q) = (q, p, \beta_3(p), \rho_3(p), 0)$, wobei $\beta_3 : X_3 \to \mathbb{R}_+$ und $\rho_3 : X_3 \to SO(n)$ zwei stückweise differenzierbare Abbildung sind. Falls die Darstellung durch $\pi_{s,\sigma_3} = \Lambda_{-s}\pi_{\sigma_3}\Lambda_s$ gegeben und T ein konstanter (1,2)-Tensor ist, dann ist σ_3 strikt zulässig, falls

$$0 < \int\limits_{k_\eta(\mathbb{R}^n)} \frac{(1 + \|k\|^2)^s}{|\det(T \cdot k - Id)|} |\hat{\psi}(k)|^2 dk < \infty \ .$$

Beweis: Führt man die H^s-Zulässigkeit durch $\hat{\phi}(\omega) = (1 + \|\omega\|^2)^{s/2}\hat{\psi}(\omega)$ auf die bekannte L_2-Zulässigkeit zurück, so kann das Ergebnis in [KT93] nachvollzogen werden. ∎

Bemerkung 2.1.4.8 Sei $\psi \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{\phi}(\omega) = (1 + \|\omega\|^2)^{s/2}\hat{\psi}(\omega)$, dann sind die in Satz 2.1.4.7 verwendeten modifizierten Stone-von-Neumann Darstellungen $\pi_{s,\sigma_2} = \Lambda_{-s}\pi_{\sigma_2}\Lambda_s$ und $\pi_{s,\sigma_3} = \Lambda_{-s}\pi_{\sigma_3}\Lambda_s$ in $H^s(\mathbb{R}^n)$ explizit durch

$$\hat{\pi}_{s,\sigma_2}(g)\hat{\psi}(\omega) = (1 + \|\omega\|^2)^{-s/2} a^{n/2} e^{-i\omega q} \hat{\phi}\left(aR'(\omega - \beta_2(q, a, R))\right) \ ,$$

mit $g \in X_2$ und

$$\hat{\pi}_{s,\sigma_3}(g)\hat{\psi}(\omega) = (1 + \|\omega\|^2)^{-s/2} \beta_3(p)^{n/2} e^{-i\omega q} \hat{\phi}\left(\beta_3(p)\rho_3(p)'(\omega - p)\right) \ ,$$

mit $g \in X_3$, gegeben.

Bemerkung 2.1.4.9 Im Fall Γ_2 agiert $\mathbf{G}_{aWH}$ auf X_2 von rechts. Es ist somit das rechtsinvariante Maß $dqdadm(R)/a$ zu wählen. Eine mögliche Struktur von β_2 ist durch

$$\beta_2(a,R) = \frac{a^{-1}Rv'}{\|v\|^2} + \varphi(S) \ ,$$

gegeben, wobei $S \in SO(n-1)$, v ein $SO(n-1)$-invarianter Kovektor und φ eine hinreichend glatte Funktion auf $SO(n-1)$ ist. Im Fall Γ_3 ergibt sich unter vereinfachenden Annahmen folgende Struktur für β_3 und ρ_3

$$\beta_3(p)^{-1}\rho_3(p) = T \cdot p + V \ ,$$

wobei T ein $(1,2)$-Tensor und V ein $(1,1)$-Tensor ist. Die strikte Zulässigkeit hängt von der Wahl von T und V ab. Zum Beispiel $\beta_3 = 1$ und $\rho_3 = Id$, das heißt $T = 0$ und $V \neq 0$. Dieser Fall führt zur Gabor-Analysis.

Nachdem die Bedingungen für die strikte Zulässigkeit formuliert wurden, sollen nun die zugehörigen klassischen Unschärferelationen für die drei Fälle hergeleitet werden. Die Herleitung sei auf $n = 2$ beschränkt. Die Einbettungsfunktionen werden auch weiter vereinfacht werden, um die Berechnungen übersichtlich zu halten.

Satz 2.1.4.10 *Sei* $\mathbf{G}_{aWH}$ *die zugrundeliegende Gruppe und* π_{s,σ_1} *die quadratintegrierbare Darstellung auf* X_1 *in* $H^s(\mathbb{R}^2)$. *Sei weiter*

$$\beta_1(p,R) = \beta_1(p) = \frac{1}{\langle \Theta, p\rangle + \tau} = \frac{1}{\vartheta_1 p_1 + \vartheta_2 p_2 + \tau} \ ,$$

mit $\tau > 0$, *dann sind die zugehörigen infinitesimalen Operatoren durch*

$$A_{p_j}^{\sigma_1} = \vartheta_j A_a - A_{p_j} \ , \quad A_{q_j}^{\sigma_1} = A_{b_j} \ , \quad A_{\theta}^{\sigma_1} = A_{\theta}$$

gegeben. Diese Operatoren sind selbstadjungiert und es gelten folgende Kommutatorrelationen

$$[A_{p_1}^{\sigma_1}, A_{p_2}^{\sigma_1}] = i(\vartheta_2 A_{p_1} - \vartheta_1 A_{p_2}) \ , \quad [A_{p_j}^{\sigma_1}, A_{q_k}^{\sigma_1}] = i(\vartheta_j A_{b_k} - \delta_{jk} A_{\varphi}) \ ,$$

$$[A_{p_1}^{\sigma_1}, A_{\theta}^{\sigma_1}] = -iA_{p_2} \ , \quad [A_{p_2}^{\sigma_1}, A_{\theta}^{\sigma_1}] = -iA_{p_1} \ ,$$

$$[A_{q_1}^{\sigma_1}, A_{q_2}^{\sigma_1}] = 0 \ , \quad [A_{q_1}^{\sigma_1}, A_{\theta}^{\sigma_1}] = iA_{b_2} \ , \quad [A_{q_2}^{\sigma_1}, A_{\theta}^{\sigma_1}] = iA_{b_1} \quad .$$

Bezüglich des homogenen Raumes X_1 *existieren somit neun nichttriviale Unschärferelationen.*

Beweis: Zunächst werden die Operatoren berechnet. Die Einbettungsfunktion β_1 wurde zu diesem Zweck weiter vereinfacht. Sei $\varphi(R) = \tau > 0$,dann hat man

$$\beta_1(p) = \frac{1}{\varphi_1 p_1 + \varphi_2 p_2 + \tau}.$$

Sei zur Kürze der Notation $\lambda = (1+\|\omega\|^2)^{-s/2}$. Somit folgt mit $g \in X_1$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^{\sigma_1}_{p_1}\hat{\psi}(\omega) &= \frac{\partial}{\partial p_1}\hat{\pi}_{s,\sigma_1}(g)\,\hat{\psi}(\omega)\Big|_e \\
&= \lambda\frac{-\vartheta_1}{\tau^2}\left(1+\frac{\|\omega\|^2}{\tau^2}\right)^{s/2}\hat{\psi}\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \\
&\quad -\lambda\frac{s}{2\tau}\left(-\frac{2\vartheta_1\|\omega\|^2}{\tau^3}-\frac{2\omega_1}{\tau^2}\right)\left(1+\frac{\|\omega\|^2}{\tau^2}\right)^{s/2-1}\hat{\psi}\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \\
&\quad +\lambda\frac{1}{\tau}\left(1+\frac{\|\omega\|^2}{\tau^2}\right)^{s/2}\nabla\hat{\psi}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)\cdot\left(-\frac{\vartheta_1}{\tau^2}\omega_1-\frac{1}{\tau},-\frac{\vartheta_1}{\tau^2}\omega_2\right)' \quad .
\end{aligned}$$

Zu weiteren Vereinfachungszwecken wählt man $\tau = 1$ und erhält weiter

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^{\sigma_1}_{p_1}\hat{\psi}(\omega) &= -\vartheta_1\hat{\psi}(\omega) - s\frac{\vartheta_1\|\omega\|^2-\omega_1}{1+\|\omega\|^2}\hat{\psi}(\omega) + \nabla\hat{\psi}(\omega)\cdot(-\vartheta_1\omega_1-1,-\vartheta_1\omega_2)' \\
&= \vartheta_1\left(-\hat{\psi}(\omega)-\frac{s\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\hat{\psi}-\nabla\hat{\psi}(\omega)\cdot\omega\right)-\frac{s\omega_1}{1+\|\omega\|^2}\hat{\psi}(\omega)-\frac{\partial}{\partial\omega_1}\hat{\psi}(\omega)
\end{aligned}$$

und mit $A^{\sigma_1}_{p_1} = i\tilde{A}^{\sigma_1}_{p_1}$ ist $A^{\sigma_1}_{p_1}$ selbstadjungiert, denn mit A_a aus dem affinen und A_{p_1} aus dem Heisenberg Fall gilt $A^{\sigma_1}_{p_1} = \vartheta_1 A_a - A_{p_1}$. Das selbe Ergebnis erhält man für die Ableitung nach p_2, das heißt $A^{\sigma_1}_{p_2} = \vartheta_2 A_a - A_{p_2}$. Für die Ableitungen nach q_j hat man

$$\tilde{A}^{\sigma_1}_{q_j}\hat{\psi}(\omega) = \lambda(1+\|\omega\|^2)^{s/2}\hat{\psi}(\omega)(-i\omega_j) = -i\omega_j\hat{\psi}(\omega)$$

und mit $A^{\sigma_1}_{q_j} = i\tilde{A}^{\sigma_1}_{q_j} = A_{b_j}$ ist $A^{\sigma_1}_{q_j}$ für $j = 1,2$ selbstadjungiert. Da $n = 2$ wird die Rotation über einen Eulerwinkel θ parametrisiert. Der infinitesimale Operator ist demnach für $\tau = 1$

$$\begin{aligned}
A^{\sigma_1}_{\theta}\hat{\psi}(\omega) &= \frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\pi}_{s,\sigma_1}(g)\,\hat{\psi}(\omega)\Big|_e \\
&= \lambda\frac{1}{\tau}\left(1+\frac{\|\omega\|^2}{\tau^2}\right)^{s/2}\nabla\hat{\psi}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)\cdot\left(-\frac{\omega_2}{\tau},\frac{\omega_1}{\tau}\right) \\
&= \nabla\hat{\psi}(\omega)\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} \quad ,
\end{aligned}$$

und deshalb wegen $A^{\sigma_1}_{\theta} = A_\theta$ auch selbstadjungiert. Bei der Bestimmung der Kommutatorrelationen wird auf schon bekannte Kommutatorbeziehungen des Abschnittes 2.1.3 zurückgegriffen. Als erstes soll die neuartige Relation $[A^{\sigma_1}_{p_1}, A^{\sigma_1}_{p_2}]$ bestimmt werden. Mat hat sofort

$$\begin{aligned}
[A^{\sigma_1}_{p_1}, A^{\sigma_1}_{p_2}] &= [\vartheta_1 A_a - A_{p_1}, \vartheta_2 A_a - A_{p_2}] = \vartheta_1[A_{p_2}, A_a] + \vartheta_2[A_a, A_{p_1}] + [A_{p_1}, A_{p_2}] \\
&= \vartheta_1[A_{p_2}, A_a] - \vartheta_2[A_{p_1}, A_a] \; .
\end{aligned}$$

Der Kommutator von A_{p_j} und A_a ist noch unbekannt. Für $j = 2$ folgt zunächst

$$[A_{p_2}, A_a]\hat{\psi}(\omega) = \frac{s\omega_2}{1+\|\omega\|^2}\left(\frac{1+(1+s)\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\hat{\psi}+\nabla\hat{\psi}\cdot w\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\partial}{\partial\omega_2}\left(\frac{1+(1+s)\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\hat\psi+\nabla\hat\psi\cdot w\right)\\
&-\frac{1+(1+s)\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\left(\frac{s\omega_2}{1+\|\omega\|^2}\hat\psi+\frac{\partial}{\partial\omega_2}\hat\psi\right)\\
&-\nabla\left(\frac{s\omega_2}{1+\|\omega\|^2}\hat\psi+\frac{\partial}{\partial\omega_2}\hat\psi\right)\cdot w\\
=\;&\frac{s\omega_2}{1+\|\omega\|^2}\nabla\hat\psi\cdot w+\underbrace{\frac{\partial}{\partial\omega_2}\left(\frac{1+(1+s)\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\hat\psi+\nabla\hat\psi\cdot w\right)}_{=:M_1}\\
&-\frac{1+(1+s)\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\frac{\partial}{\partial\omega_2}\hat\psi-\underbrace{\nabla\left(\frac{s\omega_2}{1+\|\omega\|^2}\hat\psi+\frac{\partial}{\partial\omega_2}\hat\psi\right)\cdot w}_{=:M_2}\quad .
\end{aligned}
$$

Für M_1 und M_2 errechnet man

$$
\begin{aligned}
M_1 \;=\;& \frac{(1+s)2\omega_2(1+\|\omega\|^2)-(1+(1+s)\|\omega\|^2)2\omega_2}{(1+\|\omega\|^2)^2}\hat\psi+\frac{1+(1+s)\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\frac{\partial}{\partial w_2}\hat\psi\\
&+\frac{\partial}{\partial\omega_2}\nabla\hat\psi\cdot w+\nabla\hat\psi\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
M_2 \;=\;& \left(-\frac{2s\omega_2\omega_1}{(1+\|\omega\|^2)^2}\hat\psi+\frac{s\omega_2}{1+\|\omega\|^2}\frac{\partial}{\partial\omega_1}\hat\psi+\frac{\partial^2}{\partial\omega_1\partial\omega_2}\hat\psi\right.\;,\\
&\left.\frac{s(1+\|\omega\|^2)-2s\omega_2^2}{(1+\|\omega\|^2)^2}\hat\psi+\frac{s\omega_2}{1+\|\omega\|^2}\frac{\partial}{\partial\omega_2}\hat\psi+\frac{\partial^2}{\partial\omega_2^2}\hat\psi\right)\cdot\omega\\
=\;& \frac{s\omega_2}{1+\|\omega\|^2}\nabla\hat\psi\cdot\omega+\frac{\partial}{\partial\omega_2}\nabla\hat\psi\cdot\omega+\frac{s\omega_2(1+\|\omega\|^2)-2s\omega_2\|\omega\|^2}{(1+\|\omega\|^2)^2}\hat\psi
\end{aligned}
$$

und damit folgt für den Kommutator

$$
\begin{aligned}
&[A_{p_2},A_a]\hat\psi \;=\\
=\;& \frac{\partial}{\partial\omega_2}\hat\psi+\\
&\frac{(1+s)2\omega_2(1+\|\omega\|^2)-s\omega_2(1+\|\omega\|^2)-(1+(1+s)\|\omega\|^2-s\|\omega\|^2)2\omega_2}{(1+\|\omega\|^2)^2}\hat\psi\\
=\;& \frac{(1+s)2\omega_2-s\omega_2-2\omega_2}{1+\|\omega\|^2}\hat\psi+\frac{\partial}{\partial\omega_2}\hat\psi=\frac{s\omega_2}{1+\|\omega\|^2}\hat\psi+\frac{\partial}{\partial\omega_2}\hat\psi=-iA_{p_2}\hat\psi\quad .
\end{aligned}
$$

Analog gilt $[A_{p_1},A_a]=-iA_{p_1}$ und damit folgt insgesamt

$$[A^{\sigma_1}_{p_1},A^{\sigma_1}_{p_2}]=\vartheta_1[A_{p_2},A_a]-\vartheta_2[A_{p_1},A_a]=i\left(\vartheta_2A_{p_1}-\vartheta_1A_{p_2}\right)\quad .$$

Die Kommutatorbeziehung $[A_{p_j}^{\sigma_1}, A_\theta^{\sigma_1}]$ ist ebenfalls noch unbekannt. Man hat vorerst

$$[A_{p_j}^{\sigma_1}, A_\theta^{\sigma_1}] = \vartheta_j[A_a, A_\theta] - [A_{p_j}, A_\theta] = -[A_{p_j}, A_\theta]$$

und muß somit $[A_{p_j}, A_\theta]$ bestimmen

$$\begin{aligned}
[A_{p_j}, A_\theta]\hat{\psi} &= \\
&= A_{p_j}\left(\nabla\hat{\psi}\cdot\begin{pmatrix}-\omega_2\\ w_1\end{pmatrix}\right) - iA_\theta\left(\frac{s\omega_j}{1+\|\omega\|^2}\hat{\psi} + \frac{\partial}{\partial\omega_j}\hat{\psi}\right)\\
&= i\left\{\frac{s\omega_j}{1+\|\omega\|^2}\left(\omega_1\frac{\partial}{\partial\omega_2}\hat{\psi} - \omega_2\frac{\partial}{\partial\omega_1}\hat{\psi}\right) + \frac{\partial}{\partial w_j}\left(\omega_1\frac{\partial}{\partial\omega_2}\hat{\psi} - \omega_2\frac{\partial}{\partial\omega_1}\hat{\psi}\right) - \right.\\
&\quad \left.\left(\frac{\partial}{\partial\omega_1}\left(\frac{s\omega_j}{1+\|\omega\|^2}\hat{\psi} + \frac{\partial}{\partial\omega_j}\hat{\psi}\right), \frac{\partial}{\partial\omega_2}\left(\frac{s\omega_j}{1+\|\omega\|^2}\hat{\psi} + \frac{\partial}{\partial\omega_j}\hat{\psi}\right)\right)\cdot\begin{pmatrix}-\omega_2\\ w_1\end{pmatrix}\right\}\\
&= i\left\{\frac{\partial}{\partial w_j}\omega_1\cdot\frac{\partial}{\partial w_2}\hat{\psi} - \frac{\partial}{\partial w_j}\omega_2\cdot\frac{\partial}{\partial\omega_1}\hat{\psi} + \right.\\
&\quad \left.\omega_2\hat{\psi}\left(\frac{s\frac{\partial}{\partial\omega_1}w_j}{1+\|\omega\|^2} - \frac{2s\omega_j\omega_1}{(1+\|\omega\|^2)^2}\right) - \omega_1\hat{\psi}\left(\frac{s\frac{\partial}{\partial\omega_2}w_j}{1+\|\omega\|^2} - \frac{2s\omega_j\omega_2}{(1+\|\omega\|^2)^2}\right)\right\} \quad .
\end{aligned}$$

Für $j = 1$ beziehungweise $j = 2$ erhält

$$[A_{p_1}, A_\theta]\hat{\psi} = i\left\{\frac{\partial}{\partial\omega_2}\hat{\psi} + \frac{s\omega_2}{1+\|\omega\|^2}\hat{\psi}\right\} = iA_{p_2}\hat{\psi}$$

beziehungsweise

$$[A_{p_2}, A_\theta]\hat{\psi} = i\left\{\frac{\partial}{\partial\omega_1}\hat{\psi} + \frac{s\omega_1}{1+\|\omega\|^2}\hat{\psi}\right\} = iA_{p_1}\hat{\psi} \ ,$$

das heißt insgesamt

$$[A_{p_1}^{\sigma_1}, A_\theta^{\sigma_1}] = -iA_{p_2} \quad \text{und} \quad [A_{p_2}^{\sigma_1}, A_\theta^{\sigma_1}] = -iA_{p_1} \ .$$

Die Kommutatorbeziehung $[A_{p_j}^{\sigma_1}, A_{q_k}]$ ist bekannt und auch leicht einzusehen

$$[A_{p_j}^{\sigma_1}, A_{q_j}^{\sigma_1}] = [\vartheta_j A_a - A_{p_j}, A_{b_k}] = \vartheta_j[A_a, A_{b_k}] - [A_{p_j}, A_{b_k}] = i\vartheta_j A_{b_k} - i\delta_{jk}A_\varphi \ .$$

Entsprechendes gilt für

$$\begin{aligned}
\left[A_{q_1}^{\sigma_1}, A_\theta^{\sigma_1}\right] &= [A_{b_1}, A_\theta] = iA_{b_2}\\
\left[A_{q_2}^{\sigma_1}, A_\theta^{\sigma_1}\right] &= [A_{b_2}, A_\theta] = iA_{b_1} \quad .
\end{aligned}$$

Und letztendlich existieren mit $[A_{q_1}^{\sigma_1}, A_{q_2}^{\sigma_1}] = [A_{b_1}, A_{b_2}] = 0$ neun nichttriviale Unschärferelationen. ∎

Bemerkung 2.1.4.11 Die in Satz 2.1.4.10 angegebenen infinitesimalen Operatoren und die resultierenden Kommutatorbeziehungen hängen stark von der Struktur der Einbettungsfunktion β_1 ab. Hängt die Einbettung β_1 der Dilation nur von p ab, so ist zu beobachten, daß die infinitesimalen Operatoren $A_{p_j}^{\sigma_1}$ eine Kombination der ursprünglichen Operatoren A_a und A_{p_j} ist.
Da die Berechnung von Kommutorbeziehungen und somit die Bestimmung minimierender Vektoren nur mit konkret vorgegebenen Einbettungsfunktionen realisierbar ist, werden nur die vorgeschlagenen, stark eingeschränkten Einbettungsfunktionen als "Testbeispiele" gewählt.
Allgemein hängt die Einbettung von X_1 in $\mathbf{G}_{aWH}$ von q, p und R ab, daß heißt $\beta_1 = \beta_1(q, p, R)$. Falls A_k die infinitesimalen Operatoren der Gruppe $\mathbf{G}_{aWH}$ sind, so ist die allgemeine Struktur der infinitesimalen Operatoren bezüglich X_1 durch eine Transformation Φ_{β_1} bestimmt,

$$A_k^{\sigma_1} = \Phi_{\beta_1}(A_1, \ldots, A_r) \ .$$

Man kann sich überlegen, daß *ker* $\Phi_{\beta_1} \cong \mathcal{G}_{\Gamma_1}$ gilt, wobei $\mathcal{G}_{\Gamma_1}$ die zu Γ_1 gehörige Lie-Algebra ist.

Bemerkung 2.1.4.12 Für β_1 aus Satz 2.1.4.10 kann die singuläre Basistransformation Φ_{β_1} explizit angegeben werden. Sei $n = 2$ und bezeichne

$$A = (A_a, A_{p_1}, A_{p_2}, A_{q_1}, A_{q_2}, A_\theta, A_\varphi)'$$

den Vektor der infinitesimalen Operatoren bezüglich $\mathbf{G}_{aWH}$. Falls A^{σ_1} den selben Vektor bezüglich X_1 bezeichnet, dann ist die Transformation ϕ_{β_1} eine lineare Transformation

$$L_1 A = A^{\sigma_1}$$

und durch

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vartheta_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vartheta_2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Bevor die zugehörigen Unschärferelationen formuliert werden, sollen noch die Einbettungen und die Kommutarbeziehungen bezüglich der homogenen Räume X_2 und X_3 hergeleitet werden.

Satz 2.1.4.13 *Sei $\mathbf{G}_{aWH}$ die zugrundeliegende Gruppe und π_{s,σ_2} die quadratintegrierbare Darstellung auf X_2 in $H^s(\mathbb{R}^2)$. Sei weiter*

$$\beta_2(a, R) = a^{-1} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

mit $a \in \mathbb{R}_+$ und $\theta \in [0, 2\pi)$, dann sind die infinitesimalen Operatoren durch

$$A_a^{\sigma_2} = A_a + A_{p_2} \ , \quad A_{q_j}^{\sigma_2} = A_{b_j} \text{ und } A_\theta^{\sigma_2} = A_\theta + A_{p_1} \ .$$

Für diese selbstadjungierten Operatoren gelten die Kommutatorrelationen

$$[A_a^{\sigma_2}, A_{q_j}^{\sigma_2}] = iA_{b_j} + i\delta_{2j}A_\varphi \ , \quad [A_a^{\sigma_2}, A_\theta^{\sigma_2}] = 2iA_{p_1} \ ,$$

$$[A_\theta^{\sigma_2}, A_{q_1}^{\sigma_2}] = iA_{b_2} + iA_\varphi \ , \quad [A_\theta^{\sigma_2}, A_{q_2}^{\sigma_2}] = -iA_{b_1} \text{ und } [A_{q_1}^{\sigma_2}, A_{q_2}^{\sigma_2}] = 0 \ .$$

Bezüglich des homogenen Raumes X_2 existieren für $n = 2$ fünf Unschärferelationen.

Beweis: Sei $n = 2$, $v = (0,1)$, $S \in SO(n-1)$ und $\tau = -1$. Dann kann man $\varphi(S) = (0,\tau)' = (0,-1)'$ wählen. Damit entspricht β_2 der Bemerkung 2.1.4.9

$$\beta_2(a,R) = a^{-1}(-\sin\theta, \cos\theta)' - (0,1)' = \frac{a^{-1}Rv'}{\|v\|^2} + \varphi(S) \ .$$

Mit dieser Einbettung werden nun mit $\lambda = (1 + \|\omega\|^2)^{-s/2}$ die Differentiale der Darstellung bestimmt

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_a^{\sigma_2}\hat{\psi}(\omega) &= \frac{\partial}{\partial a}\hat{\pi}_{s,\sigma_2}\hat{\psi}(\omega)\Big|_e = \lambda(1+\|\omega\|^2)^{s/2}\hat{\psi}(\omega) + \\
&\quad \lambda s(\|\omega\|^2 + \omega_2)(1+\|\omega\|^2)^{s/2-1}\hat{\psi}(\omega) + \lambda(1+\|\omega\|^2)^{s/2}\nabla\hat{\psi}\cdot\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2+1\end{pmatrix} \\
&= \hat{\psi}(\omega) + \frac{s\|\omega\|^2}{1+\|\omega\|^2}\hat{\psi}(\omega) + \nabla\hat{\psi}\cdot\omega + \frac{s\omega_2}{1+\|\omega\|^2}\hat{\psi}(\omega) + \frac{\partial}{\partial\omega_2}\hat{\psi}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_\theta^{\sigma_2}\hat{\psi}(\omega) &= \frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\pi}_{s,\sigma_2}\hat{\psi}(\omega)\Big|_e = \lambda s\omega_1(1+\|\omega\|^2)^{s/2-1}\hat{\psi}(\omega) + \\
&\quad \lambda(1+\|\omega\|^2)^{s/2}\nabla\hat{\psi}\cdot\begin{pmatrix}\omega_2+1\\ -\omega_1\end{pmatrix} \\
&= \frac{s\omega_1}{1+\|\omega\|^2}\hat{\psi}(\omega) + \nabla\hat{\psi}\cdot\begin{pmatrix}\omega_2\\ -\omega_1\end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial\omega_1}\hat{\psi}(\omega)
\end{aligned}$$

und man erhält

$$i\tilde{A}_a^{\sigma_2} =: A_a^{\sigma_2} = A_a + A_{b_1} \quad \text{und} \quad i\tilde{A}_\theta^{\sigma_2} =: A_\theta^{\sigma_2} = A_\theta + A_{p_1} \quad .$$

Weiter hat man sofort

$$\tilde{A}_{q_j}^{\sigma_2}\hat{\psi}(\omega) = \frac{\partial}{\partial q_j}\hat{\pi}_{s,\sigma_2}\hat{\psi}(\omega)\Big|_e = -i\omega_j\hat{\psi}(\omega\ ) \text{ und damit } iA_{q_j}^{\sigma_2} =: A_{q_j}^{\sigma_2} = A_{b_j} \quad .$$

Die Kommutatorbeziehungen folgen direkt

$$[A_a^{\sigma_2}, A_{q_j}^{\sigma_2}] = [A_a, A_{b_j}] + [A_{p_2}, A_{b_j}] = iA_{b_j} + i\delta_{j2}A_\varphi \ ,$$

$$[A^{\sigma_2}_{q_1}, A^{\sigma_2}_{q_2}] = [A_{b_1}, A_{b_2}] = 0 \ ,$$
$$[A^{\sigma_2}_{a}, A^{\sigma_2}_{\theta}] = [A_{p_2}, A_{\theta}] + [A_a, A_{p_1}] = 2iA_{p_1} \ ,$$
$$[A^{\sigma_2}_{\theta}, A^{\sigma_2}_{q_1}] = [A_{\theta}, A_{b_1}] + [A_{p_1}, A_{b_1}] = iA_{b_2} + iA_{\varphi} \quad \text{und}$$
$$[A^{\sigma_2}_{\theta}, A^{\sigma_2}_{q_2}] = [A_{\theta}, A_{b_2}] + [A_{p_1}, A_{b_2}] = -iA_{b_1} \ ,$$

es existieren somit fünf nichttriviale Unschärferelationen. ■

Bemerkung 2.1.4.14 Die zu Γ_2 gehörige singuläre Basistransformation bezüglich β_2 ist durch

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Der nächste Satz beinhaltet letztendlich die infinitesimalen Operatoren und Kommutatorbeziehungen von X_3. Anschließend werden die zugehörigen Diffenrentialgleichungen formuliert und Lösungen gesucht.

Satz 2.1.4.15 *Sei $\mathbf{G}_{aWH}$ die zugrundeliegende Gruppe und π_{s,σ_3} die quadratintegrierbare Darstellung auf X_3 in $H^s(\mathbb{R}^2)$. Sei Θ ein konstanter Kovektor und*

$$\beta_3(p) = \frac{1}{\sqrt{\langle\Theta, p\rangle^2 + 1}} \quad \text{und} \quad \rho_3(p) = \frac{1}{\sqrt{\langle\Theta, p\rangle^2 + 1}} \begin{pmatrix} 1 & -\langle\Theta, p\rangle \\ \langle\Theta, p\rangle & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

dann sind die zu X_3 gehörigen infinitesimalen Operatoren durch

$$A^{\sigma_3,\rho_3}_{p_j} = \vartheta_j A_\theta - A_{p_j} \ , j = 1,2 \ , \ A^{\sigma_3,\rho_3}_{q_k} = A_{b_k} \ , k = 1,2$$

gegeben. Die Kommutatorrelationen dieser selbstadjungierten Operatoren sind

$$[A^{\sigma_3,\rho_3}_{p_1}, A^{\sigma_3,\rho_3}_{p_2}] = i\vartheta_1 A_{p_1} - i\vartheta_2 A_{p_2} \ , \quad [A^{\sigma_3,\rho_3}_{q_1}, A^{\sigma_3,\rho_3}_{q_2}] = 0 \ \text{ und}$$

$$[A^{\sigma_3,\rho_3}_{p_j}, A^{\sigma_3,\rho_3}_{q_k}] = \begin{cases} -i\vartheta_j A_{b_2} - i\delta_{j1} A_\varphi & \text{für } k = 1 \\ -i\vartheta_j A_{b_1} - i\delta_{j2} A_\varphi & \text{für } k = 2 \end{cases} \ ,$$

das heißt, es existieren fünf nichttriviale Unschärferelationen.

Beweis: Es ist vorab zu testen, ob die Einbettungen β_3 und ρ_3 der vereinfachenden Bemerkung 2.1.4.9 entsprechen. ρ_3 ist eine orthogonale Transformation mit $\det \rho_3(p) = +1$

$$\rho_3(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\langle\Theta,p\rangle^2+1}} & \frac{-\langle\Theta,p\rangle}{\sqrt{\langle\Theta,p\rangle^2+1}} \\ \frac{\langle\Theta,p\rangle}{\sqrt{\langle\Theta,p\rangle^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{\langle\Theta,p\rangle^2+1}} \end{pmatrix} \ ,$$

das heißt $\rho_3 : \mathbb{R}^2 \to SO(2)$. Wählt man

$$\beta_3(p) = \frac{1}{\sqrt{\langle \Theta, p \rangle^2 + 1}} \ ,$$

folgt mit $\Theta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$

$$\begin{aligned} \beta_3^{-1}(p)\rho(p) &= \begin{pmatrix} 1 & -\langle \Theta, p\rangle \\ \langle \Theta, p\rangle & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\langle \Theta, p\rangle \\ \langle \Theta, p\rangle & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\Theta \\ \Theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T \cdot p + V \ . \end{aligned}$$

Die infinitesimalen Operatoren ergeben sich nun der Reihe nach (wieder mit $\lambda = (1 + \|\omega\|^2)^{-s/2}$)

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{p_1}^{\sigma_3,\rho_3}\hat{\psi}(\omega) &= \frac{\partial}{\partial p_1}\hat{\pi}_{s,\sigma_3}\hat{\psi}(\omega)\Big|_e - \lambda s\omega_1(1+\|\omega\|^2)^{s/2-1}\hat{\psi}(\omega) + \\ &\quad \lambda(1+\|\omega\|^2)^{s/2}\nabla\hat{\psi}\cdot\left(\vartheta_1\begin{pmatrix}\omega_2 \\ -\omega_1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= -\frac{s\omega_1}{1+\|\omega\|^2}\hat{\psi}(\omega) + \vartheta_1\nabla\hat{\psi}\cdot\begin{pmatrix}\omega_2 \\ -\omega_1\end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial\omega_1}\hat{\psi}(\omega) \ , \end{aligned}$$

das heißt

$$i\tilde{A}_{p_1}^{\sigma_3,\rho_3} = A_{p_1}^{\sigma_3,\rho_3} = \vartheta_1 A_\theta - A_{p_1}$$

und entsprechend ergibt sich

$$i\tilde{A}_{p_2}^{\sigma_3,\rho_3} = A_{p_2}^{\sigma_3,\rho_3} = \vartheta_2 A_\theta - A_{p_2} \ .$$

Weiter hat man

$$\tilde{A}_{q_j}^{\sigma_3,\rho_3}\hat{\psi}(\omega) = -i\omega_j\hat{\psi}(\omega)$$

und somit

$$A_{q_j}^{\sigma_3,\rho_3}\hat{\psi}(\omega) := i\tilde{A}_{q_j}^{\sigma_3,\rho_3}\hat{\psi}(\omega) = \omega_j\hat{\psi}(\omega) = A_{b_j}\hat{\psi}(\omega) \quad .$$

Die Kommutatorbeziehungen ergeben sich wie folgt

$$[A_{p_1}^{\sigma_3,\rho_3}, A_{p_1}^{\sigma_3,\rho_3}] = \vartheta_2[A_\theta, A_{p_1}] + \vartheta_1[A_{p_2}, A_\theta] + [A_{p_1}, A_{p_2}] = i\vartheta_1 A_{p_1} - i\vartheta_2 A_{p_2} \ ,$$

$$[A_{p_j}^{\sigma_3,\rho_3}, A_{q_k}^{\sigma_3,\rho_3}] = \vartheta_j[A_\theta, A_{b_k}] - i\delta_{jk}A_\varphi = \begin{cases} -i\vartheta_j A_{b_2} - i\delta_{j1}A_\varphi & \text{für } k=1 \\ -i\vartheta_j A_{b_1} - i\delta_{j2}A_\varphi & \text{für } k=2 \end{cases}$$

$$\text{und} \qquad [A_{q_1}^{\sigma_3,\rho_3}, A_{q_2}^{\sigma_3,\rho_3}] = 0 \quad ,$$

das heißt, es gibt fünf Unschärferelationen. ■

Bemerkung 2.1.4.16 Die zu Γ_3 gehörige singuläre Basistransformation bezüglich β_3 und ρ_3 ist durch

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \vartheta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \vartheta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Bemerkung 2.1.4.17 Die Darstellung der homogenen Räume X_1, X_2 und X_3 in $H^s(\mathbb{R}^n)$ hängt von den gewählten Einbettungsabbildungen ab. Die in Bemerkung 2.1.4.9 angegebenen Abbildung haben zwar eine vereinfachte Struktur *sichern* aber die *strikte Zulässigkeit ab.* Bei der Berechnung der infinitesimalen Operatoren wurden konkrete Einbettungen vorschlagen und anhand dieser die Kommutatorrelationen bestimmt. Für $n = 2$ ergeben sich bei konkreter Wahl von β_1, β_2, β_3 und ρ_3 insgesamt 19 nichtkommutierende Paare von Operatoren.

Folgerung 2.1.4.18 *Sei $\mathbf{G}_{aWH}$ die zugrundeliegende Gruppe. Ausgehend von den linearen Transformationen L_1, L_2 und L_3 ist einzusehen, daß jeweils zwei infinitesimale Operatoren als Linearkombination der Ausgangsoperatoren entstehen. Für X_1 entstehen sieben und für X_2 und X_3 entstehen fünf neuartige Unschärferelationen.*

Im folgenden werden die neu zu lösenden Diffenrentialgleichungen notiert, für die noch keine Lösungen berechnet wurden. Sei der Quotienten-Raum durch X_1 gegeben, $\psi \in H^s(\mathbb{R}^2)$ und zulässig und $\mu_1, \mu_2, t \in \mathbb{R}$, dann sind Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned}
(\vartheta_1 A_a - A_{p_1} - \mu_1)\,\hat{\psi} &= it\,(\vartheta_2 A_a - A_{p_2} - \mu_2)\,\hat{\psi} \\
(\vartheta_1 A_a - A_{p_1} - \mu_1)\,\hat{\psi} &= it\,(A_{b_1} - \mu_2)\,\hat{\psi} \\
(\vartheta_1 A_a - A_{p_1} - \mu_1)\,\hat{\psi} &= it\,(A_{b_2} - \mu_2)\,\hat{\psi} \\
(\vartheta_2 A_a - A_{p_2} - \mu_1)\,\hat{\psi} &= it\,(A_{b_1} - \mu_2)\,\hat{\psi} \\
(\vartheta_2 A_a - A_{p_2} - \mu_1)\,\hat{\psi} &= it\,(A_{b_2} - \mu_2)\,\hat{\psi} \\
(\vartheta_1 A_a - A_{p_1} - \mu_1)\,\hat{\psi} &= it\,(A_\theta - \mu_2)\,\hat{\psi} \\
(\vartheta_2 A_a - A_{p_2} - \mu_1)\,\hat{\psi} &= it\,(A_\theta - \mu_2)\,\hat{\psi}
\end{aligned}$$

geeignete Kandidaten für die Darstellung π_{s,σ_1}. Sei weiter der Quotienten-Raum gegeben durch X_2, $\psi \in H^s(\mathbb{R}^2)$ und zulässig und $\mu_1, \mu_2, t \in \mathbb{R}$, dann sind Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned}
(A_a + A_{p_2} - \mu_1)\,\hat{\psi} &= it\,(A_{b_1} - \mu_2)\,\hat{\psi} \\
(A_a + A_{p_2} - \mu_1)\,\hat{\psi} &= it\,(A_{b_2} - \mu_2)\,\hat{\psi} \\
(A_a + A_{p_2} - \mu_1)\,\hat{\psi} &= it\,(A_\theta + A_{p_1} - \mu_2)\,\hat{\psi} \\
(A_\theta + A_{p_1} - \mu_2)\,\hat{\psi} &= it\,(A_{b_1} - \mu_2)\,\hat{\psi} \\
(A_\theta + A_{p_1} - \mu_2)\,\hat{\psi} &= it\,(A_{b_2} - \mu_2)\,\hat{\psi}
\end{aligned}$$

geeignete Kandidaten für die Darstellung π_{s,σ_2}. Sei im letzten Fall der Quotienten-Raum gegeben durch X_3, $\psi \in H^s(\mathbb{R}^2)$ und zulässig und $\mu_1, \mu_2, t \in \mathbb{R}$, dann sind Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned}
(\vartheta_1 A_\theta - A_{p_1} - \mu_1)\,\hat{\psi} &= it\,(\vartheta_2 A_\theta - A_{p_2} - \mu_2)\,\hat{\psi}\\
(\vartheta_1 A_\theta - A_{p_1} - \mu_1)\,\hat{\psi} &= it\,(A_{b_1} - \mu_2)\,\hat{\psi}\\
(\vartheta_1 A_\theta - A_{p_1} - \mu_1)\,\hat{\psi} &= it\,(A_{b_2} - \mu_2)\,\hat{\psi}\\
(\vartheta_2 A_\theta - A_{p_2} - \mu_1)\,\hat{\psi} &= it\,(A_{b_1} - \mu_2)\,\hat{\psi}\\
(\vartheta_2 A_\theta - A_{p_2} - \mu_1)\,\hat{\psi} &= it\,(A_{b_2} - \mu_2)\,\hat{\psi}
\end{aligned}$$

geeignete Kandidaten für die Darstellung π_{s,σ_2}. Die allgemeine Struktur der Differentialgleichungen ist sehr komplex, so daß die explizite Lösung nur in einigen Spezialfällen leicht berechenbar ist.

Es sollen *nur einige* Lösungen *explizit* berechnet werden. Der Einfachheit sei $s = 0$ gewählt.

Sei zunächst X_2 der zugrundeliegende homogene Raum und sei π_{s,σ_2} die quadratintegrierbare Darstellung in $H^s(\mathbb{R}^2)$. Es sollen die zu den Unschärferelationen zwischen $A_\theta^{\sigma_2}$ und $A_{q_l}^{\sigma_2}$, $l = 1, 2$, gehörigen minimierenden Element gefunden werden. Es gilt $A_\theta^{\sigma_2} = A_\theta + A_{p_1}$ und $A_{q_l}^{\sigma_2} = A_{b_l}$. Mit

$$A_\theta = i\nabla\hat{\psi} \cdot \begin{pmatrix} \omega_2 \\ -\omega_1 \end{pmatrix} \;,\quad A_{p_1} = i\frac{s\omega_1}{1 + \|\omega\|^2}\hat{\psi} + i\frac{\partial}{\partial\omega_1}\hat{\psi} \;\text{ und }\; A_{b_l} = \omega_l\hat{\psi}$$

sind folgende Differentialgleichungen zu lösen

$$i\nabla\hat{\psi} \cdot \begin{pmatrix} \omega_2 \\ -\omega_1 \end{pmatrix} + i\frac{s\omega_1}{1 + \|\omega\|^2}\hat{\psi} + i\frac{\partial}{\partial\omega_1}\hat{\psi} - \mu_1\hat{\psi} = it\left(\omega_l\hat{\psi} - \mu_2\hat{\psi}\right).$$

Lemma 2.1.4.19 *Seien $\psi \in H^s(\mathbb{R}^2)$ und $\hat{\phi}$ hinreichend glatte Funktionen. Für eine geeignete Wahl von $\hat{\phi}$ sind für $s = 0$ explizite Lösungen der Differentialgleichungen*

$$i\nabla\hat{\psi} \cdot \begin{pmatrix} \omega_2 \\ -\omega_1 \end{pmatrix} + i\frac{s\omega_1}{1 + \|\omega\|^2}\hat{\psi} + i\frac{\partial}{\partial\omega_1}\hat{\psi} - \mu_1\hat{\psi} = it\left(\omega_l\hat{\psi} - \mu_2\hat{\psi}\right), \quad \text{für } l = 1, 2$$

für $l = 1$ und $1 + \omega_2 \geq 0$ durch

$$\hat{\psi}(\omega) = \hat{\phi}\left(\frac{\|\omega\|^2}{2} + \omega_2\right)(1 + i\omega_1 + \omega_2)^{-\mu_1 + it\mu_2}\, e^{(1+\omega_2)t}$$

und für $l = 2$ und $1 + \omega_2 \geq 0$ durch

$$\hat{\psi}(\omega) = \hat{\phi}\left(\frac{\|\omega\|^2}{2} + \omega_2\right)(1 + i\omega_1 + \omega_2)^{\mu_1 - it(\mu_2+1)}\, e^{\omega_1 t}$$

gegeben.

Beweis: Der Beweis basiert auf direktes Einsetzen in die Diffenrentialgleichungen wie im Beweis des Satzes 2.1.3.10 ■

Satz 2.1.4.20 *Sei X_2 der zugrundeliegende homogene Raum. Falls $\psi \in H^s$ und $\|\psi\|_s = 1$, dann haben die zu $A_\theta^{\sigma_2}$ und $A_{q_l}^{\sigma_2}$, $l = 1, 2$, gehörigen Unschärferelationen folgende Struktur*

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}C_l &\leq \Delta^2_{s,\psi}(A_\theta)\Delta^2_{s,\psi}(A_{b_l}) + \Delta^2_{s,\psi}(A_{p_1})\Delta^2_{s,\psi}(A_{b_l}) + \\ &\quad 2\Delta^2_{s,\psi}(A_{b_l})\left[\Re\mu_{s,\psi}(A_\theta A_{p_1}) - \mu_{s,\psi}(A_\theta)\mu_{s,\psi}(A_{p_1})\right] ,\end{aligned}$$

mit den unteren Schranken

$$C_1 = \mu^2_{s,\psi}(A_{b_2} + A_\varphi) \quad \text{und} \quad C_2 = \mu^2_{s,\psi}(A_{b_1}).$$

Beweis: Seien A, B und C infinitesimale selbstadjungierte Operatoren. Dann folgt in direkter Rechnung

$$\begin{aligned}\Delta^2_{s,\psi}(A+B) &= \Delta^2_{s,\psi}(A) + \Delta^2_{s,\psi}(A) + \langle (AB+BA)\psi, \psi\rangle_s - 2\langle A\psi, \psi\rangle_s \langle B\psi, \psi\rangle_s \\ &= \Delta^2_{s,\psi}(A) + \Delta^2_{s,\psi}(A) + 2\Re\langle B\psi, A\psi\rangle_s - 2\langle A\psi, \psi\rangle_s \langle B\psi, \psi\rangle_s\end{aligned}$$

und damit schließlich

$$\begin{aligned}\Delta^2_{s,\psi}(A+B)\Delta^2_{s,\psi}(C) &= \Delta^2_{s,\psi}(A)\Delta^2_{s,\psi}(C) + \Delta^2_{s,\psi}(B)\Delta^2_{s,\psi}(C) \\ &\quad + 2\Delta^2_{s,\psi}(C)\left[\Re\langle B\psi, A\psi\rangle_s - \langle A\psi, \psi\rangle_s \langle B\psi, \psi\rangle_s\right] .\end{aligned}$$

■

Wie zu erwarten war, tritt ein Term auf, der gemischte Ausdrücke in A und B enthält. Um den Term

$$2\Delta^2_{s,\psi}(C)\left[\Re\langle B\psi, A\psi\rangle_s - \langle A\psi, \psi\rangle_s \langle B\psi, \psi\rangle_s\right]$$

nun interpretieren zu können, wird die Kovarianz zweier Operatoren eingeführt.

Definition 2.1.4.21 *Seien A und B Operatoren auf H^s mit geeignetem Definitionsbereich. Die* **Kovarianz** *zweier Operatoren A und B zum Zustand ψ ist definiert durch*

$$\Delta_{s,\psi}(A, B) = \langle [A - \mu_{s,\psi}(A)]\,\psi, [B - \mu_{s,\psi}(B)]\,\psi\rangle_{H^s} \quad .$$

Daß diese Definition Sinn macht, soll der folgende Satz belegen. Er stellt die Analogie der Definition 2.1.4.21 zur Definition 2.1.2.1 der Varianz eines Operators her.

Satz 2.1.4.22 *Seien A und B Operatoren auf H^s, dann folgt*

$$\Delta_{s,\psi}(A,A) = \Delta^2_{s,\psi}(A) \ .$$

Ferner gilt

$$\Delta_{s,\psi}(A,B) = \overline{\Delta_{s,\psi}(B,A)} \ .$$

Beweis: Nach Definition 2.1.4.21 gilt

$$\begin{aligned}
\Delta_{s,\psi}(A,A) &= \| [A - \mu_{s,\psi}(A)] \psi \|_s^2 \\
&= \langle [A - \mu_{s,\psi}(A)] \psi, [A - \mu_{s,\psi}(A)] \psi \rangle_{H^s} \\
&= \left\langle A^2\psi, \psi \right\rangle_{H^s} - 2\mu_{s,\psi}(A) \langle A\psi, \psi \rangle_{H^s} + \mu_{s,\psi}(A)^2 \\
&= \left\langle A^2\psi, \psi \right\rangle_{H^s} - \mu_{s,\psi}(A)^2 = \Delta^2_{s,\psi}(A)
\end{aligned}$$

Die zweite Aussage ist auch offensichtlich. ∎

Die Einführung der Kovarianz präzisiert den Satz 2.1.4.20. Dabei wird sich zunächst nur auf das spezielle Beispiel der Operatoren $A^{\sigma_2}_\theta$ und $A^{\sigma_2}_{q_l}$ bezüglich X_2 beschränkt. Eine allgemeine Unschärfeformulierung soll im kommenden Abschnitt gegeben werden.

Satz 2.1.4.23 *Sei X_2 der zugrundeliegende homogene Raum. Falls $\psi \in H^s$ und $\|\psi\|_s = 1$, dann haben die zu $A^{\sigma_2}_\theta$ und $A^{\sigma_2}_{q_l}$, $l = 1, 2$, gehörigen Unschärferelationen nach Definition 2.1.4.21 folgende Struktur*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} C_l \ \leq \ & \Delta^2_{s,\psi}(A_\theta)\Delta^2_{s,\psi}(A_{b_l}) + \Delta^2_{s,\psi}(A_{p_1})\Delta^2_{s,\psi}(A_{b_l}) + \\
& \Delta^2_{s,\psi}(A_{b_l})\Delta_{s,\psi}(A_\theta, A_{p_1}) + \Delta^2_{s,\psi}(A_{b_l})\Delta_{s,\psi}(A_{p_1}, A_\theta) \ ,
\end{aligned}$$

mit den unteren Schranken

$$C_1 = \mu^2_{s,\psi}(A_{b_2} + A_\varphi) \quad \text{und} \quad C_2 = \mu^2_{s,\psi}(A_{b_1}).$$

Beweis: Dieser Satz ist allgemein einzusehen. Seien A und B selbstadjungierte Operatoren in H^s, dann folgt

$$\begin{aligned}
& \langle (AB + BA)\psi, \psi \rangle_{H^s} - 2 \langle A\psi, \psi \rangle_{H^s} \langle B\psi, \psi \rangle_{H^s} \\
&= \langle AB\psi, \psi \rangle_{H^s} - \langle A\psi, \psi \rangle_{H^s} \langle B\psi, \psi \rangle_{H^s} + \langle BA\psi, \psi \rangle_{H^s} - \langle A\psi, \psi \rangle_{H^s} \langle B\psi, \psi \rangle_{H^s} \\
&= \langle B\psi, A\psi \rangle_{H^s} - \mu_{s,\psi}(B) \langle \psi, A\psi \rangle_{H^s} + \langle A\psi, B\psi \rangle_{H^s} - \mu_{s,\psi}(A) \langle \psi, B\psi \rangle_{H^s} \\
&= \langle (B - \mu_{s,\psi}(B))\psi, A\psi \rangle_{H^s} + \langle (A - \mu_{s,\psi}(A))\psi, B\psi \rangle_{H^s} \\
&= \langle (B - \mu_{s,\psi}(B))\psi, (A - \mu_{s,\psi}(A))\psi \rangle_{H^s} + \langle (B - \mu_{s,\psi}(B))\psi, \mu_{s,\psi}(A)\psi \rangle_{H^s} + \\
&\quad \langle (A - \mu_{s,\psi}(A))\psi, (B - \mu_{s,\psi}(B))\psi \rangle_{H^s} + \langle (A - \mu_{s,\psi}(A))\psi, \mu_{s,\psi}(B))\psi \rangle_{H^s} \\
&= \Delta_{s,\psi}(B,A) + \Delta_{s,\psi}(A,B) \ .
\end{aligned}$$

Sei nun $A = A_\theta$ und $B = A_{p_1}$ dann folgt die Behauptung. ■

Die Kovarianzen kann man geeignet abschätzen. Einerseits lassen sie sich durch die Standardabweichung der entsprechenden Operatoren und andererseits aber auch sofort durch die Varianzen selbst beschränken.

Satz 2.1.4.24 *Offensichtlich gilt*

$$|\Delta_{s,\psi}(A,B)|^2 \leq \Delta_{s,\psi}^2(A)\Delta_{s,\psi}^2(A)\ .$$

Beweis: Anwendung der Cauchy-Schwarzsch'en-Ungleichung. ■

Um Abschätzungen mit Hilfe der Standardabweichung eines Operators zu formulieren, wird diese zunächst definiert.

Definition 2.1.4.25 *Sei A ein Operator auf $\mathcal{D}(A)$, dann bezeichne*

$$\Delta_{s,\psi}(A) = \left[\Delta_{s,\psi}^2(A)\right]^{1/2} = \left[\mu_{s,\psi}(A^2) - \mu_{s,\psi}(A)^2\right]^{1/2}$$

die **zentrierte Standardabweichung** *des Operators A zum Zustand ψ und*

$$\tilde{\Delta}_{s,\psi}(A) = \left[\mu_{s,\psi}(A^2)\right]^{1/2}$$

bezeichne die **unzentrierte Standardabweichung** *des Operators A zum Zustand ψ.*

Damit hat man sofort $|\Delta_{s,\psi}(A,B)| \leq \Delta_{s,\psi}(A)\Delta_{s,\psi}(B)$. Der gemischte Ausdruck der Unschärferelation kann nun verschiedenartig abgeschätzt werden.

Lemma 2.1.4.26 *Seien A und B selbstadjungierte Operatoren in H^s und sei $\psi \in H^s$ mit $\|\psi\|_s = 1$, dann gelten die folgenden Abschätzungen*

$$\langle (AB+BA)\psi,\psi\rangle_{H^s} - 2\langle A\psi,\psi\rangle_s \langle B\psi,\psi\rangle_{H^s} \leq \tilde{\Delta}_{s,\psi}(A)\Delta_{s,\psi}(B) + \tilde{\Delta}_{s,\psi}(B)\Delta_{s,\psi}(A)$$

und

$$\Delta_{s,\psi}(B,A) + \Delta_{s,\psi}(A,B) \leq \Delta_{s,\psi}^2(A) + \Delta_{s,\psi}^2(B)\ .$$

Beweis: Die erste Abschätzung folgt mit

$$\begin{aligned}
&\langle (AB+BA)\psi,\psi\rangle_s - 2\langle A\psi,\psi\rangle_s \langle B\psi,\psi\rangle_s \\
&\leq\ |\langle A\psi,(B-\mu_{s,\psi}(B))\psi\rangle_{H^s}| + |\langle B\psi,(A-\mu_{s,\psi}(A))\psi\rangle_{H^s}| \\
&\leq\ \|A\psi\|_s\|(B-\mu_{s,\psi}(B))\psi)\|_s + \|B\psi\|_s\|(A-\mu_{s,\psi}(A))\psi)\|_s \\
&=\ \tilde{\Delta}_{s,\psi}(A)\Delta_{s,\psi}(B) + \tilde{\Delta}_{s,\psi}(B)\Delta_{s,\psi}(A)\ .
\end{aligned}$$

Die zweite Abschätzung gilt wegen

$$\begin{aligned}\Delta_{s,\psi}(B,A)+\Delta_{s,\psi}(A,B) &\leq |\Delta_{s,\psi}(B,A)|+|\Delta_{s,\psi}(A,B)| \\ &\leq 2\Delta_{s,\psi}(A)\Delta_{s,\psi}(B) \leq \Delta^2_{s,\psi}(A)+\Delta^2_{s,\psi}(B)\ .\end{aligned}$$

■

Bemerkung 2.1.4.27 Mit Hilfe dieser Abschätzungen ist man in der Lage, die Ungleichung aus Satz 2.1.4.23 umzuformulieren. Seien $A = A_\theta$ und $B = A_{p_1}$, dann hat man für $l = 1, 2$

$$\frac{1}{8}C_l \leq \Delta^2_{s,\psi}(A_\theta)\Delta^2_{s,\psi}(A_{b_l}) + \Delta^2_{s,\psi}(A_{p_1})\Delta^2_{s,\psi}(A_{b_l})$$

mit der selben unteren Schranke C_l. Diese Ungleichung resultiert nun nicht mehr direkt aus dem Diskriminantenansatz. Man hat zwar wieder eine Unschärfe formuliert, jedoch kann die Ungleichung im Allgemeinen nicht durch Lösung der zugehörigen Differentialgleichung mit Gleichheit minimiert werden.

Weitere minimierende Funktionen sollen nun bezüglich X_3 berechnet werden. Sei also X_3 der zugrundeliegende homogene Raum und sei π_{s,σ_3} die quadratintegrierbare Darstellung in $H^s(\mathbb{R}^2)$. Die zur Unschärferelationen zwischen $A^{\sigma_3,\rho_3}_{p_j}$ und $A^{\sigma_2}_{q_l}$, $j, l = 1, 2$, gehörigen minimierenden Elemente sollen gefunden werden. Auf die Angabe der Varianzen wird wieder verzichtet. Sie können in den vorderen Abschnitten nachgeschlagen werden. Es gilt $A^{\sigma_3,\rho_3}_{p_j} = \vartheta_j A_\theta - A_{p_j}$ und $A^{\sigma_3,\rho_3}_{q_l} = A_{b_l}$. Mit

$$A_\theta = i\nabla\hat{\psi}\cdot\begin{pmatrix}\omega_2\\ -\omega_1\end{pmatrix}\ ,\quad A_{p_j} = i\frac{s\omega_j}{1+\|\omega\|^2}\hat{\psi} + i\frac{\partial}{\partial\omega_j}\hat{\psi}\ \text{ und }\ A_{b_l} = \omega_l\hat{\psi}$$

sind demzufolge die Differentialgleichungen

$$\vartheta_j i\nabla\hat{\psi}\cdot\begin{pmatrix}\omega_2\\ -\omega_1\end{pmatrix} - i\frac{s\omega_j}{1+\|\omega\|^2}\hat{\psi} - i\frac{\partial}{\partial\omega_j}\hat{\psi} - \mu_1\hat{\psi} = it\left(\omega_l\hat{\psi} - \mu_2\hat{\psi}\right).$$

zu lösen. Das folgende Lemma gibt eine Lösung für den Fall $j = 1$. Für $j = 2$ ist die Lösung entsprechend.

Lemma 2.1.4.28 *Seien $\psi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $\hat{\phi}$ eine hinreichend glatte Funktion und $j = 1$. Für eine geeignete Wahl von $\hat{\phi}$ sind für $s = 0$ explizite Lösungen der Differentialgleichungen*

$$\vartheta_1 i\nabla\hat{\psi}\cdot\begin{pmatrix}\omega_2\\ -\omega_1\end{pmatrix} - i\frac{s\omega_1}{1+\|\omega\|^2}\hat{\psi} - i\frac{\partial}{\partial\omega_1}\hat{\psi} - \mu_1\hat{\psi} = it\left(\omega_l\hat{\psi} - \mu_2\hat{\psi}\right)$$

für $l = 1$ und $\vartheta_1 = 0$ durch

$$\hat{\psi}(\omega) = e^{-t\omega_1^2/2+\omega_1(i\mu_1+t\mu_2)}\hat{\phi}(\omega_2)\quad ,$$

für $l=1$, $\vartheta_1<0$ und $1-\vartheta_1\omega_1\geq 0$ durch

$$\hat{\psi}(\omega)=\hat{\phi}\left(\frac{\vartheta_1}{2}\|\omega\|^2-\omega_2\right)(1-\vartheta_1(i\omega_1+\omega_2))^{(\mu_1-it\mu_2)/\vartheta_1}\,e^{-(1-\vartheta_1\omega_2)t/\vartheta_1^2}\quad,$$

für $l=1$, $\vartheta_1>0$ und $1-\vartheta_1\omega_1\geq 0$ durch

$$\hat{\psi}(\omega)=\hat{\phi}\left(\frac{\vartheta_1}{2}\|\omega\|^2-\omega_2\right)(1+\vartheta_1(i\omega_1-\omega_2))^{(\mu_1-it\mu_2)/\vartheta_1}\,e^{(1-\vartheta_1\omega_2)t/\vartheta_1^2}\quad,$$

für $l=2$ und $\vartheta_1=0$ durch

$$\hat{\psi}(\omega)=e^{-t\omega_1\omega_2+\omega_1(i\mu_1+t\mu_2)}\hat{\phi}(\omega_2)\quad,$$

für $l=1$, $\vartheta_1<0$ und $1-\vartheta_1\omega_2\geq 0$ durch

$$\hat{\psi}(\omega)=\hat{\phi}\left(\frac{\vartheta_1}{2}\|w\|^2-\omega_2\right)(1-\vartheta_1(i\omega_1+\omega_2))^{(-\mu_1+\mu_2it)/\vartheta_1-it/\vartheta_1^2}\,e^{t\omega_1/\vartheta_1}$$

und für $l=1$, $\vartheta_1>0$ und $1-\vartheta_1\omega_1\geq 0$ durch

$$\hat{\psi}(\omega)=\hat{\phi}\left(\frac{\vartheta_1}{2}\|w\|^2-\omega_2\right)(1+\vartheta_1(i\omega_1-\omega_2))^{(-\mu_1+\mu_2it)/\vartheta_1-it/\vartheta_1^2}\,e^{t\omega_1/\vartheta_1}$$

gegeben.

Beweis: Der Beweis basiert auf direktes Einsetzen in die Diffenrentialgleichungen wie im Beweis des Satzes 2.1.3.10 ■

Satz 2.1.4.29 *Sei X_3 der zugrundeliegende homogene Raum und $j=1$. Falls $\psi\in H^s$ und $\|\psi\|_s=1$, dann haben die zu $A^{\sigma_3,\rho_3}_{p_1}$ und $A^{\sigma_2}_{q_l}$, $l=1,2$, gehörigen Unschärferelationen nach Definition 2.1.4.21 folgende Struktur*

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}C_l\ \leq\ &\vartheta_1^2\Delta^2_{s,\psi}(A_\theta)\Delta^2_{s,\psi}(A_{b_l})+\Delta^2_{s,\psi}(A_{p_1})\Delta^2_{s,\psi}(A_{b_l})+\\ &-\vartheta_1\Delta^2_{s,\psi}(A_{b_l})\Delta_{s,\psi}(A_\theta,A_{p_1})-\vartheta_1\Delta^2_{s,\psi}(A_{b_l})\Delta_{s,\psi}(A_{p_1},A_\theta)\ ,\end{aligned}$$

mit den unteren Schranken

$$C_1=\mu^2_{s,\psi}(\vartheta_1A_{b_2}+A_\varphi)\quad\text{und}\quad C_2=\mu^2_{s,\psi}(\vartheta_1A_{b_1}).$$

Beweis: Der Satz ist durch direktes Einsetzen der Operatoren und Kommutatoren nachprüfbar. ■

Bemerkung 2.1.4.30 Wie bereits in Lemma 2.1.4.19 und 2.1.4.28 zu sehen, ist die Angabe aller minimierenden Lösungen der Unschärfe-Differentialgleichungen von X_2 und X_3 sehr aufwendig. Wird zusätzlich noch der Parameter s variiert, ist zunächst nur ein Potenzreihenansatz realisierbar. Deshalb wird hier auf eine vollständige Lösungsangabe verzichtet, insbesondere im Fall X_1.
Von Interesse für weitere Überlegungen sind exemplarisch die Sätze 2.1.4.23 und 2.1.4.29. Sie beschreiben die resultierenden Unschärferelationen, die im Gegensatz zu bekannten Unschärferelationen nun **Kovarianz**-Terme enthalten.

Direkte affine Weyl-Heisenberg Gruppe

Zu der direkten affinen Weyl-Heisenberg Gruppe $\mathbf{G}^d_{aWH}$ wurden Gabor-Wavelet-Transformationen in den Sobolev-Räumen $H^{\bar{s}}_{mix}(\mathbb{R}^{m+n})$, $H^{\bar{s}}_{A}(\mathbb{R}^{m+n})$ und $H^{\bar{s}}_{T}(\mathbb{R}^{m+n})$ eingeführt. Bezüglich dieser Darstellungsräume sollen die Unschärferelationen für $m = n = 1$ hergeleitet werden.

Sei $\psi \in H^{\bar{s}}_{\diamond}(\mathbb{R}^2)$, mit $\diamond = mix, A, T$ und $\bar{s} = (s_1, s_2)$, dann waren die Darstellungen durch

$$\pi_{\diamond,\bar{s}}(g)\psi(x,y) = \Lambda_{\diamond,-\bar{s}}\pi(g)\Lambda_{\diamond,\bar{s}}\psi(x,y)$$

gegeben. Mit $(\Lambda_{\diamond,\bar{s}}\psi)^{\wedge}(\omega,\eta) = \lambda_{\diamond,\bar{s}}(\omega,\eta)\hat{\psi}(\omega,\eta)$ sind die äquivalenten Darstellungen im Fourier-Raum

$$\hat{\pi}_{\diamond,\bar{s}}(g)\hat{\psi}(\omega,\eta) = \lambda_{\diamond,-\bar{s}}(\omega,\eta)\hat{\pi}(g)\lambda_{\diamond,\bar{s}}(\omega,\eta)\hat{\psi}(\omega,\eta) \ .$$

Der folgende Satz wird zur Berechnung der infinitesimalen Operatoren in $H^{\bar{s}}_{\diamond}(\mathbb{R}^2)$ benötigt. Er verallgemeinert den Satz 2.1.3.15.

Satz 2.1.4.31 *Sei π eine Darstellung der Gruppe $\mathbf{G}$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$. Die infinitesimalen Operatoren bezüglich π sind dann durch*

$$A_i f(x) = \frac{\partial}{\partial g_i}\pi(g)f(x)\Big|_{g=e}$$

gegeben. Falls eine weitere Darstellung der Gruppe $\mathbf{G}$ in $H^{\bar{s}}_{\diamond}(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\pi_{\diamond,\bar{s}} := \Lambda_{\diamond,-\bar{s}}\pi\Lambda_{\diamond,\bar{s}}$$

definiert ist und die Operatoren A_i in $L_2(\mathbb{R}^n)$ selbstadjungiert sind, dann sind die infinitesimalen Operatoren bezüglich $\pi_{\diamond,\bar{s}}$

$$B_i\phi(x) = \frac{\partial}{\partial g_i}\pi_{\diamond,\bar{s}}(g)\phi(x)\Big|_{g=e}$$

in $H^{\bar{s}}_{\diamond}(\mathbb{R}^n)$ selbstadjungiert.

Beweis: Im Beweis des Satzes 2.1.3.15 ist Λ_s durch $\Lambda_{\diamond,\bar{s}}$ zu ersetzen. ∎

Satz 2.1.4.32 *Sei $\mathbf{G}^d_{aWH}$ die zugrundeliegende Gruppe und der Darstellungsraum $H^{\bar{s}}_{mix}(\mathbb{R}^2)$, der Sobolev-Raum gemischter Glattheit. Sei $\psi \in H^{\bar{s}}_{mix}(\mathbb{R}^2)$, dann sind die selbstadjungierten, infinitesimalen Operatoren durch*

$$A_q\hat{\psi}(\omega,\eta) = \omega\hat{\psi}(\omega,\eta) \ , \quad A_p\hat{\psi}(\omega,\eta) = \frac{is_1\omega}{1+\omega^2}\hat{\psi}(\omega,\eta) + i\frac{\partial}{\partial\omega}\hat{\psi}(\omega,\eta) \ ,$$

$$A_a\hat{\psi}(\omega,\eta) = \frac{i}{2}\hat{\psi}(\omega,\eta) + \frac{is_2\eta^2}{1+\eta^2}\hat{\psi}(\omega,\eta) + i\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\hat{\psi}(\omega,\eta) \ , \quad A_b\hat{\psi}(\omega,\eta) = \eta\hat{\psi}(\omega,\eta)$$

gegeben. Die einzigen nichttrivialen Kommutatoren sind

$$[A_q, A_p] = iA_\varphi \quad \textit{und} \quad [A_a, A_b] = iA_b \ ,$$

das heißt, es existieren zwei klassische Unschärferelationen.

Beweis: Mit $\lambda_{mix,\bar{s}}(\omega,\eta) = (1+\omega^2)^{s_1/2}(1+\eta^2)^{s_2/2}$ ist Darstellung

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_{mix,\bar{s}}(g)\hat{\psi}(\omega,\eta) &= \lambda_{mix,-\bar{s}}(\omega,\eta) \times \\ & \quad e^{i(\varphi-q\omega)}a^{1/2}e^{ib\eta}\left(1+(\omega+p)^2\right)^{s_1/2}\left(1+(a\eta)^2\right)^{s_2/2}\hat{\psi}(\omega+p,a\eta).\end{aligned}$$

Mit $e = (0,0,0,0,1) = (p,q,\varphi,b,a)$ sind die Ableitungen nach q, p, b und a durch

$$\begin{aligned}\tilde{A}_q\hat{\psi} &= -i\omega\hat{\psi} \ , \\ \tilde{A}_p\hat{\psi} &= \frac{s_1\omega}{1+\omega^2}\hat{\psi} + \frac{\partial}{\partial\omega}\hat{\psi} \ , \\ \tilde{A}_a\hat{\psi} &= \frac{1}{2}\hat{\psi} + \frac{s_2\eta^2}{1+\eta^2}\hat{\psi} + \eta\frac{\partial}{\partial\eta}\hat{\psi} \text{ und} \\ \tilde{A}_b\hat{\psi} &= -i\eta\hat{\psi}\end{aligned}$$

gegeben. Mit $i\tilde{A}_q = A_q$, $i\tilde{A}_p = A_p$, $i\tilde{A}_a = A_a$ und $i\tilde{A}_b = A_b$ sind die Operatoren selbstadjungiert und es folgen sofort die Kommutatorbeziehungen. ■

Folgerung 2.1.4.33 *Die beiden aus Satz 2.1.4.32 resultierenden partiellen Differentialgleichungen sind simultan lösbar. Mit den Lösungen aus Lemma 2.1.3.13 ist eine simultane Lösung gegeben durch*

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\omega,\eta) &= c \cdot \exp\left[-\frac{(\omega-\mu_{11}+it_1\mu_{12})^2}{2t_1} + \frac{(\mu_{11}-it_1\mu_{12})^2}{2t_1} + t_2\eta\right] \times \\ & \quad \eta^{-1/2-t_2\mu_{22}-i\mu_{21}}\lambda_{mix,-\bar{s}}(\omega,\eta)\end{aligned}$$

für $(\omega,\eta) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)$ *und* 0 *sonst, mit entsprechender Parameterwahl gemäß dem Lemma 2.1.3.13.*

Beispiel 2.1.4.34 Die Abbildung 2.3 zeigt das Wavelet aus Folgerung 2.1.4.33 mit den Parametern $t_2 = -2$, $\mu_{22} = 10$, $\mu_{21} = 7$, $s_2 = -1$, $t_1 = 10$, $\mu_{12} = 1$, $\mu_{11} = 3$ und $s_1 = -1$.

Der nächste Satz gibt die infinitesimalen Operatoren bezüglich anisotropen Sobolev-Räume $H^{\bar{s}}_A(\mathbb{R}^2)$ und $H^{\bar{s}}_T(\mathbb{R}^2)$ an.

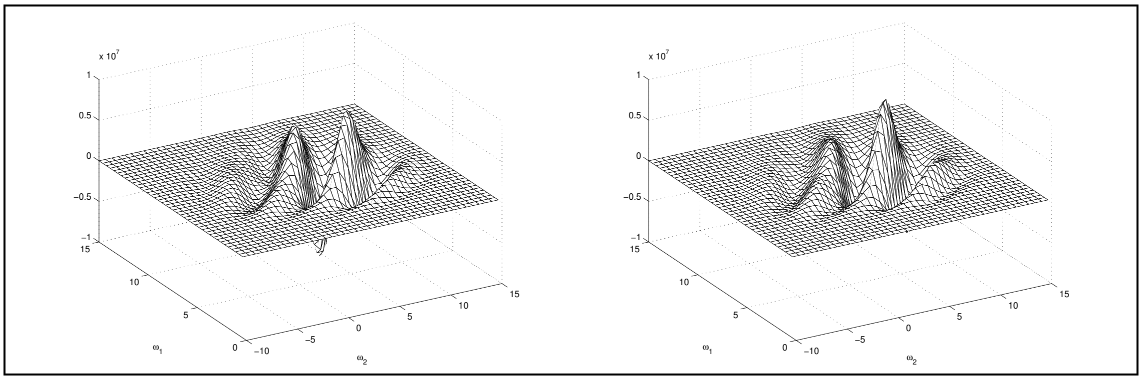

Abbildung 2.3: Links: Realteil der Fourier-Transformierten eines minimierenden Wavelets der Gruppe $\mathbf{G}_{aWH}^d$ in $H_{mix}^{\bar{s}}(\mathbb{R}^2)$. Imaginärteil der Fourier-Transformierte des selben minimierenden Wavelets.

Satz 2.1.4.35 *Sei $\mathbf{G}_{aWH}^d$ die zugrundeliegende Gruppe und der Darstellungsraum der ansiotrope Sobolev-Raum $H_A^{\bar{s}}(\mathbb{R}^2)$. Sei $\psi \in H_A^{\bar{s}}(\mathbb{R}^2)$, dann sind die selbstadjungierten, infinitesimalen Operatoren durch*

$$A_q\hat{\psi}(\omega,\eta) = \omega\hat{\psi}(\omega,\eta) \ ,$$

$$A_p\hat{\psi}(\omega,\eta) = \frac{(1+\omega^2)^{s_1/2}}{(1+\omega^2)^{s_1/2}+(1+\eta^2)^{s_2/2}}\frac{is_1\omega}{1+\omega^2}\hat{\psi}(\omega,\eta) + i\frac{\partial}{\partial\omega}\hat{\psi}(\omega,\eta) \ ,$$

$$A_a\hat{\psi}(\omega,\eta) = \frac{i}{2}\hat{\psi}(\omega,\eta) + \frac{(1+\eta^2)^{s_2/2}}{(1+\omega^2)^{s_1/2}+(1+\eta^2)^{s_2/2}}\frac{is_2\eta^2}{1+\eta^2}\hat{\psi}(\omega,\eta) + i\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\hat{\psi}(\omega,\eta) \ ,$$

$$A_b\hat{\psi}(\omega,\eta) = \eta\hat{\psi}(\omega,\eta)$$

gegeben. Sei im letzten Fall der Darstellungsraum der ansiotrope Sobolev-Raum $H_T^{\bar{s}}(\mathbb{R}^2)$ und sei $\psi \in H_T^{\bar{s}}(\mathbb{R}^2)$, dann sind die selbstadjungierten, infinitesimalen Operatoren durch

$$A_q\hat{\psi}(\omega,\eta) = \omega\hat{\psi}(\omega,\eta) \ ,$$

$$A_p\hat{\psi}(\omega,\eta) = \left[\frac{is_1\omega}{1+\|(\omega,\eta)\|^2} + \frac{is_2\omega}{1+\omega^2}\right]\hat{\psi}(\omega,\eta) + i\frac{\partial}{\partial\omega}\hat{\psi}(\omega,\eta) \ ,$$

$$A_a\hat{\psi}(\omega,\eta) = \frac{i}{2}\hat{\psi}(\omega,\eta) + \frac{is_2\eta^2}{1+\|(\omega,\eta)\|^2}\hat{\psi}(\omega,\eta) + i\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\hat{\psi}(\omega,\eta) \ ,$$

$$A_b\hat{\psi}(\omega,\eta) = \eta\hat{\psi}(\omega,\eta)$$

gegeben. In beiden Fällen sind die einzigen nichttrivialen Kommutatoren

$$[A_q, A_p] = iA_\varphi \quad \text{und} \quad [A_a, A_b] = iA_b \ ,$$

das heißt, es existieren jeweils zwei klassische Unschärferelationen.

Beweis: Die Operatoren ergeben sich analog wie im Beweis des Satzes 2.1.4.32. Es jedoch zu berücksichtigen, daß sich das negative Vorzeichen in $\lambda_{A,-\bar{s}}$ nicht wie in $\lambda_{mix,-\bar{s}}$ und $\lambda_{T,-\bar{s}}$ auf die Potenzen $s_1/2$ und $s_2/2$ überträgt, sondern es gilt

$$\lambda_{A,-\bar{s}} = \left[(1+\omega^2)^{s_1/2} + (1+\eta^2)^{s_2/2}\right]^{-1} \ .$$

Die Kommutatorrelationen sind unabhängig von den Glattheitstermen und sind somit gleich. ■

Bemerkung 2.1.4.36 Die partiellen Differentialgleichungen die aus den Kommutatorrelationen des Satzes 2.1.4.35 resultieren, sind durch

$$(A_p - \mu_{11})\hat{\psi} = it_1(A_q - \mu_{12})\hat{\psi} \quad \text{und} \quad (A_a - \mu_{21})\hat{\psi} = it_2(A_q - \mu_{22})\hat{\psi}$$

gegeben. Die Lösungen haben separable Struktur, so daß eine gemeinsame beziehungweise e Lösung durch ein Produktansatz gegeben ist. Sei zunächst der $H_A^{\bar{s}}(\mathbb{R})$ der Darstellungsraum, dann ist eine Lösung von

$$(A_p - \mu_{11})\hat{\psi} = it_1(A_q - \mu_{12})\hat{\psi}$$

durch

$$\hat{\psi}(\omega,\eta) = \exp\left[-\omega/2(-t_1\omega + it_1\mu_{11} + 2t_1\mu_{12})\right]\hat{\phi}(\eta)\lambda_{A,-\bar{s}}(\omega,\eta)$$

gegeben. Eine Lösung von

$$(A_a - \mu_{21})\hat{\psi} = it_2(A_q - \mu_{22})\hat{\psi}$$

ist durch

$$\hat{\psi}(\omega,\eta) = \eta^{-1/2-i\mu_{21}-t_2\mu_{22}}e^{t_2\eta}\hat{\phi}(\omega)\lambda_{A,-\bar{s}}(\omega,\eta)$$

gegeben. Zusammenfassend ergibt sich bis auf den Glattheitsterm, der nun durch $\lambda_{A,-\bar{s}}(\omega,\eta)$ gegeben ist, die gleiche Lösung wie in Folgerung 2.1.4.33. Das selbe trifft auf den Darstellungsraum $H_T^{\bar{s}}(\mathbb{R})$ zu. Der Glattheitterm muß durch $\lambda_{T,-\bar{s}}(\omega,\eta)$ ersetzt werden.

Das folgende zusammenfassende Theorem beinhaltet die Struktur der minimierenden Elemente zu den Unschärfen in $H_\diamond^{\bar{s}}(\mathbb{R})$. Diese Funktionen $\hat{\psi}$ sind kanonische Kandidaten der Darstellungen der Gruppe $\mathbf{G}_{aWH}^d$ in $H_\diamond^{\bar{s}}(\mathbb{R})$.

Theorem 2.1.4.37 *Sei $\mathbf{G}_{aWH}^d$ die zugrundeliegende Gruppe und seien die Darstellungsräume durch $H_\diamond^{\bar{s}}(\mathbb{R})$, mit $\diamond = mix, A, T$, gegeben. Eine simultane Lösung der aus den Kommutatorbeziehungen der entsprechenden Darstellungsräume resultierenen Differentialgleichungen ist durch*

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\omega,\eta) &= c \cdot \exp\left[-\frac{(\omega - \mu_{11} + it_1\mu_{12})^2}{2t_1} + \frac{(\mu_{11} - it_1\mu_{12})^2}{2t_1} + t_2\eta\right] \times \\ &\quad \eta^{-1/2-t_2\mu_{22}-i\mu_{21}}\lambda_{\diamond,-\bar{s}}(\omega,\eta)\end{aligned}$$

für $(\omega,\eta) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)$ und 0 sonst, gegeben. $\hat{\psi}$ erfüllt jeweils die Zulässigkeitsbedingungen in $H_\diamond^{\bar{s}}(\mathbb{R})$.

2.2 Modifizierte Unschärfekonstruktion

Dieser Abschnitt befaßt sich mit der Konstruktion von Unschärferelationen, die mehrere infinitesimale Operatoren einbeziehen.

Dabei werden zwei prinzipielle Ansätze verfolgt. Einerseits wird ausgehend vom klassischen Konstruktionsansatz eine allgemeine Darstellung gesucht, die erlaubt, über die Lösung von den zugehörigen Differentialgleichungen minimierende Elemente zu finden. Andererseits ist es möglich, Unschärfefunktionale zu definieren. Über die Minimierung dieser Funktionale ist es möglich, die minimierenden Elemente zu bestimmen. Diese führt bei der Suche nach expliziten Lösungen wieder auf die Lösung von Differentialgleichungen. Da diese Funktionale zunächst keine vorgegebene Struktur besitzen müssen, ist bei der Interpretation als Unschärfe Vorsicht geboten.

2.2.1 Simultaner Unschärfeansatz

Im Theorem 2.1.2.2 wurde eine Unschärfe über zwei nichtkommutierende, selbstadjungierte Operatoren A und B eingeführt. Über die Nichtnegativität der zugehörigen Parabel bezüglich des Parameters t wurde aus der Diskriminantenbedingung $D \leq 0$ die Unschärfeungleichung abgeleitet.
Die berechneten Unschärfen bezüglich der Gruppe $\mathbf{G}_{aWH}$ deuteten bereits aufgrund der Einbettungen auf eine Mischung der Operatoren und letztendlich der Varianzen hin, so daß es zunächst naheliegend ist, eine Linearkombination der infinitesimalen Operatoren anzusetzen. Oder anders formuliert, bei r gegebenen Operatoren finde einen geeigneten durch die Linearkombinationen aufgespannten 2-dim. Unterraum, der von allen Basiselementen abhängt und so konstruiert ist, daß der Kommutator nicht verschwindet.

Um das Theorem 2.1.2.2 verallgemeinern zu können, dürfen die Linaerkombination der Operatoren A_l nicht kommutieren.

Theorem 2.2.1.1 *Seien für $l = 1, \ldots, r$ die infinitesimalen, selbstadjungierten Operatoren A_l gegeben. Seien die Matrix der Kommutatoren durch*

$$K = (-i[A_k, A_l])_{k,l=1,\ldots,r} \ ,$$

der Vektor der Operatoren durch $A = (A_1, \ldots, A_r)'$ und die Linearkombinationen durch $B = \beta \cdot A$ sowie $C = \alpha \cdot A$, mit $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$ und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ und $\beta_l, \alpha_l \in \mathbb{R}$, gegeben. Falls β und α so gewählt sind, daß

$$\beta K \alpha' \neq 0 \ ,$$

dann gilt

i) $\forall t \in \mathbb{R}$: $(B - itC)^*(B - itC) = B^2 + t\beta K\alpha' + t^2C^2$.

ii) $\forall\psi \in \mathcal{D}([B,C])$ *mit* $\|\psi\|_2 = 1$, $\|(B-itC)\psi)\|^2 = \mu_\psi(B^2)+t\mu_\psi(\beta K\alpha')+t^2\mu_\psi(C^2)$.

iii) $\forall\psi \in \mathcal{D}([B,C])$, $\mu_\psi(\beta K\alpha')^2 \leq 4\mu_\psi(B^2)\mu_\psi(C^2)$.

iv) Gleichheit in iii) gilt genau dann, wenn es ein $t \in \mathbb{R}$ *gibt, so daß* $(B-itC)\psi = 0$ *oder dazu äquivalent* $(B^2+t^2C^2)\psi = -t\beta K\alpha'\psi$.

Beweis: Um die Gültigkeit der Aussagen zu überprüfen, ist zu testen, ob B, C und $\beta K\alpha'$ den Voraussetzungen von Theorem 2.1.2.2 genügen. Zunächst hat man $\left[\sum_j \beta_j A_j, \sum_l \alpha_l A_l\right]$ zu bestimmen. Mit $[A_j, A_l] = -[A_l, A_j]$ folgt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}\left[\sum_j \beta_j A_j, \sum_l \alpha_l A_l\right] &= \sum_j\sum_l \beta_j\alpha_l[A_j,A_l] = \sum_{j,l;j\neq l}\beta_j\alpha_l[A_j,A_l] \\ &= (\beta_1\alpha_2-\beta_2\alpha_1)[A_1,A_2] + (\beta_1\alpha_3-\beta_3\alpha_1)[A_1,A_3]+\ldots \\ &\qquad (\beta_2\alpha_3-\beta_3\alpha_2)[A_2,A_3]+\ldots \\ &= (\beta_1,\ldots,\beta_r)\begin{pmatrix} 0 & [A_1,A_2] & \ldots & [A_1,A_r] \\ -[A_1,A_2] & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & [A_{r-1},A_r] \\ -[A_1,A_r] & \cdots & -[A_{r-1},A_r] & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_r\end{pmatrix} \\ &= i\beta K\alpha' \neq 0\ .\end{aligned}$$

Außerdem sind B und C selbstadjungiert, da alle A_l selbstadjungiert sind. Nun ist noch das Theorem 2.1.2.2 anzuwenden. ■

Als nächstes ist die Struktur der Unschärferelation in Theorem 2.2.1.1 abzuleiten.

Satz 2.2.1.2 *Seien für* $l = 1,\ldots,r$ *die infinitesimalen, selbstadjungierten Operatoren* A_l *und weiter die Matrix der Kommutatoren und die Matrix der Kovarianzen durch*

$$K = (-i[A_k,A_l])_{k,l=1,\ldots,r} \quad \textit{und} \quad \Sigma = (\Delta(A_k,A_l))_{k,l=1,\ldots,r}$$

gegeben. Seien weiter zwei Linearkombinationen durch

$$B = \beta\cdot A \quad \text{und} \quad C = \alpha\cdot A\ ,$$

mit $\beta_l, \alpha_l \in R$ *so gegeben, daß* $\beta K\alpha' \neq 0$ *gilt. Dann gilt für alle* $\psi \in \mathcal{D}([B,C])$ *die Unschärferelation*

$$\mu_\psi(\beta K\alpha')^2 \leq 4\beta\Sigma\beta'\alpha\Sigma\alpha'\quad .$$

Beweis: Sei $B = \beta A$, dann folgt

$$\begin{aligned}\Delta_f^2(\beta A) &= \Delta_f(\beta A,\beta A) = \langle\beta Af,\beta Af\rangle \\ &= \sum_{j=1}^r\sum_{l=1}^r \beta_j\beta_l\langle A_jf, A_lf\rangle = \beta\Sigma\beta'\end{aligned}$$

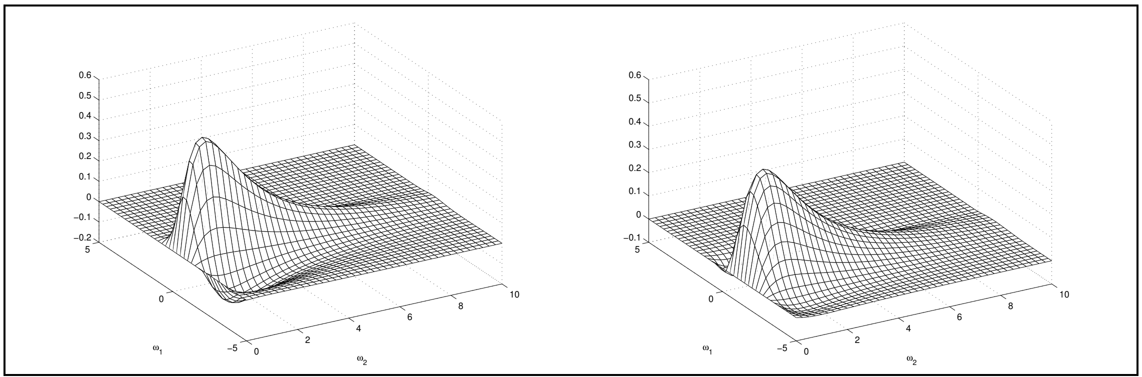

Abbildung 2.4: Links: Realteil der Fourier-Transformierten eines simultan minimierenden Wavelets der Gruppe $\mathbf{G}^d_{aWH}$ in $H^{\bar{s}}_{mix}(\mathbb{R}^2)$. Imaginärteil der Fourier-Transformierte des selben minimierenden Wavelets ($t = -1/2,\ \mu_1 = 1,\ \mu_2 = 0,\ s_1 = 3,\ s_2 = 1,\ \hat{\phi} = 1$).

Analog hat man $\Delta_f^2(\alpha A) = \alpha \Sigma \alpha'$. ■

Folgerung 2.2.1.3 *Die Darstellung der Unschärferelation läßt sich leicht durch setzen von* $V = \operatorname{diag}\left(\Delta_f^2(A_1), \ldots, \Delta_f^2(A_r)\right)$ *und* $M = (\Sigma - V)\beta'\alpha V + V\beta'\alpha(\Sigma - V)$ *in die Form*

$$\frac{1}{4}\mu_\psi(\beta K \alpha')^2 \leq \beta V \beta' \alpha V \alpha' + \beta M \alpha'$$

bringen.

Die explizite Darstellung der Unschärferelation ist dann durch

$$\frac{1}{4}\mu_\psi(\beta K \alpha')^2 \leq \sum_{j,l=1}^{r} \alpha_j^2 \beta_l^2 \Delta_f^2(A_j)\Delta_f^2(A_l)$$

$$+ \sum_{j,l=1;j\neq l}^{r} \sum_{n=1}^{r} \alpha_n^2 \beta_j \beta_l \Delta_f^2(A_n)\Delta_f(A_j, A_l) + \sum_{n,m=1;n\neq m}^{r} \sum_{j=1}^{r} \beta_j^2 \alpha_j \alpha_l \Delta_f^2(A_j)\Delta_f(A_n, A_m)$$

$$+ \left[\sum_{n,m=1;n\neq m}^{r} \alpha_n \alpha_m \Delta_f(A_n, A_m)\right]\left[\sum_{n,m=1;n\neq m}^{r} \beta_n \beta_m \Delta_f(A_n, A_m)\right]$$

gegeben.

Bemerkung 2.2.1.4 Die Forderung einer nichttrivialen Unschärfe durch $\beta K \alpha' \neq 0$ ist äquivalent damit, daß für alle f gilt: $\beta \Sigma \beta' \neq 0$ und $\alpha \Sigma \alpha' \neq 0$. Notwendig dafür ist, daß β und α nicht im Nullraum von Σ liegen.

Beispiel 2.2.1.5 Sei $\mathbf{G}^d_{aWH}$ die zugrundeliegende Gruppe und der Darstellungsraum $H^{\bar{s}}_{mix}(\mathbb{R}^2)$. Dann hat man nach Satz 2.1.4.32 vier infinitesimale Operatoren: A_q, A_p, A_a und A_b. Seien nun $A = (A_q, A_p, A_a, A_b)$ und die Vektoren β und α durch

$$\beta = (0,1,1,0) \quad \text{und} \quad \alpha = (1,0,0,1)$$

gegeben. Damit hat man dann

$$\begin{aligned} K &= -i \begin{pmatrix} 0 & [A_q, A_p] & [A_q, A_a] & [A_q, A_b] \\ -[A_q, A_p] & 0 & [A_p, A_a] & [A_p, A_b] \\ -[A_q, A_a] & -[A_p, A_a] & 0 & [A_a, A_b] \\ -[A_q, A_b] & -[A_p, A_b] & -[A_a, A_b] & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & A_\varphi & 0 & 0 \\ -A_\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_b \\ 0 & 0 & -A_b & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und deswegen gilt $\beta K \alpha' = (0,1,1,0) \cdot (0, -A_\varphi, A_b, 0)' = -A_\varphi + A_b \neq 0$, womit auch gleich der Kommutator bestimmt ist. Um die Struktur der Unschärferelation zu bestimmen, werden die folgenden Terme benötigt

$$\Sigma - V = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{\bar{s},f}(A_q, A_p) & \Delta_{\bar{s},f}(A_q, A_a) & \Delta_{\bar{s},f}(A_q, A_b) \\ \overline{\Delta_{\bar{s},f}(A_q, A_p)} & 0 & \Delta_{\bar{s},f}(A_p, A_a) & \Delta_{\bar{s},f}(A_p, A_b) \\ \overline{\Delta_{\bar{s},f}(A_q, A_a)} & \overline{\Delta_{\bar{s},f}(A_p, A_a)} & 0 & \Delta_{\bar{s},f}(A_a, A_b) \\ \overline{\Delta_{\bar{s},f}(A_q, A_b)} & \overline{\Delta_{\bar{s},f}(A_p, A_b)} & \overline{\Delta_{\bar{s},f}(A_a, A_b)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} \Delta^2_{\bar{s},f}(A_q) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta^2_{\bar{s},f}(A_p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^2_{\bar{s},f}(A_a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta^2_{\bar{s},f}(A_b) \end{pmatrix},$$

$$\beta V \beta' = \Delta^2_{\bar{s},f}(A_p) + \Delta^2_{\bar{s},f}(A_a) ,$$

$$\alpha V \alpha' = \Delta^2_{\bar{s},f}(A_q) + \Delta^2_{\bar{s},f}(A_b) ,$$

$$(\Sigma - V)\beta'\alpha V = \begin{pmatrix} & 0 & 0 & \\ (\Sigma - V)\beta'\Delta^2_{\bar{s},f}(A_q) & 0 & 0 & (\Sigma - V)\beta'\Delta^2_{\bar{s},f}(A_b) \\ & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & \end{pmatrix},$$

$$V\beta'\alpha(\Sigma - V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \alpha(\Sigma - V)\Delta^2_{\bar{s},f}(A_p) & & \\ & \alpha(\Sigma - V)\Delta^2_{\bar{s},f}(A_a) & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und daraus folgt, daß

$$\begin{aligned}\beta M\alpha' &= \left[\Delta^2_{\bar{s},f}(A_q)+\Delta^2_{\bar{s},f}(A_b)\right]\left[\Delta_{\bar{s},f}(A_p,A_a)+\overline{\Delta_{\bar{s},f}(A_p,A_a)}\right]\\ &\quad+\left[\Delta^2_{\bar{s},f}(A_p)+\Delta^2_{\bar{s},f}(A_a)\right]\left[\Delta_{\bar{s},f}(A_q,A_b)+\overline{\Delta_{\bar{s},f}(A_q,A_b)}\right]\end{aligned}$$

gilt und damit folgt zusammenfassend die Unschärfestruktur

$$\begin{aligned}\mu_{\bar{s},f}(-A_\varphi+A_b)^2 &\le 4\left[\Delta^2_{\bar{s},f}(A_p)+\Delta^2_{\bar{s},f}(A_a)\right]\left[\Delta^2_{\bar{s},f}(A_q)+\Delta^2_{\bar{s},f}(A_b)\right]\\ &\quad+\left[\Delta^2_{\bar{s},f}(A_q)+\Delta^2_{\bar{s},f}(A_b)\right]\left[\Delta_{\bar{s},f}(A_p,A_a)+\overline{\Delta_{\bar{s},f}(A_p,A_a)}\right]\\ &\quad+\left[\Delta^2_{\bar{s},f}(A_p)+\Delta^2_{\bar{s},f}(A_a)\right]\left[\Delta_{\bar{s},f}(A_q,A_b)+\overline{\Delta_{\bar{s},f}(A_q,A_b)}\right]\ .\end{aligned}$$

Der Vektor f der diese Unschärfe minimiert, ist im Fourier-Raum durch die Differentialgleichung

$$(A_a+A_p-\mu_1)\,\hat{f}=it\,(A_b+A_q-\mu_2)\,\hat{f}$$

bestimmt. Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist durch

$$\hat{f}(\omega,\eta)=\hat{\phi}(-\omega+\ln\eta)\eta^{s_2}e^{t\omega^2/2-\mu_2t\omega-\omega/2-i\mu_1\omega+\eta t-s_2\omega}\left(1+\omega^2\right)^{-s_1/2}\left(1+\eta^2\right)^{-s_2/2}\ ,$$

für $\eta>0$, wobei $t<0$, und für $\eta\le 0$ ist $\hat{f}=0$, siehe Abbildung 2.4. Die Parameter sind so zu wählen, daß die Zulässigkeitsbedingung erfüllt ist. □

Eine andere Interpretation des Ansatzes über Linearkombinationen ergibt sich über die quadratische Form.

Sei der Ausgangspunkt wieder die Differentialgleichung

$$(A-itB)\psi=0\ .$$

Falls $B=\beta\tilde{B}$ für Vektoren $\tilde{B}=(B_1,\dots,B_r)'$ und β, so hat man die Differentialgleichung

$$(A-it\beta_1B_1-it\beta_2B_2-\ldots-it\beta_rB_r)\psi=0$$

und mit $\alpha_i=t\beta_i$ folgt

$$(A-i\alpha_1B_1-i\alpha_2B_2-\ldots-i\alpha_rB_r)\psi=0\ .$$

Dieser Ansatz ist auch für $A=\beta\tilde{A}$ erweiterbar - soll aber hier nicht betrachtet werden.

Satz 2.2.1.6 *Seien für $l = 1, \ldots, r$ die infinitesimalen, selbstadjungierten Operatoren A_l gegeben, dann gilt für alle $\alpha_i \in \mathbb{R}$:*

$$(A - i\alpha_1 B_1 - \ldots - i\alpha_r B_r)^*(A - i\alpha_1 B_1 - \ldots - i\alpha_r B_r) = (1, \alpha_1, \ldots, \alpha_r) F (1, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)' ,$$

mit

$$F = \begin{pmatrix} A^2 & i/2[A, B_1] & & \cdots & i/2[A, B_r] \\ i/2[A, B_1] & B_1^2 & & & \\ & \ddots & (B_iB_j + B_jB_i)/2 & & \\ \vdots & (B_iB_j + B_jB_i)/2 & & \ddots & \vdots \\ i/2[A, B_r] & \cdots & & & B_r^2 \end{pmatrix} .$$

Zudem folgt für alle $\psi \in \mathcal{D}([A, \alpha\tilde{B}])$ mit $\|\psi\| = 1$, daß

$$\|(A - i\alpha\tilde{B})\psi\|^2 = (1, \alpha)\mu_\psi(F) \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} ,$$

mit

$$\mu_\psi(F) =$$

$$\begin{pmatrix} \mu_\psi(A^2) & \mu_\psi(i/2[A, B_1]) & & \cdots & \mu_\psi(i/2[A, B_r]) \\ \mu_\psi(i/2[A, B_1]) & \mu_\psi(B_1^2) & & & \\ & \ddots & \mu_\psi((B_iB_j + B_jB_i)/2) & & \\ \vdots & \mu_\psi((B_iB_j + B_jB_i)/2) & & \ddots & \vdots \\ \mu_\psi(i/2[A, B_r]) & \cdots & & & \mu_\psi(B_r^2) \end{pmatrix} .$$

Für $\psi \in \mathcal{D}([A, \alpha\tilde{B}])$ ist die Matrix $\mu_\psi(F)$ positiv semidefinit, das heißt für alle Eigenwerte gilt $\lambda_l \geq 0$, für $l = 1, \ldots, r$. Für $\psi \in \mathcal{D}([A, \alpha\tilde{B}])$ gilt somit eine Unschärferelation der Form

$$\det(\mu_\psi(F)) \geq 0 .$$

Beweis: Der Beweis beruht in der Anwendung des Theorem 2.1.2.2. Bezüglich jeden Parameters α_l betrachtet man eine nach oben geöffnete Parabel. ■

Bemerkung 2.2.1.7 Im vorigen Ansatz wurde die Nichttrivialität der Unschärferelation durch

$$\beta K \alpha' \neq 0$$

ausgedrückt. Diese Bedingung ist mit

$$\tilde{A} = (A, 0, \ldots, 0) \quad \text{und} \quad \beta = (1, 0, \ldots, 0)$$

übertragbar und führt auf die Bedingung

$$\sum_{l=1}^{r} \alpha_l [A, B_l] \neq 0 .$$

Die gemischten Einträge $\mu_\psi((B_iB_j + B_jB_i))$ entsprechen den Kovarianztermen.

Die vorgestellten Ansätze begründen sich auf den klassischen Ansatz. Dabei ist die Minimierung der resultierenden Unschärferelation äquivalent zum Lösen einer partiellen Differentialgleichung. Im nächsten Abschnitt wird versucht, über die Minimierung eines geeigneten Funktionals minimierende Vektoren zu finden.

2.2.2 Unschärfefunktionale

Üblicherweise ist eine Unschärferelation durch eine Ungleichung charakterisiert

$$\mu_\psi(C)^2 \leq \Delta_\psi^2(A)\Delta_\psi^2(B) \ ,$$

wobei A und B die selbstadjungierten, infinitesimalen Operatoren sind und $iC = [A, B]$. Der Ansatz besteht nun darin, ein Unschärfefunktional zu definieren und dieses unter Nebenbedingungen, $\|f\| = 1$, zu minimieren. Da bei der Definition des Unschärfefunktionals ein gewisser Freiraum besteht, wird die Idee des klassischen Ansatzes, nämlich die Bestimmung der Nullstellenbedingung der zugehörigen Parabel, nicht anwendbar sein.

Es soll hier die Idee geschildert und anhand eines Beispiels exemplarisch dargestellt werden.

Definition 2.2.2.1 *Seien A_1, A_2, ... selbstadjungierte, infinitesimale Operatoren. Eine reellwertige, nichtnegative Funktion auf dem Darstellungsraum $\mathcal{H}$*

$$U_{A_1A_2\ldots} : \ \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \ .$$

heißt ein **Unschärfefunktional** *auf $\mathcal{H}$, falls sie nur über $\Delta_\psi(A_r, A_l)$ und $\mu_\psi(i[A_r, A_l])$ für $r, l = 1, 2, \ldots$ von $\psi \in \mathcal{H}$ und A_r abhängt.*

Zum Beispiel kann ein Unschärfefunktional durch setzen von

$$U_{AB}(\psi) := \Delta_\psi^2(A)\Delta_\psi^2(B) - \mu_\psi(i[A, B])^2$$

gegeben sein. Das Ziel besteht nun darin, dasjenige $\psi \in \mathcal{H}$ zu finden, für das $U_{AB}(\psi) = 0$ gilt oder abgeschwächt $U_{AB} \to \min_\psi$.

Definition 2.2.2.2 *Das Funktional U_{AB} besitzt in $\psi_0 \in \mathcal{D}(U_{AB})$ ein* **globales Minimum**, *falls $U_{AB}(\psi) \geq U_{AB}(\psi_0)$ für alle $\psi \in \mathcal{D}(U_{AB})$. Das Funktional besitzt in $\psi_0 \in \mathcal{D}(U_{AB})$ ein* **lokales Minimum**, *falls ein $r > 0$ existiert, so daß $U_{AB}(\psi) \geq U_{AB}(\psi_0)$ für alle $\in \mathcal{D}(U_{AB}) \cap B_r(\psi_0)$.*

Für notwendige und hinreichende Bedingungen an die Existenz von Extrema sowie für die Beweise sei auf [Zei85] verwiesen. Die Ableitungsbegriffe befinden sich im Anhang. Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines lokalen Minimum beschreibt der folgende Satz.

Satz 2.2.2.3 *Sei $\psi_0 \in \mathcal{D}(U_{AB})$, $r > 0$ und besitze das Funktional U_{AB} in allen $\psi \in \mathcal{D}(U_{AB}) \cap B_r(\psi_0)$ die zweite Variation $\delta^2 U_{AB}(\psi; h)$ in alle Richtungen h. Gelte weiter*

$$\delta U_{AB}(\psi_0; h) = 0$$

für alle h und

$$\delta^2 U_{AB}(\psi_0; h) \geq c\|h\|^2$$

für alle h und eine Konstante $c > 0$. Existiere weiter zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\gamma(\varepsilon) > 0$ derart, daß

$$|\delta^2 U_{AB}(\psi_0 + \tilde{h}; h) - \delta^2 U_{AB}(\psi_0; h)| \leq \varepsilon\|h\|^2 \ ,$$

für alle $\tilde{h}, h$ mit $\|\tilde{h}\| \leq \min\{\gamma(\varepsilon), r\}$, dann besitzt U_{AB} in ψ_0 ein lokales Minimum.

Formuliert man nun diese Extremwertaufgabe, so ist noch zu berücksichtigen, daß die gesuchte Lösung ψ_0 noch $\|\psi_0\|_{\mathcal{H}} = 1$ erfüllen soll. Dementsprechend muß die Suche auf eingeschränkten Mengen stattfinden.

Satz 2.2.2.4 *Das Funktional $N_{AB} : D \subseteq \mathcal{D}(U_{AB}) \to \mathbb{R}$ mit*

$$N_{AB}(\psi) := U_{AB}(\psi) + \lambda G(\psi)$$

für $\psi \in D$ mit beliebigen fixierten $\lambda \in \mathbb{R}$ besitze in $\psi_0 \in D$ ein lokales oder globales Extremum. Dann besitzt das Funktional, eingeschränkt auf $\{\psi \in D \ : \ G(\psi) = G(\psi_0)\}$, in ψ_0 ein Extremum vom selben Typ.

Satz 2.2.2.5 *Seien $U_{AB}, G : D \to \mathbb{R}$, wobei D eine affine Menge über dem linearen (mindestens zweidimensionalen) Teilraum $M \subset \mathcal{D}(U_{AB})$ sei. U_{AB} besitze in ψ_0 ein lokales Extremum unter der Einschränkung*

$$\psi \in \{v \in D \ : \ G(v) = G(\psi_0)\} \ .$$

Die ersten Variationen $\delta U_{AB}(\psi_0; h)$ und $\delta G(\psi_0; h)$ seien schwach stetig in ψ_0. Dabei sei $\delta G(\psi_0; h) \neq 0$ für eine Richtung $h \in M$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\delta U_{AB}(\psi_0; v) + \lambda \delta G(\psi_0; v) = 0$$

für alle $v \in M$.

Definition 2.2.2.6 *Die in Satz 2.2.2.5 einführte reelle Zahl λ heißt* **Lagrange Multiplikator**.

Der Satz 2.2.2.5 zeigt nun eine Lösungsstrategie für die Minimierungsaufgabe mit Nebenbedingung

$$\psi \in D \ : \quad U_{AB}(\psi) = \min \quad \text{mit} \quad G(\psi) = c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$.

Angenommen, die Menge $\{\psi \in G \ : \ G(\psi) = c\}$ ist nicht leer und daß U_{AB} und G überall schwach stetige Variationen besitzten, wobei nirgends alle Variationen von G verschwinden sollen. Besitzt nun U_{AB} unter $G(\psi) = c$ ein lokales Extremum in ψ_0, so muß wegen Satz 2.2.2.5 das Funktional N_{AB} in ψ_0 die notwendige Bedingung

$$\delta U_{AB}(\psi_0; v) + \lambda \delta G(\psi_0; v) = 0$$

für alle $v \in M$ erfüllen. λ ist noch unbestimmt. Man kann λ bestimmen, indem man neben der notwendigen Bedingungsgleichung noch $G(\psi_0) = c$ berücksichtigt. Man erhält alle Funktionen ψ_0, in denen U_{AB} Extrema unter $G(\psi) = c$ besitzen kann. Mit Satz 2.2.2.4 kann man nun prüfen, ob auch U_{AB} ein Minimum unter $G(\psi) = c$ besitzt.

Am Beispiel der Gruppe $\mathbf{G}_{WH}$ soll die Unschärfefunktionalmethode demonstriert werden.

Satz 2.2.2.7 *Sei die eindimensionale Gruppe $\mathbf{G}_{WH}$ zugrundeliegend und sei $H^0(\mathbb{R})$ der Darstellungsraum. Das Unschärfefunktional und die Nebenbedingung seien durch*

$$U_{A_pA_q}(f) = \Delta_f^2(A_p)\Delta_f^2(A_q) \ , \quad G(f) = \|f\|^2 = 1$$

gegeben. Ein Minimum von U_{AB} unter G ist durch

$$f(x) = e^{-\pi \frac{x^2}{2}}$$

gegeben.

Beweis: Zunächst wird $\delta U_{A_pA_q}(f;h)$ und $\delta G(f;h)$ berechnet. Sei $A_1 := A_p - \mu_1$ und $A_2 := A_q - \mu_2$, dann hat man

$$\begin{aligned} \delta U_{A_pA_q}(f;h) &= \frac{\partial}{\partial t} U_{A_pA_q}(f+th) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \langle A_1(f+th), A_1(f+th)\rangle \langle A_2(f+th), A_2(f+th)\rangle \Big|_{t=0} \\ &= \left\langle A_2^2 f, f\right\rangle 2\Re \left\langle A_1^2 f, h\right\rangle + \left\langle A_1^2 f, f\right\rangle 2\Re \left\langle A_2^2 f, h\right\rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \delta G(f;h) &= \frac{\partial}{\partial t} G(f+th) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \langle f+th, f+th\rangle \Big|_{t=0} \\ &= 2\Re \langle f, h\rangle \end{aligned}$$

und somit die notwendige Bedingungsgleichung

$$\left\langle A_2^2 f, f\right\rangle 2\Re \left\langle A_1^2 f, h\right\rangle + \left\langle A_1^2 f, f\right\rangle 2\Re \left\langle A_2^2 f, h\right\rangle + \lambda 2\Re \langle f, h\rangle = 0$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Mit dem Ansatz $c_2 = \langle A_2^2 f, f\rangle$ und $c_1 = \langle A_1^2 f, f\rangle$ hat man eine äquivalente notwendige Bedingung

$$c_2 x^2 f(x) - c_1 \frac{d^2}{dx^2} f(x) + \lambda f(x) = 0$$

mit einer Lösung $f(x) = e^{-\pi x^2/2}$, wobei dann $\sqrt{c_2/c_1} = \pi$, $-\lambda = \sqrt{c_1 c_2} = c_1 \pi$ gilt. Die Struktur dieser Lösung stimmt mit der Lösung der zugehörigen Unschärfedifferentialgleichung überein. ■

Bemerkung 2.2.2.8 Die Bedingungsgleichung

$$c_2 x^2 f(x) - c_1 \frac{d^2}{dx^2} f(x) + \lambda f(x) = 0$$

entspricht der äquivalenten Formulierung der zu lösenden Differentialgleichung aus Theorem 2.1.2.2. Die ursprüngliche Differentialgleichung lautete

$$(A_p - itA_q)\psi = 0$$

und die dazu äquivalente

$$(A_p - itA_q)^*(A_p - itA_q)\psi = (A_p^2 + t^2 A_q^2)\psi + tA_\varphi \psi = 0 \ .$$

Dies entspricht gerade

$$x^2 \psi(x) - t^2 \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = t\psi(x) \ .$$

Bemerkung 2.2.2.9 Der Satz 2.2.2.7 zeigt exemplarisch, wie entsprechende Lösungen gefunden werden können ohne auf die bekannten Beziehungen zwischen infinitesimalen Operatoren und Minimalitätsbedingungen eingehen zu müssen. In der Regel entstehen jedoch Differentialgleichungen, die explizit schwierig zu lösen sind. Deshalb kann es sinnvoll sein, mit entsprechenden Ansatzfunktionen numerisch eine Lösung zu suchen. Der Vorteil dieser Funktionalmethode besteht darin, Funktionale zu definieren, die heuristisch sinnvoll sein können, aber sich nicht ohne weiteres herleiten lassen, zum Beispiel

$$U_{ABC}(f) = \Delta_f^2(A)\Delta_f^2(B)\Delta_f^2(C) \ .$$

Es ist jedoch fraglich, inwiefern eine Interpretation im Sinne einer physikalischen Unschärferelation möglich ist.

Kapitel 3

Waveletbasierte Analyse von Radar Signalen

Dieses Kapitel beinhaltet die Anwendung von Wavelet-Techniken zur Analyse von Windprofiler-Daten. Diese Art von Radardaten treten beim Deutschen Wetterdienst auf und werden zur Bestimmung der Dynamik der unteren und mittleren Erdatmosphäre herangezogen. Insbesondere sollen vertikale Windvektorfelder rekonstruiert werden.
Die dabei typischen Problemzonen und die Lösungsansätze bei der Adaptierung von waveletbasierten Methoden sowie numerische Simulationsbeispiele, Echtdatenauswertungen und vergleichende Arbeiten mit der NOAA (USA) sind in [LT00a, LT00b, LT01] beschrieben. Die mathematischen Ideen und die numerische Realisierung werden basierend auf [DJ94, DJ92, DJKP93, HKPT98] in Abschnitt 3.1 erläutert.
Beim jetzigen Entwicklungsstand der Methode werden ausschließlich diskrete Multiskalen-Techniken eingesetzt. Weitergehende Ansätze erfordern jedoch eine Vertiefung und Verfeinerung der Analysen mit zunächst kontinuierlichen Verfahren. Zu diesem Zweck wird in Abschnitt 3.2 eine kontinuierliche Multiskalen-Analyse in H^s vorgestellt, die es ermöglichen soll, die in Kapitel 2 eingeführten Waveletkonstruktionen bei der Signalzerlegung anzuwenden.

3.1 Diskrete Shrinkage Verfahren

Typische Windprofiler-Radardaten enthalten verschiedenste Reflexionen aus der Atmosphäre. Dazu gehört die Partikelrückstreuung, von der angenommen wird, daß sie die radialen Windgeschindigkeits- und Windrichtungkomponenten repräsentiert, sowie Reflexion von größeren bewegten (intermittent clutter) und unbewegten Objekten (ground clutter) und anderweitige elektromagnetische Strahlung.
Konzepte der Multiskalen-Analyse und der nichtparametrischen Statistik sollen angewandt werden, um das rückgestreute Signal so zu filtern, daß im wesentlichen nur noch relevante Atmosphärensignale enthalten sind, die zur weiteren Determinierung von meteorologischen Parametern benötigt werden. Derzeit in Hardwarekomponenten verwendete Techniken benutzten vereinfachte Datenmodelle und ausschließlich Fourierfilter-Methoden zur Bereinigung des Radarechos,

Standort	Lindenberg
Latitude	52.21 N
Longitude	14.13 E
Altitude	101 m msl
Frequenz	482.0078 MHz
Beamkegel	3 Grad
Beamanzahl	5
Zenitwinkel	15 Grad
Effektive Antennenflächen	140 m^2
Puls-Peak Leistung	16 kW
Altitude Range	0.5 - 8.0 km
Pulsperiode (T)	61 μs
Pulsdauer (τ)	1700 ns (Low Mode)
# Koherente Integrationen (N)	144
# Spektrale Integrationen	1 (none)
# Punkte für online FFT	2048

Abbildung 3.1: Technische Spezifikation eines RWP des Meteorologischen Observatoriums Lindenberg.

siehe Abbildung 3.2. Bei auftretenden instationären oder transienten Signalkomponenten ist dies unzureichend und führt zu fehlerhaften Windvektorrekonstruktionen.

3.1.1 Einführung in das Meteorologische Problem

Radar Wind Profiler (RWP) sind meteorologische Geräte zur Analyse der Dynamik der mittleren Erdatmosphäre. Die technischen Spezifikationen eines Windprofilers im Meteorologischen Observatorium Lindenberg zeigt die Abbildung 3.1.
Um die vertikalen Windprofile zu erstellen, bedient man sich des Dopplereffektes: dabei transmittiert das Radargerät kurze elektomagnetische Pulse ϕ in fixierte Beamrichtungen und empfängt das um Größenordnungen schwächere, rückgestreute und frequenzverschobene Signal. Diesen aus der Bewegung der Teilchen resultierenden Frequenz- beziehungsweise Dopplershift f_d benutzt man, um die Geschwindigkeitskomponente projeziert auf die Beamrichtung zu bestimmen.
Falls die Bandbreite von ϕ wesentlich größer als die Dopplerverschiebung f_d ist ($1/\tau \sim 100 \ldots 1000kHz$ und $f_d \sim 10 \ldots 500Hz$, wobei τ die Dauer des ausgesandten Pulses ist), kann die Frequenzverschiebung nicht durch einen einzigen Puls bestimmt werden. Deshalb werden in der Regel mehrere Pulse ausgesandt, um die Phasenveränderung errechnen und letztendlich meteorologische Parameter aus dem Fourierpowerspektrum bestimmen zu können, vergleiche Abbildung 3.3.

Definition 3.1.1.1 *Die* **Radardaten** $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *sind von diskreter, komplexer Struktur*

$$f_k = I_k + i \cdot Q_k \ ,$$

wobei man I_k *mit* **In-Phase** *und* Q_k *mit* **Quadrature-Phase** *bezeichnet.*

$$\begin{array}{c} \boxed{\text{Digitalisiertes Radarsignal}} \\ \downarrow \\ \boxed{\text{Koherente Integration (Time-Domain Averaging)}} \\ \downarrow \\ \boxed{\text{Fourier Analysis (Spectral Averaging)}} \\ \downarrow \\ \boxed{\text{Spektralparameterschätzungen (Momente)}} \\ \downarrow \\ \boxed{\text{Windvektorrekonstruktion}} \end{array}$$

Abbildung 3.2: Ablaufdiagramm von in RWP implementierten Signalanalyseverfahren.

Aus physikalischer Sicht wird durch einen ausgesandten Puls eine Spannung $|f_k|$ und eine Phase θ_k erzeugt, daß heißt

$$I_k = |f_k| \cos \theta_k \quad \text{und} \quad Q_k = |f_k| \sin \theta_k \ .$$

Definition 3.1.1.2 *Das zu lösende* **Problem** *besteht darin, das Atmosphärenecho aus dem gemessenen Radarsignal $f = \{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ mit dem* **Modell**

$$f = f_{\mathrm{a}} + f_{\mathrm{ic}} + f_{\mathrm{gc}} + f_{\mathrm{rfi}} + \varepsilon \quad ,$$

wobei f_{a}-Atmosphärenecho, f_{ic}-intermittent clutter, f_{gc}-ground clutter, f_{rfi}-Radiofrequenzinterferenzen und ε-weißes Rauschen, durch geeignete Filtermethoden zu extrahieren.

Bemerkung 3.1.1.3 Ein natürlicher Lösungsansatz für die Seperation von f_{a} besteht in einer Multiskalen-Auflösung des Signals f. Der Güteparameter soll die maximale erwartete Abweichung der Schätzung $\tilde{f}_{\mathrm{a}}$ vom wahren Atmosphärenecho f_{a} sein.

Diesem Ansatz folgend wird im kommenden Abschnitt die diskrete Multiskalen-Analyse wiederholt, vergleiche [HKPT98], und anschließend ein Schätzer für f_{a} hergeleitet.

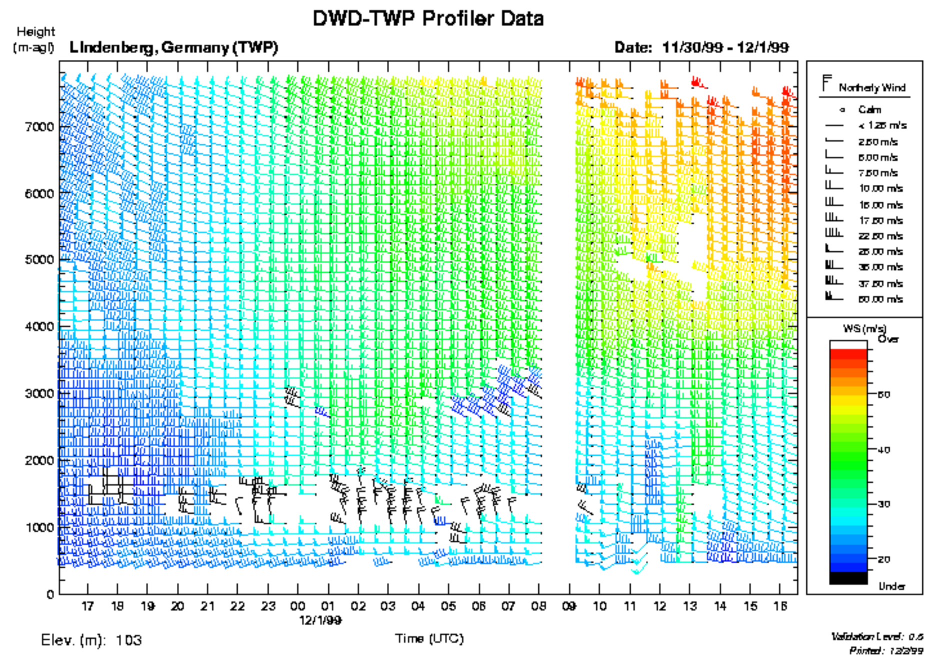

Abbildung 3.3: Darstellung einer Windvektorrekonstruktion - deutlich zu erkennen sind ground clutter Einflüsse zwischen 1000 und 2000 m. Die dort berechneten Windvektoren sind stark verzerrt.

3.1.2 Waveletschätzer für das Atmosphärenecho

Multiskalen-Analyse

Definition 3.1.2.1 *Sei* $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, *so daß die Menge* $\{\varphi(\cdot - k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *ein Orthonormalsystem bildet. Sei*

$$\varphi_{jk}(x) := 2^{j/2}\varphi(2^j x - k) \quad ,$$

mit $j, k \in \mathbb{Z}$. *Weiter definiert man lineare Räume* V_j

$$\begin{aligned} V_0 &:= \{f(c) = \sum_k c_k \varphi(x-k) \ : \ \sum_k |c_k|^2 < \infty\} \ , \\ V_1 &:= \{h(x) = f(2x) \ : \ f \in V_0\} \\ &\vdots \\ V_j &:= \{h(x) = f(2^j x) \ : \ f \in V_0\} \ , \quad j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Man bezeichnet φ *als* **Generator** *der Folge von Räumen* $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$.

Definition 3.1.2.2 *Sei* $\{\varphi_{0k}\}$ *ein orthonormales System in* $L_2(\mathbb{R})$. *Falls* φ *so gewählt ist, daß*

$$V_j \subset V_{j+1} \ , \quad j \in \mathbb{Z}$$

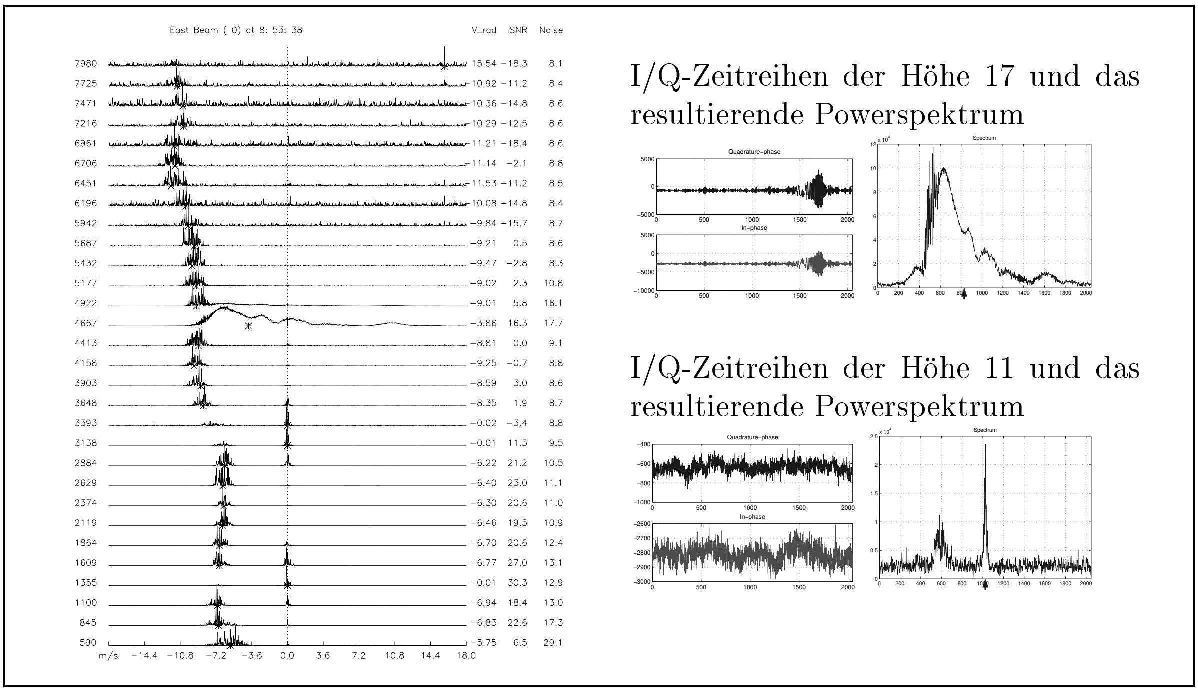

Abbildung 3.4: Die linke Abbilung zeigt einen Höhenschnitt der Dopplerspektren. Die rechten Abbildungen zeigen einen detailierten Blick in die I/Q-Zeitreihen und den zugehörigen Dopplerspektren für die Höhen 11 nud 17.

und daß

$$\overline{\bigcup_{j\geq 0} V_j} = L_2(\mathbb{R})$$

gilt, dann bezeichnet man die Folge $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *als eine* **Multiskalen-Analyse** *(MSA) des* $L_2(\mathbb{R})$*. Die Generatorfunktion* φ *wird dann* **Vater-Wavelet** *genannt.*

Angenommen $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ ist eine MSA des $L_2(\mathbb{R})$, dann kann man sich Räume

$$W_j := V_{j+1} \ominus V_j \ , \quad j \in \mathbb{Z}$$

definieren. Somit hat man dann

$$V_j = V_0 \oplus \bigoplus_{l=0}^{j} W_l \ .$$

Iteriert man diesen Vorgang, erhält man

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j = V_0 \oplus \bigoplus_{l=0}^{\infty} W_l \ \text{ und schließlich } \ L_2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus \bigoplus_{l=0}^{\infty} W_l \ .$$

Folgerung 3.1.2.3 *Jede Funktion* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *besitzt die konvergente Reihendarstellung*

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \varphi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_k \beta_{jk} \psi_{jk}(x) \ ,$$

wobei α_k, β_{jk} *die Reihenkoeffizienten sind und* $\{\psi_{jk}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *eine Basis für* W_j *darstellt. Hierbei ist* $\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$.

Definition 3.1.2.4 *Die Reihendarstellung in 3.1.2.3 nennt man* **Multiskalen-Auflösung** *der Funktion* f. *Die Basisfunktion* ψ *wird* **Mutter-Wavelet** *genannt.*

Definition 3.1.2.5 **Bedingung** L. *Die Funktion* $L_\varphi(x) := \sum_k |\varphi(x-k)|$ *sei so, daß*

$$\text{ess}\ \sup_x L_\varphi(x) < \infty \ .$$

Approximation und Besov-Räume

Zuerst werden die Sobolev-Räume für einen ganzzahligen Regularitätsindex wiederholt.

Definition 3.1.2.6 *Sei* $1 \le p \le \infty$ *und* $m \in \{0, 1, \ldots\}$. *Die Räume*

$$W_p^m(\mathbb{R}) := H_p^m(\mathbb{R})$$

heißen **Sobolev-Räume** *mit ganzzahligem Regularitätsindex. Die Räume* $\tilde{W}_p^m(\mathbb{R})$ *sind wie folgt definiert:* $\tilde{W}_p^m(\mathbb{R}) = W_p^m(\mathbb{R})$ *für* $1 \le p < \infty$ *und*

$$\tilde{W}_\infty^m(\mathbb{R}) = \{f \in W_\infty^m(\mathbb{R}) \ \ : \ \ f^{(m)} \textit{ ist glm. stetig } \} \ .$$

Approximationen an die Funktion f können nun über den Approximations- beziehungsweise der Projektionskern K eingeführt werden.

Definition 3.1.2.7 *Eine* **Kern** $K(x,y)$ *ist eine Funktion definiert auf* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. *Falls* $K(x,y) = K(x-y)$ *gilt, wird* K *ein* **Faltungskern** *genannt.*

Sei K ein Kern. Für eine positive reelle Zahl h sei

$$K_h(x,y) := h^{-1}K(h^{-1}x, h^{-1}y) \ .$$

Falls $h = 2^{-j}$ notiert man K_j anstatt K_h. Sei f eine meßbare Funktion, dann sei eine mögliche Approximation an f durch

$$K_h f(x) := \int K_h(x,y) f(y) dy$$

gegeben. Folgende Bedingungen an K werden später noch benötigt.

Definition 3.1.2.8 Bedingung *H. Es existiert eine integrierbare Funktion $F(x)$, so daß*

$$|K(x,y)| \leq F(x-y) \ , \quad x,y \in \mathbb{R}$$

gilt.

Bedingung *H(N). Es gilt Bedingung H und*

$$\int |x|^N F(x)dx < \infty \ .$$

Bedingung *M(N). Es gilt Bedingung H(N) und*

$$\int K(x,y)(y-x)^k dy = \delta_{0k} \ , \quad k = 0, \dots, N \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Es existieren Approximationsaussagen in W_p^m über $K_j f$, mit

$$K_j(x,y) = \sum_k 2^j \varphi(2^j x - k)\overline{\varphi(2^j y - k)} \ ,$$

wobei K_j der Projektionskern auf V_j ist. Die Konvergenzraten sind in L_p für $h \to 0$.

Theorem 3.1.2.9 *Sei K ein Kern und $N \in \mathbb{N}$, dann gilt:*

i) Genüge K der Bedingung $M(N)$ und sei $f \in \tilde{W}_p^N$, dann folgt für $1 \leq p \leq \infty$

$$h^{-N}\|K_h f - f\|_p \stackrel{h \to 0}{\longrightarrow} 0 \ .$$

ii) Genüge K den Bedingungen $M(N)$ und $H(N+1)$ und sei $f \in W_p^{(N+1)}$, dann gibt es ein $0 < C < \infty$, so daß für $1 \leq p \leq \infty$ und $h \to 0$ folgt

$$h^{-(N+1)}\|K_h f - f\|_p \leq C \ .$$

Beweis: Ein Beweis befindet sich in [HKPT98]. ■

Bemerkung 3.1.2.10 Eine allgemeinere Möglichkeit zur Charakterisierung von Approximationen und Regularitätseigenschaften bieten Besov-Räume. Diese Räume bieten im Gegensatz zu Sobolev-Räumen den Vorteil einer Charakterisierung mit Folgenraumkoeffizienten und liefern somit einen natürlichen Zugang zu Wavelet-Techniken.

Definition 3.1.2.11 *Sei $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$. Sei $T_h f(x) = f(x-h)$, $\Delta_h f = T_h f - f$ und $\Delta_h^2 f = \Delta_h \Delta_h f$. Für $t \geq 0$ seien* **Stetigkeitsmodule** *durch*

$$\omega_p^1(f,t) := \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h f\|_p \ , \quad \omega_p^2(f,t) := \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^2 f\|_p$$

definiert.

Definition 3.1.2.12 *Sei $1 \le p, q \le \infty$ und sei $s = n + \tau$, mit $n \in \{0, 1, \ldots\}$ und $0 < \tau \le 1$. Der* **Besov-Raum** *ist durch*

$$B_p^{sq}(\mathbb{R}) = \{ f \in W_p^n(\mathbb{R}) \;\; : \;\; \omega_p^2(f^{(n)}, t) = \epsilon(t) t^{\tau} \; mit \; \|\epsilon\|_q < \infty \; \}$$

definiert. $B_p^{sq}(\mathbb{R})$ ist mit der Norm

$$\|f\|_{spq} = \|f\|_{W_p^n} + \left\| \frac{\omega_p^2(f^{(n)}, t)}{t^{\tau}} \right\|_q$$

ausgestattet.

Die kontinuierliche Definition 3.1.2.12 kann diskretisiert werden.

Bemerkung 3.1.2.13 Der Besov-Raum B_p^{sq} ist der Raum aller Funktionen f, so daß

$$f \in W_p^n(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \{2^{j\tau} \omega_p^2(f^{(n)}, 2^{-j})\}_{j \in \mathbb{Z}} \in l_q(\mathbb{Z})$$

mit der Norm

$$\|f\|_{W_p^n} + \|\{2^{j\tau} \omega_p^2(f^{(n)}, 2^{-j})\}\|_{l_q} \; .$$

Die Normen sind äquivalent, da $\omega_p^2(f^{(n)}, t)$ nicht fallend und $t^{-\tau}$ fallend ist.

Es wird nun die Folgenraumcharakterisierung durch Waveletkoeffizienten vorbereitet. Die Bedingung L, siehe Definition 3.1.2.5, impliziert, daß $\varphi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty$. Das heißt, $\hat{\varphi}$ ist stetig und $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$ für $1 \le p \le \infty$. Die Bedingung L ist eine Lokalisierungsbedingung.

Definition 3.1.2.14 **Bedingung** *S. Es gibt eine Funktion Φ mit*

$$\int \Phi(|x|) dx < \infty \;\; und \;\; |\varphi(x)| \le \Phi(|x|) \;\; fast \; überall.$$

Bedingung *S(N). Es gilt Bedingung S und*

$$\int \Phi(|x|) |x|^N dx < \infty \; .$$

Theorem 3.1.2.15 *Generiere φ eine MSA und erfülle die Bedingung S(N+1) für ein $N \in \mathbb{N}$. Angenommen φ ist $N+1$ schwach differenzierbar und $\varphi^{(N+1)}$ erfülle die Bedingung L. Dann sind für jedes $0 < s < N+1$, $1 \le q, p \le \infty$ und jede Funktion $f \in L_p(\mathbb{R})$ die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) $f \in B_p^{sq}(\mathbb{R})$,

ii) $\|K_j f - f\|_p = 2^{-js} \epsilon_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, *mit* $\{\epsilon_j\} \in l_q$,

iii) $\|\alpha_0\|_{l_p} < \infty$ *und* $\|\beta_j\|_{l_p} = 2^{-j(s+1/2-1/p)} \epsilon'_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, *mit* $\{\epsilon'_j\} \in l_q$.

Beweis: Dieses zusammenfassende Theorem kann in [HKPT98] nachgeschlagen werden. ■

Folgerung 3.1.2.16 *Unter den Voraussetzungen des Theorems 3.1.2.15 ist die Besov-Norm* $\|f\|_{sqp}$, $1 \leq q, p \leq \infty$, *äquivalent zu der Norm*

$$\|f\|_{sqp}^{\diamond} = \left(\sum_k |\alpha_{0k}|^p \right)^{1/p} + \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{j(s+1/2-1/p)} \left(\sum_k |\beta_{jk}|^p \right)^{1/p} \right)^q \right\}^{1/q} ,$$

mit $\alpha_{0k} = \int f(x)\overline{\varphi_{0k}(x)}dx$ *und* $\beta_{jk} = \int f(x)\overline{\psi_{jk}(x)}dx$.

Waveletbasierte Schätzer

Nachdem die Grundlagen für die Folgenraumcharakterisierung zur Verfügung stehen, soll im nächsten Schritt ein geeigneter Schätzer für f_{a} bereitgestellt werden. Man kann die Aufgabe zunächst als Dichteschätzung formulieren, siehe [DJ94, DJKP93], und dann zur Regressionsschätzung übergehen, vergleiche [HKPT98].

Definition 3.1.2.17 *Angenommen die Beobachtungen* $X_1, \ldots, X_n$ *sind unabhängige, identisch verteielte Zufallsvariablen mit unbekannter Dichte* f. *Eine lineare Schätzung ist die Projektion von* f *auf* V_{j_1}, *die durch*

$$\hat{f}_{j_1}(x) = \sum_k \hat{\alpha}_{j_0}\varphi_{j_0k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_k \hat{\beta}_{jk}\psi_{jk}(x) ,$$

mit $j_0, j_1 \in \mathbb{Z}$, $\hat{\alpha}_{jk} = n^{-1}\sum_{j=1}^{k} \varphi_{jk}(X_i)$ *und* $\hat{\beta}_{jk} = n^{-1}\sum_{j=1}^{k} \psi_{jk}(X_i)$, *definiert ist.*

Bemerkung 3.1.2.18 Angenommen φ und ψ sind kompakt getragen, dann hat man

$$\sum_k \varphi_{jk}(X_i)\varphi_{jk}(x) + \sum_k \psi_{jk}(X_i)\psi_{jk}(x) = \sum_k \varphi_{j+1,k}(X_i)\varphi_{j+1,k}(x) = K_{j+1}(x, X_i) .$$

Durch sukzessives Iterieren von $j = j_0$ bis $j = j_1$ erhält man

$$\hat{f}_{j_1}(x) = \sum_k \hat{\alpha}_{j_1+1,k}\varphi_{j_1+1,k}(x) = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} K_{j_1+1}(x, X_i) .$$

Nach Einführung dieses linearen Schätzer stellt sich die Frage der Bewertung und der Optimalität. Der lineare Dichte-Schätzer ist durch j_1 gekennzeichnet, das heißt die Optimalität ist durch j_1 steuerbar. Die Optimalität soll durch den erwarteten L_p-Abstand der Schätzung von der wahren Funktion beschrieben werden.

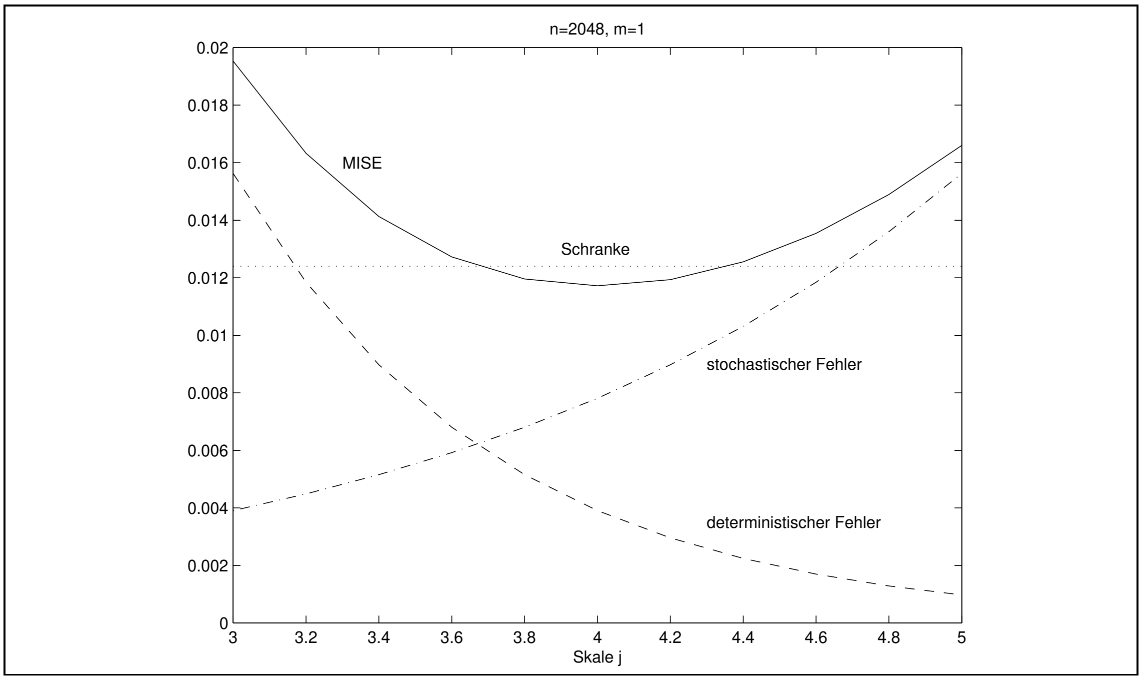

Abbildung 3.5: Visualisierung des mittleren integrierten quadratischen Fehlers, des Methodenfehlers, des Datenfehlers und der Schranke der asymptotischen Fehlerabschätzung. Das Optimum liegt in diesem Beispiel bei $j_1 = 4$. Für diese Skale ist obere Schranke des Gesamtfehlers vernünftig.

Definition 3.1.2.19 *Der* **mittlere integrierte quadratische Fehler** *eines Schätzers $\hat{f}$ für f ist wie folgt definiert*

$$E\|\hat{f} - f\|_2^2$$

und wird mit MISE bezeichnet.

Bemerkung 3.1.2.20 Der Fehler $MISE$ ist in zwei Terme zerlegbar

$$\begin{aligned} E\|\hat{f} - f\|_2^2 &= \int\int \Big(\hat{f}^2(t,x)f(x) - 2\hat{f}(t,x)f(t)f(x) + f^2(t)\Big)\,dxdt \\ &= \int \Big(E\hat{f}^2(t,\cdot) - 2E\hat{f}(t,\cdot)f(t) + f^2(t)\Big)\,dt \\ &= \int \Big(E\hat{f}^2(t,\cdot) - 2(E\hat{f}(t,\cdot))^2 + (E\hat{f}(t,\cdot))^2 + (E\hat{f}(t,\cdot))^2 - \\ &\qquad 2E\hat{f}(t,\cdot)f(t) + f^2(t)\Big)\,dt \\ &= E\int \Big(\hat{f}(t,\cdot) - E\hat{f}(t,\cdot)\Big)^2 dt + \int \Big(E\hat{f}(t,\cdot) - f(t)\Big)^2 dt \\ &= E\|\hat{f} - E\hat{f}\|_2^2 + \|E\hat{f} - f\|_2^2 \ . \end{aligned}$$

Hierbei beschreibt $E\|\hat{f} - E\hat{f}\|_2^2$ den stochastischen Fehler, das heißt den Fehler der Daten und $\|E\hat{f} - f\|_2^2$ den deterministischen Fehler, der die Approximation von f

an $\hat{f}$ charakterisiert.

Zunächst wird angenommen $f \in W_2^m$, wobei die Norm der Ableitung durch B beschränkt sei. Die beiden Fehlerterme werde separat abgeschätzt.

Satz 3.1.2.21 *Sei φ so gewählt, daß der Projektionskern*

$$K(x,y) = \sum_k \varphi(x-k)\varphi(y-k)$$

für $N \in \mathbb{N}$ den Bedingungen $H(N+1)$ und $M(N)$ genügt. Dann existiert für jedes $m \leq N+1$ eine positive Konstante $C > 0$, so daß

$$\sup_{f \in W_2^m(B)} \|E(\hat{f}_{j_1}) - f\|_2 \leq C 2^{-j_1 m} \quad .$$

Beweis: Da die Beobachtungen i.i.d. sind, hat man zunächst

$$\begin{aligned}
E(\hat{f}_{j_1}) &= E\left(n^{-1}\sum_{l=1}^{n} K_{j_1+1}(x, X_1)\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} n^{-1}\sum_{l=1}^{n} K_{j_1+1}(x,y) f(y)dy \\
&= n^{-1}\sum_{l=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} K_{j_1+1}(x,y)f(y)dy = K_{j_1+1}f(x) \ .
\end{aligned}$$

mit Theorem 3.1.2.9 *ii)* folgt die Aussage. ∎

Satz 3.1.2.22 *Sei φ so gewählt, daß der Projektionskern*

$$K(x,y) = \sum_k \varphi(x-k)\varphi(y-k)$$

der Bedingung H mit $F \in L_2$ genügt. Dann folgt

$$E\|\hat{f}_{j_1} - E(\hat{f}_{j_1})\|_2^2 \leq \frac{2^{j_1+1}}{n}\int F^2(x)dx \quad .$$

Beweis: Sei $Y_i(x) := K_{j_1+1}(x, X_i) - E(K_{j_1+1}(x, X_i))$, dann ist Y_i eine i.i.d. Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und es gilt folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
E\|\hat{f}_{j_1} - E(f_{j_1})\|_2^2 &= E\int |\hat{f}_{j_1}(x) - E(f_{j_1}(x))|^2 dx \\
&= E\int |n^{-1}\sum_{i=1}^{n} K_{j_1+1}(x, X_i) - K_{j_1+1}f(x)|^2 dx \\
&= E\int n^{-2}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i(x)\right)^2 dx = n^{-1}\int EY_1^2(x)dx \ .
\end{aligned}$$

Wegen $EY_i^2(x) = EK_{j_1+1}^2(x, X_i) - K_{j_1+1}^2 F(x) \leq EK_{j_1+1}^2(x, X_i)$ und Bedingung H mit $F \in L_2$ folgt

$$EY_i^2(x) \leq 2^{2j_1+2} \int F^2(2^{j_1+1}(x-y)) f(y) dy$$

und damit

$$\begin{aligned} E\|\hat{f}_{j_1} - E(f_{j_1})\|_2^2 &\leq \frac{2^{2j_1+2}}{n} \int \left(\int F^2(2^{j_1+1}(x-y)) dx \right) f(y) dy \\ &= \frac{2^{2j_1+2}}{n} \int F^2(x) dx \ . \end{aligned}$$

■

Mit diesen beiden Ergebnissen kann der Gesamtfehler $MISE$ abgeschätzt werden. Das gegenläufige Verhalten der Teilfehler und des $MISE$-Fehlerschätzers ist in Abbildung 3.5 dargestellt.

Theorem 3.1.2.23 *Gelten die Annahmen der Sätze 3.1.2.21 und 3.1.2.22 dann ist der $MISE$ gleichmäßig beschränkt*

$$\sup_{f \in W_2^m(B)} E\|\hat{f}_{j_1} - f\|_2^2 \leq C_1 \frac{2^{j_1}}{n} + C_2 2^{-2j_1 m} \ ,$$

wobei $C_1, C_2 > 0$. Für große n hat asymptotisch die Schranke ein Minimum, falls j_1 so gewählt ist, daß mit Zahlen $0 < K_1 < K_2 < \infty$ gilt

$$K_1 \leq \frac{2^{j_1}}{n^{1/(2m+1)}} \leq K_2 \ .$$

Falls j_1 entsprechend gewählt ist, folgt für $C > 0$

$$\sup_{f \in W_2^m(B)} E\|\hat{f}_{j_1} - f\|_2^2 \leq C n^{-\frac{2m}{2m+1}} \ .$$

Beweis: Die Summe $\Phi(j_1) := \frac{2^{j_1}}{n} + 2^{-2j_1 m}$ hat asymptotisch ein Minimum (bis auf Konstanten), falls die beiden Terme das gleiche Verhalten besitzen. Dies ist anhand der Ableitung ebenfalls einzusehen $\Phi'(j_1) = \ln 2 \, (2^{j_1}/n - 2m 2^{-2j_1 m}) \stackrel{!}{=} 0$, das heißt bei

$$j \ln 2 = \frac{\ln 2 + \ln m + \ln n}{2m+1}$$

besitzt Φ ein Minimum. Ist n nun groß genug, so gilt $j_1 \ln 2 \sim \frac{\ln n}{2m+1}$, dann folgt

$$\begin{aligned} \Phi(j_1) &= \exp(j \ln 2 - \ln n) + \exp(-2jm \ln 2) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2m+1} \ln n - \ln n \right) + \exp\left(-\frac{2m}{2m+1} \ln n \right) = 2 n^{-\frac{2m}{2m+1}} \ . \end{aligned}$$

■

Es bekannt, daß sich dieses Resultat nun aufgrund des Theorems 3.1.2.15 auf Besov-Räume B_p^{sq} übertragen läßt. Die Norm sei wieder durch B beschränkt.

Theorem 3.1.2.24 *Sei φ so gewählt, daß $H(N+1)$, $M(N)$ und L erfüllt sind mit $F \in L_p$, $0 < s < N+1$, $2 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, dann gilt*

$$\sup_{f \in B_p^{sq}(B)} E\|\hat{f}_{j_1} - f\|_p^p \leq C\left(\left(\frac{2^{j_1}}{n}\right)^{p/2} + 2^{-2j_1 sp}\right) ,$$

wobei $C > 0$ und $2^{j_1} \leq n$. Für große n hat asymptotisch die Schranke ein Minimum, falls j_1 so gewählt ist, daß mit Zahlen $0 < K_1 < K_2 < \infty$ gilt

$$K_1 \leq \frac{2^{j_1}}{n^{1/(2s+1)}} \leq K_2 .$$

Falls j_1 entsprechend gewählt, ist folgt für $C > 0$

$$\sup_{f \in B_p^{sq}(B)} E\|\hat{f}_{j_1} - f\|_p^p \leq C n^{-\frac{ps}{2s+1}} .$$

Beweis: Der ausführliche Beweis kann in [KP94] eingesehen werden. Hier nur eine Skizze. Zunächst ist die Fehlerzerlegung leicht modifiziert

$$E\|\hat{f}_{j_1} - f\|_p^p \leq 2^{p-1}\left(E\|\hat{f}_{j_1} - E(\hat{f}_{j_1})\|_p^p + \|E(\hat{f}_{j_1}) - f\|_p^p\right).$$

Der Term $\|E(\hat{f}_{j_1}) - f\|_p^p$ wird mit Theorem 3.1.2.15 behandelt. Für den stochastischen Term $E\|\hat{f}_{j_1} - E(\hat{f}_{j_1})\|_p^p$ hat man mit Y_i wie im letzten Beweis

$$E\|\hat{f}_{j_1} - E(\hat{f}_{j_1})\|_p^p = \int E\left(\left|n^{-1}\sum_{i=1}^n Y_i(x)\right|^p\right) dx .$$

Mit der Rosenthal-Ungleichung und Bedingung L ergibt sich

$$\begin{aligned} & n^{-p} E\left(\left|\sum_{i=1}^n Y_i(x)\right|^p\right) \\ \leq \;& \frac{C(p)}{n^p}\left((2^{j_1+2}\|L_\varphi\|_\infty^2)^{p-2}\sum_{i=1}^n E(Y_i^2(x)) + \left(\sum_{i=1}^n E(Y_i^2(x))\right)^{p/2}\right). \end{aligned}$$

Zusammenfassend mit Fubini's Theorem und der Jensen-Ungleichung folgt für den stochastischen Term die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int n^{-p} E\left(\left|\sum_{i=1}^n Y_i(x)\right|^p\right) dx \;\leq\; & C(p)\int F^2(y)dy\,\left(2\|L_\varphi\|_\infty^2\right)^{p-2}\left(\frac{2^{j_1+1}}{n}\right)^{p-1} \\ & + C(p)\int F^p(y)dy\left(\frac{2^{j_1+1}}{n}\right)^{p/2} \end{aligned}$$

und wegen $2^{j_1} \leq n$ und $p \geq 2$ folgt $(2^{j_1}/n)^{p-1} \leq (2^{j_1}/n)^{p/2}$. ■

Nichtlineare Wavelet-Schätzer

Vom Modell gemäß Definition 3.1.1.2 ausgehend ist der lineare Schätzer $\hat{f}_{j_1}$ noch nicht angepaßt. Zunächt muß der Schätzer so modifiziert werden, daß er einem *Regressionsschätzer* entspricht und um die das Atmosphärenechos f_a beschreibenden Reihenkoeffizienten auszuwählen, wird noch eine geeignete Methode benötigt. Das Hard- und Soft-Thresholding, vorgeschlagen in [DJ92, DJ94], sind dafür geeignet.

Definition 3.1.2.25 *Das* **Regressionsmodell** *sei*

$$f_i = m(X_i) + \zeta_i \ , \quad i = 1, \dots, n \ ,$$

mit $\zeta_i \sim$ *i.i.d.,* $E(\zeta_i) = 0$ *und* $X_i = i/n$. *Eine lineare Regressionschätzung ist die Projektion von* f *auf* V_{j_1}, *die durch*

$$\hat{f}_{j_1}(x) = \sum_k \hat{\alpha}_{j_0} \varphi_{j_0 k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_k \hat{\beta}_{jk} \psi_{jk}(x) \ ,$$

mit $j_0, j_1 \in \mathbb{Z}$, $\hat{\alpha}_{jk} = n^{-1} \sum_{j=1}^{k} \varphi_{jk}(X_i) \cdot f_i$ *und* $\hat{\beta}_{jk} = n^{-1} \sum_{j=1}^{k} \psi_{jk}(X_i) \cdot f_i$, *definiert ist.*

Bemerkung 3.1.2.26 Sämtliche Aussagen über die Wahl von j_1 und entsprechende Abschätzungen bezüglich der Dichteschätzung übertragen sich, vergleiche [HKPT98]. Auschlaggebend ist die Regularität (äquidistant) des Gitters $[0, 1]$.

Definition 3.1.2.27 *Die Funktionen für* **Hard-** *und* **Soft-Thresholding** *sind wie folgt definiert*

$$\theta^{hard}(u, \lambda) := \begin{cases} u & f\ddot{u}r \quad |u| \geq \lambda \\ 0 & f\ddot{u}r \quad |u| < \lambda \end{cases}$$

und

$$\theta^{soft}(u, \lambda) := \begin{cases} \left(u - \frac{\lambda u}{|u|}\right) & f\ddot{u}r \quad |u| \geq \lambda \\ 0 & f\ddot{u}r \quad |u| < \lambda \end{cases}$$

Dies führt auf einen *nichtlinearen Wavelet-Regressionsschätzer*

$$f^*(x) = \sum_k \hat{\alpha}_{0k} \varphi_{0k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \theta^*(\hat{\beta}_{jk}, \lambda) \psi_{jk}(x) \quad .$$

Bei dieser Schwellwertoperation ist nun die Frage zu beantworten, welcher Schwellwert λ ist zu wählen.

Dazu unterscheidet man zwei verschiedene Situationen. Der erste Fall

$$f^o(x) = \sum_k \hat{\alpha}_{0k} \varphi_{0k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \theta^*(\hat{\beta}_{jk}, \lambda_{jk}^o) \psi_{jk}(x)$$

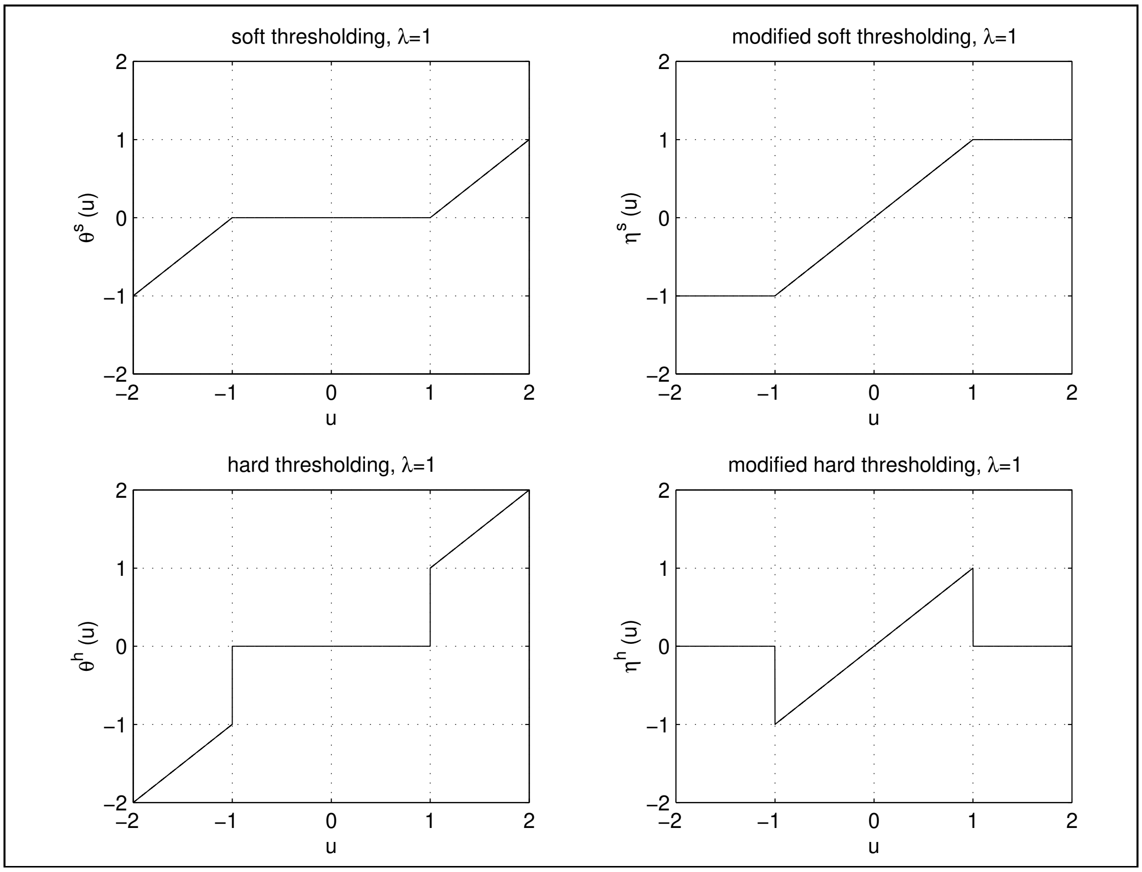

Abbildung 3.6: Diese Abbildung zeigt Hard- und Soft- sowie inverses Hard- und Soft-Thresholding.

ist ein Schätzer basierend auf einen idealen nicht-zufälligen Schwellwert $\lambda_{jk}^o = \lambda(n,j,k,B_p^{sq}(B))$. Der zweite Fall

$$f^*(x) = \sum_k \hat{\alpha}_{0k}\varphi_{0k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \theta^*(\hat{\beta}_{jk},\lambda_{jk})\psi_{jk}(x)$$

ist ein Schätzer mit einem datenabhängigen (zufälligen) Schwellwert λ_{jk}. In [vSM98] ist eine mögliche Wahl von λ_{jk} vorgeschlagen und die dazugehörigen $MISE$-Abschätzungen sogar für lokal stationären Nicht-Gaußsche Fehler berechnet.

Theorem 3.1.2.28 *Sei $f \in B_p^{sq}(B)$ mit $s,q,p \geq 1$ und sei*

$$f^o(x) = \sum_k \hat{\alpha}_{0k}\varphi_{0k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \theta^*(\hat{\beta}_{jk},\lambda_{jk}^o)\psi_{jk}(x)$$

und

$$f^*(x) = \sum_k \hat{\alpha}_{0k}\varphi_{0k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \theta^*(\hat{\beta}_{jk},\lambda_{jk})\psi_{jk}(x) \ ,$$

dann gilt

i) für einen optimalen Schwellwert $\lambda_{jk}^o = \lambda(n, j, k, B_p^{sq}(B))$ gilt

$$\sup_{f \in B_p^{sq}(B)} E\|f^o - f\|_2^2 = O\left(n^{-\frac{2s}{2s+1}}\right) ,$$

ii) für einen Schwellwert λ_{jk} mit

$$\sigma_{jk}\sqrt{2\log(\#M_j)} \leq \lambda_{jk} \leq C\sqrt{\frac{\log n}{n}} ,$$

wobei M_j die Menge nichtverschwindender Waveletkoeffizienten bezeichnet und $C > 0$,

$$\sup_{f \in B_p^{sq}(B)} E\|f^* - f\|_2^2 = O\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{2s}{2s+1}}\right) .$$

Beweis: Details und Beweis in [vSM98]. ■

Bemerkung 3.1.2.29 Dieses Theorem besagt, daß man für den idealen Schwellwert die selbe Fehlerrate für das L_2-Risiko erhält wie linearen i.i.d. Fall. Die zweite, in der Praxis anwendbare, um $\log n$ schlechtere Rate erhält man, weil für die unbekannte Varianz σ_{jk} eine Schätzung $\hat{\sigma}_{jk}$ eingeht.

3.1.3 Numerische Implemetierung

Bemerkung 3.1.3.1 Betrachtet man nun das Modell

$$f = f_{\text{a}} + f_{\text{ic}} + f_{\text{gc}} + f_{\text{rfi}} + \epsilon$$

so entspricht nach vereinfachenden Annahmen

$$m = f_{\text{ic}} + f_{\text{gc}} + f_{\text{rfi}} \quad \text{und} \quad \zeta = f_{\text{a}} + \epsilon \ .$$

Demzufolge ist der Teil für die Schätzung f_a von Bedeutung, der im Fall der Schätzung von f eleminiert wird. Deshalb wird ein sogenanntes inverses Thresholding eingeführt.

Definition 3.1.3.2 *Die Funktionen für* **inverses Hard-** *und* **inverses Soft-Thresholding** *sind wie folgt definiert*

$$\eta^{hard}(u, \lambda) := \begin{cases} u & f\ddot{u}r \quad |u| < \lambda \\ 0 & f\ddot{u}r \quad |u| \geq \lambda \end{cases}$$

und

$$\eta^{soft}(u, \lambda) := \begin{cases} u & f\ddot{u}r \quad |u| < \lambda \\ \lambda\frac{u}{|u|} & f\ddot{u}r \quad |u| \geq \lambda \end{cases}$$

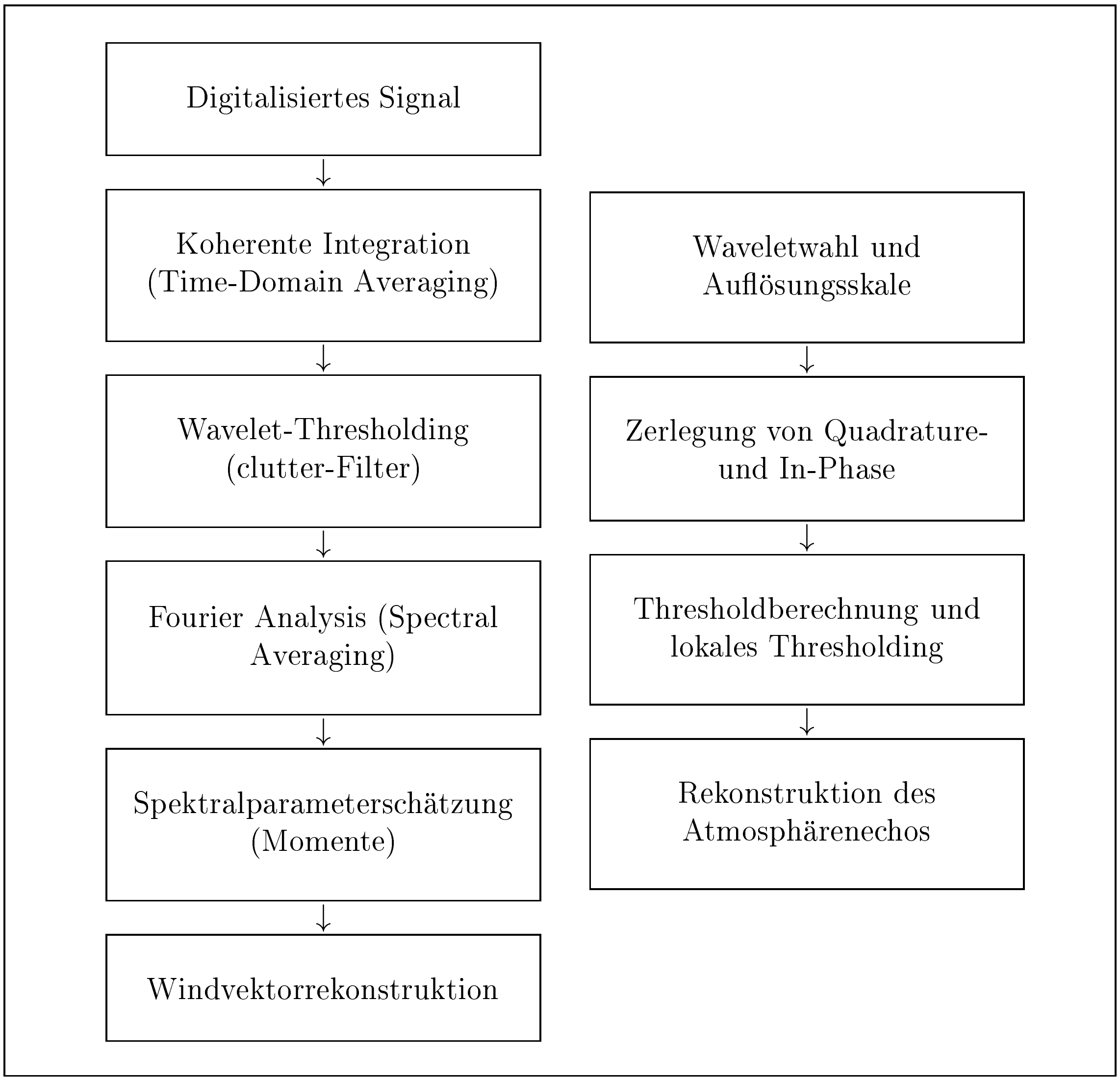

Abbildung 3.7: Links: Das um das Wavelet-Thresholding erweiterte Diagram. Rechts: Der Wavelet-Algorithmus.

Dies führt auf einen *modifizierten nichtlinearen Wavelet-Regressionsschätzer*

$$f^\star(x) = \sum_k \hat{\alpha}_{0k}\varphi_{0k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \eta^\star(\hat{\beta}_{jk}, \lambda)\psi_{jk}(x) \ ,$$

mit genau den selben Eigenschaften wie f^*.

Der modifizerte Algorithmus ist in Abbildung 3.7 abgebildet. Die Anwendung des Wavelet-Thresholding auf die Ausgangsdatensätze Höhe 11 und 12 sind in Abbildung 3.9 und an simulierten Daten in Abbildung 3.8 dargestellt.

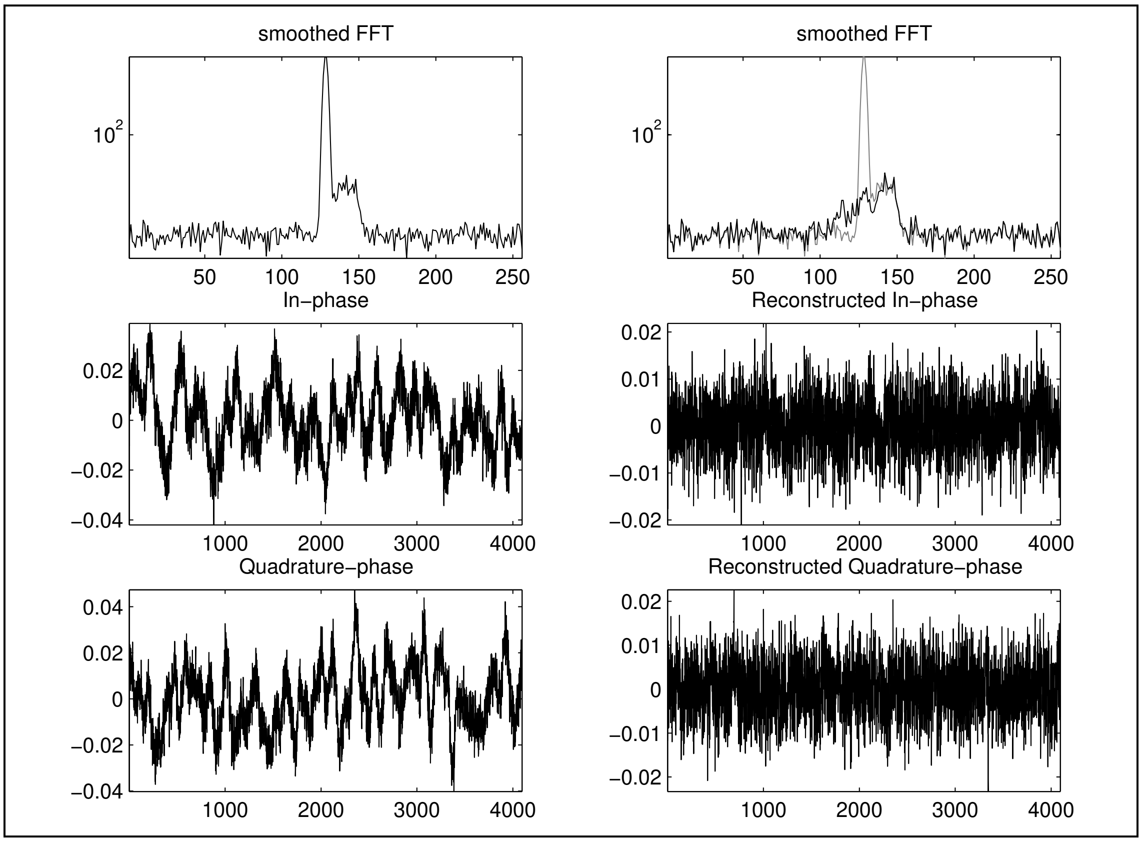

Abbildung 3.8: Oben links: Simuliertes Fourierpowerspektrum mit sehr starkem ground-clutter-Einfluß. Das Atmosphärenecho überlappt mit dem ground-clutter-Peak. Unten links: I/Q-Zeitreihen von simulierten Fourierpowerspektrum (Simulation nach [Zrn75]). Unten rechts: I/Q-Zeitreihen nach Anwendung des nichtlinearen Wavelet-Filters. Oben rechts: Resultierendes Fourierpowerspektrum basierend auf dem rekonstruierten Atmosphärensignal f_{a}.

3.2 Ausblick: Multiskalen-Analyse in H^s

Eine weitergehende Vertiefung der Radardatenanalyse erfordert eine komplexwertige und kontinuierliche Multiskalen-Zerlegung. Ein kontinuierlicher Multiskalenansatz für $L_2(\mathbb{R})$ wurde in [Sta92] vorgeschlagen. Darauf aufbauend soll er dahingehend verallgemeinert werden, daß die entwickelten Darstellungen und Darstellungsräume verwendet werden können.

3.2.1 Modifizierung der L_2-Zerlegung

Ausgehend vom L_2-Konzept nach [Sta92] wird mit der zugrundeliegenden Gruppe $\mathbf{G}_{aff}$ eine Verallgemeinerung bezüglich des Darstellungsraumes $H^s(\mathbb{R})$ durchgeführt.

Sei π eine unitäre, quadratintegrierbare Darstellung einer lokalkompakten Gruppe G in einen Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ und sei ψ zulässig. Sei ferner $A \subset G$ eine meßbare Teilmenge von G.

Definition 3.2.1.1 *Sei $f \in \mathcal{H}_A$ genau dann, wenn für alle $g \in \mathcal{H}$ gilt*

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}} = \int\limits_A \langle f, \pi(g)\psi\rangle_{\mathcal{H}} \langle \pi(g)\psi, g\rangle_{\mathcal{H}} \, d\mu(g) \ .$$

Das folgende Theorem gibt eine alternative Beschreibung zur Definition 3.2.1.1 und weitere Eigenschaften an.

Theorem 3.2.1.2

i) $f \in \mathcal{H}_A$ genau dann, wenn bezüglich μ auf $G \setminus A$ gilt $\langle \pi(g)\psi, f\rangle_{\mathcal{H}} = 0$.

ii) $\mathcal{H}_A$ ist abgeschlossen.

iii) Falls $B \subseteq G \setminus A$, dann gilt $\mathcal{H}_B \perp \mathcal{H}_A$.

iv) Falls $A_1 \subseteq A_2$, dann gilt $\mathcal{H}_{A_1} \subseteq \mathcal{H}_{A_2}$.

Beweis: In [Sta92]. ■

Sei nun $\mathbf{G}_{aff}$ die zugrundeliegende Gruppe und sei π_s die zugehörige Darstellung in $H^s(\mathbb{R})$.

Definition 3.2.1.3 *Eine* **kontinuierliche Multiskalen-Analyse** *ist definiert als eine Folge $\{V_a\}_{a\in\mathbb{R}_+}$ abgeschlossener Unterräume des $H^s(\mathbb{R})$ mit*

1. *Falls $a_1 \le a_2$, dann $V_{a_2} \subseteq V_{a_1}$.*
2. $\lim\limits_{a\to 0} V_a = H^s(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{a\to\infty} V_a = \{0\}$.
3. *$f \in V_{a_1}$ genau dann, wenn $\pi_s(0, a_2/a_1)f \in V_{a_2}$.*
4. *Falls $f(x)$ eine Funktion in V_a ist, so auch $\pi_s(d,1)f(x)$ für alle $d \in \mathbb{R}$.*

Im weiteren Verlauf wird für $a \in \mathbb{R}_+$ die Teilmenge $M_a := \{(q, a') \ : \ a' \ge a, q \in \mathbb{R}\}$ mit $M_a \subseteq \mathbf{G}_{aff}$ benötigt.

Theorem 3.2.1.4 *Sei ψ das analysierende Wavelet und sei ν das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$. $V_a := \mathcal{H}_{M_a}$ definiert eine kontinuierliche Multiskalen-Analyse auf $H^s(\mathbb{R})$ genau dann, wenn Zahlen $\varepsilon_1 > 0$ und $\varepsilon_2 > 0$ existieren, so daß*

$$\nu\left(\mathrm{supp}\hat{\psi} \cap [-\varepsilon_1, \varepsilon_2]\right) = 0 \ .$$

Beweis:
Es ist die Definition 3.2.1.3 zu überprüfen. Falls $a_1 \leq a_2$, dann folgt $M_{a_2} \subseteq M_{a_1}$. Mit Theorem 3.2.1.2 folgt $V_{a_2} \subseteq V_{a_1}$.
Sei nun $f \in V_{a_1}$ gegeben. Nach Theorem 3.2.1.2 und mit $\lambda(\omega) = (1+\omega^2)^{s/2}$ ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} \langle \pi_s(g)\psi, f\rangle_{H^s} &= \left\langle \hat{\pi}_s(g)\lambda\hat{\psi}, \lambda\hat{f}\right\rangle_{L_2} \\ &= a^{1/2}\int\limits_{\mathbb{R}} \left(1+(a\omega)^2\right)^{s/2}\left(1+\omega^2\right)^{s/2}\hat{\psi}(a\omega)\bar{\hat{f}}(\omega)e^{-iq\omega}d\omega = 0 \end{aligned}$$

fast überall auf $(0, a_1) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbf{G}_{aff}$. Um die Reskalierungeigenschaft zu zeigen, sei zunächst $g' = (0, a_2/a_1)$ und $g = (q, a)$. Mat hat $\pi_s^*(g') = \pi_s(g'^{-1})$ und damit

$$\pi_s^*(g')\pi_s(g) = \pi_s(g'^{-1} \circ g) = \pi_s(q \cdot a_1/a_2, a \cdot a_1/a_2)$$

und deshalb die Gleichungskette (ausführlich)

$$\begin{aligned} \langle \pi_s(g)\psi, \pi_s(g')f\rangle_{H^s} &= \langle \Lambda_{-s}\pi(g)\Lambda_s\psi, \Lambda_{-s}\pi(g')\Lambda_s f\rangle_{H^s} \\ &= \langle \pi^*(g')\pi(g)\Lambda_s\psi, \Lambda_s f\rangle_{L_2} \\ &= \left\langle \Lambda_{-s}\pi(g'^{-1}\circ g)\Lambda_s\psi, f\right\rangle_{H^s} \\ &= \langle \pi_s(q\cdot a_1/a_2, a\cdot a_1/a_2)\psi, f\rangle_{H^s} \quad . \end{aligned}$$

$f \in V_{a_1}$ genau dann, wenn $\langle \pi_s(q, \bar{a})\psi, f\rangle_{H^s} = 0$ für alle $\bar{a} < a_1$. Ist $\bar{a} = a \cdot a_1/a_2$, so ist dazu äquivalent $a \cdot a_1/a_2 < a_1$ und somit $a < a_2$, was gleichbedeutend ist mit $\pi_s(0, a_2/a_1)f \in V_{a_2}$.
Analog kann man mit $g' = (d, 1)$ die Translationsinvarianz zeigen

$$\begin{aligned} \langle \pi_s(g)\psi, \pi_s(g')f\rangle_{H^s} &= \left\langle \pi_s(g'^{-1})\pi_s(g)\psi, f\right\rangle_{H^s} \\ &= \langle \pi_s(q-d, a)\psi, f\rangle_{H^s} \quad . \end{aligned}$$

Um die Struktur des analysierenden Wavelets zu untersuchen, definiert man sich

$$\sqrt{2\pi}\hat{\rho}_a(q) := a^{1/2}\int\limits_{\mathbb{R}} \left(1+(a\omega)^2\right)^{s/2}\left(1+\omega^2\right)^{s/2}\hat{\psi}(a\omega)\bar{\hat{f}}(\omega)e^{-iq\omega}d\omega \ .$$

Die Funktion $\hat{\rho}_a$ ist quadratintegrierbar, da π_s eine quadratintegrierbare Darstellung ist. Aufgrund der Unität der Fouriertransformation gilt fast überall, daß $\hat{\rho}_a(q) = 0$ genau dann, wenn

$$\rho_a(\omega) = a^{1/2}\left(1+(a\omega)^2\right)^{s/2}\left(1+\omega^2\right)^{s/2}\hat{\psi}(a\omega)\bar{\hat{f}}(\omega) = 0 \ ,$$

das heißt, genau dann, wenn

$$\varrho_a(\omega) := a^{1/2}\hat{\psi}(a\omega)\bar{\hat{f}}(\omega) = 0 \ .$$

$f \in V_a$ nun genau dann, wenn $\varrho_{a'}$ die Nullfunktion ist für alle $a' < a$, das heißt wenn gilt

$$\nu\left(\mathrm{supp}\hat{f} \cap \frac{1}{a'}\mathrm{supp}\hat{\psi}\right) = 0$$

für alle $a' < a$. Sei nun $I_{a'} := a'^{-1}\mathrm{supp}\hat{\psi}$. Angenommen $\mathrm{supp}\hat{\psi}$ ist nicht von der Null weg beschränkt, dann gäbe es $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, so daß$[-\varepsilon_1, \varepsilon_2] \subseteq I_1$. Dann folgt weiter, daß $[-\varepsilon_1/a', \varepsilon_2/a'] \subseteq I_{a'}$. Für $a' \to 0$ konvergiert $I_{a'}$ gegen $\mathbb{R}$. Dies bedeutet $f \in V_a$ nur dann, wenn $f = 0$ und dies widerspricht der Definition einer Multiskalen-Analyse. Deshalb kann man annehmen, daß Grenzfrequenzen ω_{l_1} und ω_{l_2} existieren, die als größte positive Zahlen ω_1 und ω_2 definiert sind, so daß $I_1 \subseteq (-\infty, -\omega_1] \cap [\omega_2, \infty)$. Dann folgt $\bigcup_{0<a'<a} I_{a'} = (-\infty, -\omega_{l_1}/a] \cap [\omega_{l_2}/a, \infty)$ und deshalb ist $f \in V_a$ genau dann, wenn

$$\nu\left(\mathrm{supp}\hat{f} \cap \bigcup_{0<a'<a} I_{a'}\right) = 0 \ .$$

Das heißt, V_a besteht aus bandbeschränkten Funktionen deren Spektrum in $[-\omega_{l_1}/a, \omega_{l_2}/a]$ enthalten ist. Damit ist auch klar, daß $V_a \stackrel{a\to 0}{\longrightarrow} H^s(\mathbb{R})$ und $V_a \stackrel{a\to\infty}{\longrightarrow} \{0\}$ gilt. ■

Definition 3.2.1.5 *Eine Funktion $f \in H^s(\mathbb{R})$ heißt* **progressiv** *beziehungsweise* **regressiv**, *falls* $\mathrm{supp}\hat{f} \subseteq \mathbb{R}_+$ *beziehungsweise* $\mathrm{supp}\hat{f} \subseteq \mathbb{R}_-$. *Es sei*

$$H^s_+(\mathbb{R}) := \{f : \ f \in H^s(\mathbb{R}) \wedge \mathrm{supp}\hat{f} \subseteq \mathbb{R}_+\}$$

und

$$H^s_-(\mathbb{R}) := \{f : \ f \in H^s(\mathbb{R}) \wedge \mathrm{supp}\hat{f} \subseteq \mathbb{R}_-\} \ .$$

Seien P^+ und P^- die zugehörigen Projektoren

$$P^+ : H^s(\mathbb{R}) \to H^s_+(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad P^- : H^s(\mathbb{R}) \to H^s_-(\mathbb{R}) \ .$$

Mit der Definition 3.2.1.5 kann die Struktur der Räume V_a zusammengefaßt werden.

Folgerung 3.2.1.6 *Sei*

$$\omega_{l_1} = \sup\{\omega > 0 : \ \mathrm{supp}P^-\hat{\psi} \subseteq (-\infty, -\omega]\}$$

und

$$\omega_{l_2} = \sup\{\omega > 0 : \ \mathrm{supp}P^+\hat{\psi} \subseteq [\omega, \infty)\}$$

die untere beziehungsweise die obere Grenzfrequenz von ψ, dann besteht V_a aus bandbeschränkten Funktionen mit unterer Grenzfrequenz $-\omega_{l_1}/a$ und obere Grenzfrequenz ω_{l_2}/a, das heißt

$$\mathrm{supp}\hat{f} \subseteq [-\omega_{l_1}/a, \omega_{l_2}/a]$$

für alle $f \in V_a$.

In Analogie zur diskreten Multiskalen-Analyse kann nun den Projektionskern K_a auf den Raum V_a herleiten.

Satz 3.2.1.7 *Sei $f \in H^s(\mathbb{R})$ und sei die partielle Rekonstruktion f_a durch*

$$f_{a'}(x) := c_\psi^{-1} \int\limits_{a>a'} \int\limits_{\mathbb{R}} \langle \pi_s(g)\psi, f \rangle_{H^s} \pi_s(g)\psi(x) d\mu(g)$$

definiert. Dann ist die Projektion auf V_a durch den Faltungskern

$$\hat{K}_a(\omega) = \frac{2\pi}{c_\psi} \int\limits_{\zeta > |a\omega|} \left(1 + \zeta^2\right)^s \frac{|\hat{\psi}(\zeta)|^2}{\zeta} d\zeta$$

gegeben.

Beweis: Man hat für $\omega \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}_{a'}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \frac{2\pi}{c_\psi} \int\limits_{a>a'} \left(1 + (a\omega)^2\right)^s |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{a} \; .$$

Mit der Substutition $a\omega = \zeta$ für $\omega \geq 0$ hat man für den Integralausdruck

$$\int\limits_{a'\omega}^{\infty} \left(1 + \zeta^2\right)^s |\hat{\psi}(\zeta)|^2 \frac{d\zeta}{\zeta}$$

und mit $a\omega = \xi$ für $\omega < 0$ und dann $-\zeta = \xi$

$$\begin{aligned} \int\limits_{a'\omega}^{-\infty} \left(1 + \xi^2\right)^s |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{\xi} &= -\int\limits_{-a'\omega}^{\infty} \left(1 + \zeta^2\right)^s |\hat{\psi}(\zeta)|^2 \frac{d\zeta}{-\zeta} \\ &= \int\limits_{-a'\omega}^{\infty} \left(1 + \zeta^2\right)^s |\hat{\psi}(\zeta)|^2 \frac{d\zeta}{\zeta} \end{aligned}$$

und somit insgesamt

$$\hat{f}_{a'}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{K}_{a'}(\omega) \; ,$$

mit

$$\hat{K}(\omega) = \frac{2\pi}{c_\psi} \int\limits_{\zeta > |\omega|} \left(1 + \zeta^2\right)^s |\hat{\psi}(\zeta)|^2 \frac{d\zeta}{\zeta} \; .$$

Dieser Kern ist ein reeller, positiver und gerader Faltungskern, dessen inverse Fourier-Transformation gerade die Projektion

$$K_a f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a} K\left(\frac{x-y}{a}\right) f(y) dy$$

beschreibt. ■

Bemerkung 3.2.1.8 Die Güte der Approximation richtet sich nun nach dem Lokalisierungsverhalten des Wavelets ψ im Frequenz-Raum. Die Lokalisierungseigeschaften der Funktion ψ ist hierbei an die Momentenbedingung $M(N)$ der Kernfunktion gebunden.

Satz 3.2.1.9 *Sei K der Projektionskern aus Satz 3.2.1.7 und sei $N \in \mathbb{N}$. Angenommen $f \in \tilde{W}_p^N(\mathbb{R})$ und das Wavelet ψ sei so gewählt, daß K der Bedingung $M(N)$ genügt, dann gilt für $1 \leq p \leq \infty$*

$$\lim_{a \to 0} a^{-N} \|K_a f - f\|_p = 0.$$

Beweis: Anwendung des Theorem 3.1.2.9. ■

Satz 3.2.1.10 *Sei K der Projektionkern aus Satz 3.2.1.7. Ist ψ ein Wavelet, dann konvergiert $K_a f$, das heißt $M(0)$ und sogar $M(1)$ sind erfüllt.*

Beweis: Die Bedingung $M(N)$ bedeutet für $k = 0, \ldots, N$ mit

$$\begin{aligned} \int K(z) z^k dz &= \left\langle K(z) z^k, 1 \right\rangle_{L_2} = \left\langle (K(z) z^k)^\wedge, \hat{1} \right\rangle_{L_2} \\ &= \left\langle i^k d^k / d\omega^k \hat{K}, \delta_0 \right\rangle = \delta_{0k} \ , \end{aligned}$$

daß $\imath^k d^k / d\omega^k \hat{K}(\omega)|_{w=0} = \delta_{0k}$. Für $k = 0$ hat man wegen

$$\hat{K}(\omega) = 1 - \frac{2\pi}{c_\psi} \int_0^{|\omega|} (1 + \zeta^2)^s \frac{|\hat{\psi}(\zeta)|^2}{\zeta} d\zeta$$

$\hat{K}(0) = 1$ und daraus folgt $M(0)$. Wegen $\hat{\psi}(0) = 0$ ist die Ableitung $\hat{K}'(0) = 0$ und somit ist $M(1)$ erfüllt. ■

Bemerkung 3.2.1.11 Um eine Konvergenzrate der Ordnung N zu erhalten, muß ψ nun so gewählt werden, daß für $1 < k \leq N$

$$\frac{d^k}{d\omega^k} \hat{K}(w)|_{\omega=0} = 0$$

gilt. Geeignete Kandidaten wären Cauchy-Wavelets entsprechend hoher Ordnung oder minimierende Wavelets der Gruppe $\mathbf{G}_{aff}$, da diese ebenfalls im Fourier-Raum einen polynomialen Faktor besitzen.

3.2.2 Affin-minimierende Wavelets als Generatoren

In diesem Abschnitt sollen nun minimierende Wavelets der Gruppe $\mathbf{G}_{aff}$ so angepaßt werden, daß sie eine kontinuierliche Multiskalen-Analyse generieren. Der Darstellungsraum soll der Einfachheit der $H^0(\mathbb{R}) = L_2(\mathbb{R})$ sein.

Definition 3.2.2.1 *Die folgende Menge von Wavelets heißt eine* **Familie modulierter affin-minimierender Wavelets**

$$\Psi_k =: \left\{\psi : \ \psi = e^{ik\cdot}c(\cdot - \lambda)^{-1/2-i\lambda\mu_2+i\mu_1}, \ (\mu_1, \mu_2, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times i\mathbb{R}, \ \|\psi\| = 1, \ i\lambda\mu_2 > 1\right\} .$$

Ein Unschärfefunktional auf $L_2(\mathbb{R})$ bezüglich A und B sei durch

$$U_{AB}(f) := 4\Delta_f^2(A)\Delta_f^2(B) - \mu_f(i\,[A,B])^2$$

definiert.

Bemerkung 3.2.2.2 Sei $A = A_a$ und $B = A_b$. Falls $k = 0$, so folgt

$$U_{A_aA_b}\left(\arg\min_{f\in\Psi_k} U_{A_aA_b}(f)\right) = 0 \ .$$

Satz 3.2.2.3 *Seien A_p, A_a und A_b gegeben und sei $k \geq k_0 > 0$. Für $\varphi \in \Psi_0$ und $f := e^{ik\cdot}\varphi \in \Psi_k$ gilt*

$$U_{A_aA_b}(f) = k^2 \cdot U_{A_pA_b}(\varphi).$$

Für $\varphi \in \Psi_0$ ist das Heisenberg-Unschärfefunktional $U_{A_pA_b}(\varphi)$ in Abhängigkeit von μ_1, μ_2 und λ darstellbar

$$U_{A_pA_b}(\varphi) = \frac{[(1-2i\lambda\mu_2)^2 + 4\mu_1^2]\,i\lambda\mu_2}{(1-2i\lambda\mu_2)^2(i\lambda\mu_2 - 1)} - 1.$$

$U_{A_pA_b}$ besitzt weder ein globales noch ein lokales Minimum. Für $\varphi \in \Psi_0$ und $\mu_1 = 0$ gilt asymptotisch

$$\lim_{i\lambda\mu_2\to\infty} U_{A_pA_b}(\varphi) = \lim_{i\lambda\mu_2\to\infty} \frac{1}{i\lambda\mu_2 - 1} = 0 \ .$$

Beweis: Sei $f = e^{ik\cdot}\varphi \in \Psi_k$. Zunächst wird $U_{A_aA_b}$ durch Einsetzen der Darstellung von f in bestimmt. Für die Operatoren A_a und A_b folgt mit $\varphi \in \Psi_0$

$$A_a f(x) = e^{ikx}\left(A_a\varphi(x) + kx\varphi(x)\right) \ \text{und} \ A_b f(x) = e^{ikx}\left(A_b\varphi(x) + k\varphi(x)\right) \ .$$

Für die Varianzen

$$\Delta_f^2(A_a) = \left\langle A_a^2 f, f\right\rangle - \mu_f^2(A_a) \ \text{und} \ \Delta_f^2(A_b) = \langle A_b^2 f, f\rangle - \mu_f^2(A_b)$$

werden die einzelnen Terme substituiert:

$$\langle A_a^2 f, f\rangle = \langle A_a^2\varphi,\varphi\rangle + k\langle A_a x\varphi + xA_a\varphi,\varphi\rangle + k^2\langle x\varphi, x\varphi\rangle\ ,\ \mu_f(A_a) = \mu_\varphi(A_a) + k\langle x\varphi,\varphi\rangle\ ,$$

$$\langle A_b^2 f, f\rangle = \langle A_b^2\varphi,\varphi\rangle + 2k\langle A_b\varphi,\varphi\rangle + k^2 \text{ und } \mu_f(A_b) = \mu_\varphi(A_b) + k.$$

Somit ergibt sich für die Varianzen

$$\begin{aligned}\Delta_f^2(A_a) &= \Delta_\varphi^2(A_a) + k\left(\langle A_a x\varphi + \varphi,\varphi\rangle - 2\mu_\varphi(A_a)\langle x\varphi,\varphi\rangle\right)\\ &\quad + k^2\left(\langle x\varphi, x\varphi\rangle - \langle x\varphi,\varphi\rangle^2\right)\ ,\\ \Delta_f^2(A_b) &= \Delta_\varphi^2(A_b).\end{aligned}$$

Für das Funktional $U_{A_aA_b}(f)$ folgt somit

$$U_{A_aA_b}(f) = U_{A_aA_b}(\varphi) + \tilde{U}_{A_aA_b}(\varphi)$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{A_aA_b}(\varphi) &= 4\Delta_\varphi^2(A_b)\Big\{k\Big(\langle A_a x\varphi + xA_a\varphi,\varphi\rangle - 2\mu_\varphi(A_a)\langle x\varphi,\varphi\rangle\Big)\\ &\quad + k^2\Big(\langle x\varphi, x\varphi\rangle - \langle x\varphi,\varphi\rangle^2\Big)\Big\} - k^2 - 2k\mu_\varphi(A_b)\ .\end{aligned}$$

Da $\varphi \in \Psi_0$ folgt $U_{A_aA_b}(\varphi) = 0$ und wegen $k \geq k_0 > 0$ hat man somit

$$U_{A_aA_b}(f) = \tilde{U}_{A_aA_b}(\varphi) > 0.$$

Mit

$$\tilde{U}^1_{A_b}(\varphi) := 4\Delta_\varphi^2(A_b)\Big(\langle x\varphi, x\varphi\rangle - \langle x\varphi,\varphi\rangle^2\Big) - 1$$

und

$$\tilde{U}^2_{A_aA_b}(\varphi) := 4\Delta_\varphi^2(A_b)\Big(\langle A_a x\varphi + xA_a\varphi,\varphi\rangle - 2\mu_\varphi(A_a)\langle x\varphi,\varphi\rangle\Big) - 2\mu_\varphi(A_b)$$

beschreibt $\tilde{U}_{A_aA_b}$ für festes φ eine Parabel in k

$$\tilde{U}_{A_aA_b}(\varphi) = k^2\tilde{U}^1_{A_a}(\varphi) + k\tilde{U}^2_{A_aA_b}(\varphi).$$

Außerdem hat man

$$\Delta_\varphi^2(A_b) = \langle\omega^2\hat{\varphi},\hat{\varphi}\rangle - \langle\omega\hat{\varphi},\hat{\varphi}\rangle^2,$$

das heißt, $\tilde{U}^1_{A_b}$ beschreibt ein Heisenberg-Unschärfefunktional

$$\tilde{U}^1_{A_b}(\varphi) = U_{A_pA_b}(\varphi) = 4\Big[\langle\omega^2\hat{\varphi},\hat{\varphi}\rangle - \langle\omega\hat{\varphi},\hat{\varphi}\rangle^2\Big]\cdot\Big[\langle x^2\varphi,\varphi\rangle - \langle x\varphi,\varphi\rangle^2\Big] - 1 \geq 0.$$

Deshalb gilt

$$U_{A_aA_b}(f) = k^2U_{A_pA_b}(\varphi) + k\tilde{U}^2_{A_aA_b}(\varphi)\ .$$

Da $f \in \Psi_k$ nur für $k = 0$ das Funktional $U_{A_aA_b}$ mit Null minimiert, kann $\tilde{U}_{A_aA_b}$ keine Nullstelle außer bei $k = 0$ besitzen. Das bedeutet aber, daß $\tilde{U}^2$ identisch Null sein muß. Zusammenfassend erhält man für $U_{A_aA_b}$ die Darstellung

$$U_{A_a A_B}(f) = k^2 U_{A_p A_b}(\varphi).$$

Da k^2 nur als Faktor eingeht, ist die Minimierung von $U_{A_a A_b}(f)$ bezüglich $f \in \Psi_k$ mit der Minimierung $U_{A_p A_b}(\varphi)$ bezüglich $\varphi \in \Psi_0$ für festes k äquivalent.
Um $U_{A_p A_b}$ auszuwerten, müssen alle auftretenden L_2-Skalarprodukte bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\langle \omega^n \hat{\varphi}, \hat{\varphi} \rangle &= \frac{(2i\lambda)^{2i\lambda\mu_2}}{\Gamma(2i\lambda\mu_2)} \int_{\mathbb{R}_+} \omega^n \omega^{-\alpha-1} e^{-i\lambda\omega} \cdot \overline{\omega^{-\alpha-1} e^{-i\lambda\omega}} d\omega \\
&= \frac{(2i\lambda)^{2i\lambda\mu_2}}{\Gamma(2i\lambda\mu_2)} \int_{\mathbb{R}_+} \omega^{1/2+i\lambda\mu_2-i\mu_1-1+1/2+i\lambda\mu_2+i\mu_1-1+n} e^{-2i\lambda\omega} d\omega \\
&= \frac{(2i\lambda)^{2i\lambda\mu_2}}{\Gamma(2i\lambda\mu_2)} \int_{\mathbb{R}_+} \omega^{2i\lambda\mu_2+n-1} e^{-2i\lambda\omega} d\omega \\
&= \frac{(2i\lambda)^{2i\lambda\mu_2}}{\Gamma(2i\lambda\mu_2)} \left(\frac{1}{2i\lambda}\right)^{2i\lambda\mu_2+n-1} \int_{\mathbb{R}_+} x^{2i\lambda\mu_2+n-1} e^{-x} dx \\
&= \frac{(2i\lambda)^{2i\lambda\mu_2}}{\Gamma(2i\lambda\mu_2)} \left(\frac{1}{2i\lambda}\right)^{2i\lambda\mu_2+n} \Gamma(2i\lambda\mu_2+n) \\
&= \frac{\Gamma(2i\lambda\mu_2+n)}{(2i\lambda)^n \Gamma(2i\lambda\mu_2)}.
\end{aligned}$$

Für die benötigten Fälle $n = 1, 2$ vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\langle \omega\hat{\varphi}, \hat{\varphi} \rangle = \frac{2i\lambda\mu_2}{2i\lambda} = \mu_2 \quad \text{bzw.} \quad \langle \omega^2\hat{\varphi}, \hat{\varphi} \rangle = \frac{(2i\lambda\mu_2+1)(2i\lambda\mu_2)}{(2i\lambda)^2} = \mu_2^2 + \frac{\mu_2}{2i\lambda}.$$

Für das Skalarprodukt $\langle x\varphi, \varphi \rangle$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle x\varphi, \varphi \rangle &= i\,\langle \hat{\varphi}', \hat{\varphi} \rangle = \frac{(2i\lambda)^{2i\lambda\mu_2} i}{\Gamma(2i\lambda\mu_2)} \int_{\mathbb{R}_+} (-\alpha - 1 - i\lambda\omega)\omega^{2i\lambda\mu_2-2} e^{-2i\lambda\omega} d\omega \\
&= \frac{(2i\lambda)^{2i\lambda\mu_2} i}{\Gamma(2i\lambda\mu_2)} \left[(-\alpha-1)\int_{\mathbb{R}_+} \omega^{2i\lambda\mu_2-2} e^{-2i\lambda\omega} d\omega - i\lambda \int_{\mathbb{R}_+} \omega^{2i\lambda\mu_2-1} e^{-2i\lambda\omega} d\omega\right] \\
&= \frac{(2i\lambda)^{2i\lambda\mu_2} i}{\Gamma(2i\lambda\mu_2)} \left[(-\alpha-1)\left(\frac{1}{2i\lambda}\right)^{2i\lambda\mu_2-1} \Gamma(2i\lambda\mu_2-1) - i\lambda \left(\frac{1}{2i\lambda}\right)^{2i\lambda\mu_2} \Gamma(2i\lambda\mu_2)\right] \\
&= 2\lambda(\alpha+1)\frac{\Gamma(2i\lambda\mu_2-1)}{\Gamma(2i\lambda\mu_2)} + \lambda = 2i\lambda\mu_1 \frac{\Gamma(2i\lambda\mu_2-1)}{\Gamma(2i\lambda\mu_2)} = \frac{2i\lambda\mu_1}{2i\lambda\mu_2-1}.
\end{aligned}$$

Analog wird $\langle x^2\varphi, \varphi \rangle$ berechnet

$$\begin{aligned}
\langle x^2\varphi, \varphi \rangle &= \langle \hat{\varphi}', \hat{\varphi}' \rangle \\
&= \frac{(2i\lambda)^{2i\lambda\mu_2} i}{\Gamma(2i\lambda\mu_2)} \left[|\alpha+1|^2 \int_{\mathbb{R}_+} \omega^{2i\lambda\mu_2-3} e^{-2i\lambda\omega} d\omega \right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -i\lambda(2i\lambda\mu_2 - 1)\int_{\mathbb{R}_+}\omega^{2i\lambda\mu_2-2}e^{-2i\lambda\omega}d\omega + (i\lambda)^2\int_{\mathbb{R}_+}\omega^{2i\lambda\mu_2-1}e^{-2i\lambda\omega}d\omega\Bigg] \\
= \; & \frac{(2i\lambda)^{2i\lambda\mu_2} i}{\Gamma(2i\lambda\mu_2)}\Bigg[|\alpha+1|^2\left(\frac{1}{2i\lambda}\right)^{2i\lambda\mu_2-2}\Gamma(2i\lambda\mu_2-2) \\
& -i\lambda(2i\lambda\mu_2-1)\left(\frac{1}{2i\lambda}\right)^{2i\lambda\mu_2-1}\Gamma(2i\lambda\mu_2-1) + (i\lambda)^2\left(\frac{1}{2i\lambda}\right)^{2i\lambda\mu_2}\Gamma(2i\lambda\mu_2)\Bigg] \\
= \; & (i\lambda)^2\left[4|\alpha+1|^2\frac{\Gamma(2i\lambda\mu_2-2)}{\Gamma(2i\lambda\mu_2)} - 2(2i\lambda\mu_2-1)\frac{\Gamma(2i\lambda\mu_2-1)}{\Gamma(2i\lambda\mu_2)} + 1\right] \\
= \; & -\lambda^2\left[\frac{2|\alpha+1|^2}{(2i\lambda\mu_2-1)(i\lambda\mu_2-1)} - 2 + 1\right] = \frac{\lambda^2(1/2 - i\lambda\mu_2 - 2\mu_1^2)}{(2i\lambda\mu_2-1)(i\lambda\mu_2-1)}.
\end{aligned}
$$

Zusammenfassend folgt für $\varphi \in \Psi_0$

$$
\begin{aligned}
U_{A_pA_b}(\varphi) &= 4\cdot\frac{1}{4}\frac{\lambda\mu_2(2\lambda\mu_2 + i - 2\mu_1)(2\lambda\mu_2 + i + 2\mu_1)}{(2i\lambda\mu_2-1)^2(i\lambda\mu_2-1)} - 1 \\
&= \frac{[(1-2i\lambda\mu_2)^2 + 4\mu_1^2]\, i\lambda\mu_2}{(1-2i\lambda\mu_2)^2(i\lambda\mu_2-1)} - 1.
\end{aligned}
$$

Für festes λ und μ_2 ist $U_{A_pA_b}(\varphi)$ bezüglich μ_1 eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt in Null. Somit läßt sich $U_{A_pA_b}(\varphi)$ durch $\mu_1 = 0$ nach unten beschränken

$$
U_{A_pA_b}(\varphi) \geq \frac{i\lambda\mu_2}{i\lambda\mu_2 - 1} - 1 = \frac{1}{i\lambda\mu_2 - 1}\ .
$$

Asymptotisch gilt für $\mu_1 = 0$

$$
\lim_{i\lambda\mu_2\to\infty} U_{A_pA_b}(\varphi) = 0\ .
$$

∎

Folgerung 3.2.2.4 *Die Funktionenmenge Ψ_k enthält für $k > 0$ geeignete Kandidaten zur Generierung einer kontinuierlichen Multiskalen Analyse, da die Fourier-Transformierten der Elemente aus Ψ_k von der Null weg beschränkt sind.*

Bemerkung 3.2.2.5 Die mit $k > 0$ modulierten affin-minimierenden Funktionen minimieren asymptotisch für $\mu_1 = 0$ und $i\lambda\mu_1 \to \infty$ die Heisenberg'sche Unschärferelation. Dies korrespondiert zur Approximationskonvergenzrate in Bemerkung 3.2.1.11, denn $-1/2 + i\lambda\mu_2$ charaktersiert den Grad des polynomialen Faktors der Fourier-Transformierten.

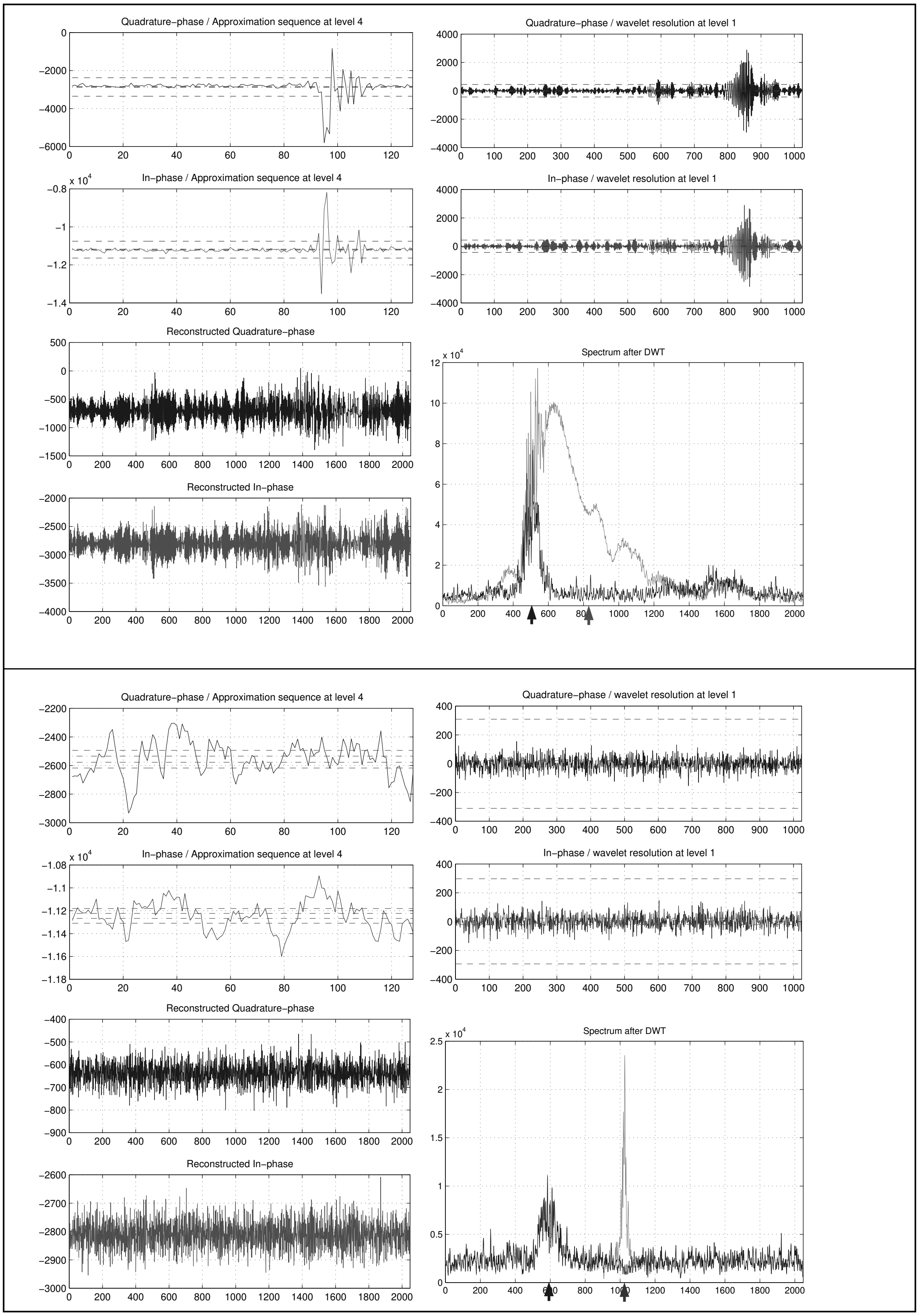

Abbildung 3.9: Zerlegung (α_k und β_{1k}), Rekonstruktion und Fourierpowerspektrum von Höhe 17 (oben) und Höhe 11 (unten). Die schwarzen Kurven in den Powerspektren zeigen die verzerrten, unbereinigten Spektren. Um die Unterschiede in der Momentenschätzung einzuschätzen, sind jeweils die ersten Momente mit Pfeile gekennzeichnet: grau ohne Wavelet-Thresholding, schwarz nach dem Filtern der clutter-Anteile.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden Zulässigkeitsbedingungen und Integraltransformationen ausgearbeitet für die Fälle, in denen der Darstellungsraum der zugrundeliegenden Gruppe ein (anisotroper) Sobolev-Raum ist. Dies wurde durchgeführt für die Gruppen $\mathbf{G}_{WH}$, $\mathbf{G}_{aff}$, $\mathbf{G}_{aWH}$ und $\mathbf{G}^d_{aWH}$. Damit wurden Gabor-Wavelet-Transformationen verschiedener Struktur bereitgestellt. Um optimale Transformationen bezüglich der Lokalisierung zu erzielen, wurden über die Minimierung von Unschärferelationen geeignete Wavelets bestimmt. Bei der Konstruktion der Unschärferelationen kam es zunächst darauf an, bekannte L_2-Aussagen zu erweitern. Da die zu den Gruppen gehörigen Lie-Algebren in der Regel mehr als nur zwei infinitesimale Operatoren enthielten, wurden Ansätze für allgemeine n-Operator-Unschärfen formuliert. Im Anwendungsteil wurden waveletbasierte Methoden zur meteorologischen Radardatenanalyse vorgestellt.

Im Abschnitt 1.1 wurden grundlegende Begriffe der Darstellung einer Gruppe eingeführt. Mit der Definition 1.1.2.3 hatte man ein Instrument, um von gegebenen Darstellungen im L_2 zu Darstellungen in (anisotropen) Sobolev-Räumen überzugehen. Der Satz 1.1.2.4 sicherte die Quadratintegrierbarkeit ab. Offen sind lediglich die Sobolev-Raum-Zulässigkeitsbedingungen.

Im Abschnitt 1.2 wurden die bekannten L_2-Darstellungen der Gruppen $\mathbf{G}_{aff}$ und $\mathbf{G}_{WH}$ zu H^s-Darstellungen modifiziert. In den Sätzen 1.2.1.4 und 1.2.1.12 wurden die modifizierten Zulässigkeitsbedingungen der Gruppe $\mathbf{G}_{aff}$ bewiesen und die zugehörigen Integraltransformationen in den Definitionen 1.2.1.6 und 1.2.1.13 formuliert. Analog geschah dies für die Gruppe $\mathbf{G}_{WH}$.
In den Unterabschnitten 1.2.2, 1.2.3 und 1.2.4 wurde das direkte Gruppenprodukt aus $\mathbf{G}_{aff}$ und $\mathbf{G}_{WH}$ analysiert. Ein Ansatz über die direkte Summe war nicht innovativ. Die Konstruktion einer Darstellung über das direkte Produkt der Ausgangsdarstellungen zog eine subtile Wahl des Darstellungsraumes nach sich. Es wurden drei Varianten vorgestellt. Die Darstellung in Tensor-Produkt-Räume wurde nach [Hoc98] eingeführt, siehe Theorem 1.2.3.9. In diesem Fall wurde das komponentenweise Agieren der Darstellung durch ein Produkt der Glattheitsterme, $\Lambda_{mix,\bar{s}}$, reguliert. Im Satz 1.2.3.11 wurde gezeigt, daß diese Darstellung allen Anforderungen genügt. Die Maße wurden ebenfalls berechnet. Anschließend wurden nach dem selben Muster die anisotropen Sobolev-Räume $H_A^{\bar{s}}$ und $H_T^{\bar{s}}$ eingeführt. Zusammenfassend ließen sich entsprechende Wavelet-Transformationen definieren und man konnte zeigen, daß diese Transformationen isometrisch sind, siehe Folgerungen 1.2.3.14 und 1.2.4.8.

In den Unterabschnitten 1.2.5, 1.2.6 und 1.2.7 wurde das semidirekte Gruppenprodukt betrachtet. Wesentliche Grundlagen und Ideen waren in [Tor94, KT93, Tor91, Tor92] zu finden. Darauf aufbauend wurde die Stone-von-Neumann-Darstellung ausgewählt und zu einer Darstellung im H^s modifiziert. Die Bestimmung der Zulässigkeitsbedingung wurde in den Abschnitt über Unschärfen verschoben.

Im Abschnitt 2.1 wurden bekannte L_2-Unschärfeergebnisse der Gruppen $\mathbf{G}_{aff}$ und $\mathbf{G}_{WH}$ aufgegriffen. Im Unterabschnitt 2.1.2 wurde mit Theorem 2.1.2.2 eine Interpretation über die Diskriminantenbedingung der klassischen Unschärferelation gegeben. Die konkrete Bestimmung der infinitesimalen Operatoren, der Unschärferelationen und minimierender Vektoren in H^s bezüglich der beiden Gruppen $\mathbf{G}_{aff}$ und $\mathbf{G}_{WH}$ erfolgte in Unterabschnitt 2.1.3, siehe Lemma 2.1.3.13. Der Nachweis der Selbstadjungiertheit der infinitesimalen Operatoren war auf direktem Wege sehr aufwendig. Aussagen über die Selbstadjungiertheit waren mit dem Satz 2.1.3.15 möglich. Dieser Satz konnte auch für die anisotropen Sobolev-Räume formuliert werden, siehe Satz 2.1.4.31. Im Unterabschnitt 2.1.4 wurden Unschärferelationen für das semidirekte und direkte Gruppenprodukt formuliert. Im semidirekten Fall bestand das Problem darin, die entsprechenden Einbettungsabbildungen zu wählen. Vorschläge aus [KT93] wurden aufgegriffen. Die Sätze 2.1.4.3 und 2.1.4.7 gaben die H^s-Zulässigkeitsbedingungen der Faktorisierungen nach Γ_1, Γ_2 und Γ_3 an. Die grundlegende Idee des Beweises bestand darin, die Rechnungen auf L_2-Fälle zurückzuführen. Interessant war die Folgerung 2.1.4.5. Sie besagte, daß der Operator $\mathcal{A}$ im Falle der strikten Zulässigkeit ein Faltungsoperator ist. Entscheidend für die Struktur der Unschärfen waren die Sätze 2.1.4.10, 2.1.4.13 und 2.1.4.15. Sie gaben die Kommutatorbeziehungen an. Die Beweise funktionierten nur für konkrete Einbettungsfunktionen. Alle Beziehungen waren dann direkt berechenbar. Das zentrale Ergebnis bestand darin, daß aufgrund der Einbettungen die resultierenden infinitesimalen Operatoren Linearkombinationen der Ausgangsoperatoren waren. Dies führte dazu, daß die Unschärferelationen, formuliert in den Ausgangsoperatoren, nun gemischte Terme enthielten. Im Fall des homogenen Raumes X_2 konnte somit in Satz 2.1.4.23 gezeigt werden, daß sich das Produkt von Varianzen zu einem Produkt aus Varianzen und Kovarianzen modifiziert. Dies könnte als eine Interaktion der Beobachtungen interpretiert werden. Im Fall des direkten Gruppenproduktes $\mathbf{G}^d_{aWH}$ wurde in Theorem 2.1.4.37 die nicht überraschende separable Struktur der minimierenden Elemente gezeigt.

Motiviert durch die Ergebnisse über Unschärfen mit gemischten Termen wurden in Abschnitt 2.2 allgemeine Ansätze verfolgt. Im Unterabschnitt 2.2.1 beschrieb das zentrale Theorem 2.2.1.1 einen allgemeinen Ansatz mit beliebigen Linearkombinationen. Der Beweis beruhte auf die Anwendung des Theorems 2.1.2.2. Die allgemeine Struktur der Unschärfe

$$\mu_\psi(\beta K\alpha')^2 \leq 4\beta\Sigma\beta'\alpha\Sigma\alpha'$$

wurde durch den Satz 2.2.1.2 beschrieben. Dies entspricht auch dem statistischen Zugang. Die Folgerung 2.2.1.3 zeigte eine Darstellung in Diagonalstruktur

$$\frac{1}{4}\mu_\psi(\beta K\alpha')^2 \leq \beta V\beta'\alpha V\alpha' + \beta M\alpha' \quad .$$

Anhand eines Beispiels konnte die Verallgemeinerung umgesetzt werden. Eine andere Sichtweise ergab sich durch die Interpretation als quadratische Form, siehe Satz 2.2.1.6,

$$(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_r) F (1, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)' \quad .$$

Die Struktur der Unschärfe wurde dann über die Bedingung der Positiv-Semidefinitheit von F bestimmt

$$\det\left(\mu_\psi(F)\right) \geq 0 \quad .$$

Der Vorteil dieser Verallgemeinerung besteht darin, daß die Minimierung der Unschärferelationen immer noch über das Lösen einer partiellen Differentialgleichung möglich ist.
Im Abschnitt 2.2.2 wurde die Idee verfolgt, Unschärfefunktionale zu formulieren und diese über Variation zu minimieren. Am Beispiel der Gruppe $\mathbf{G}_{WH}$ konnte gezeigt werden, siehe Satz 2.2.2.7 und Bemerkung 2.2.2.8, daß die aus dem Unschärfefunktional resultierende Differentialgleichung eine äquivalente Formulierung des herkömmlichen Ansatzes beinhaltete.

Im Kapitel 3 wurde die bisherige Arbeit im Bereich der waveletbasierten Radardatenanalyse mit Methoden der diskreten Multiskalen-Analyse erläutert.
Im Abschnitt 3.2 wurde das Konzept der kontinuierlichen Multiskalen-Analyse in L_2 aus [Sta92] aufgegriffen und zu einer H^s-Multiskalen-Analyse erweitert. Mit dem Theorem 3.2.1.4 konnte die Struktur des Generatorwavelets angegeben werden. In Unterabschnitt 3.2.2 wurde gezeigt, daß modulierte affin-minimiere Wavelets als Generatoren einer H^s-Multiskalen-Analyse angesetzt werden können.

Anhang

Haar-Maß auf $SO(n)$

Konstruktion des invarianten Maßes auf $SO(n)$. Die Idee ist, die Rotation durch zugehörige Euler Winkel darzustellen. S^1 ist darstellbar mit einem Einheitsvektor $e_2 = (0,1)$ und den Rotationen $g \in SO(2)$. Allgemein kann jedes $\xi \in S^{n-1}$ als Rotation von e_n mit einem $g \in SO(n)$ dargestellt werden. Sei $g_i(\theta_i)$ eine Drehung in der (x_i, x_{i+1})-Ebene um den Winkel θ_i, dann gibt es für jedes g die Zerlegung

$$g = g_1(\theta_1) \dots g_{n-1}(\theta_{n-1}).$$

Sei nun $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in S^{n-1}$, dann hat man

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sin\theta_{n-1} \sin\theta_{n-2} \cdots \sin\theta_2 \sin\theta_1 \\ \xi_2 &= \sin\theta_{n-1} \cdots \sin\theta_2 \cos\theta_1 \\ \vdots &= \vdots \\ \xi_n &= \cos\theta_1, \end{aligned}$$

mit $\cos\theta_k = \frac{\xi_{k+1}}{r_{k+1}}$, $\sin\theta_k = \frac{r_k}{r_{k+1}}$, $r_k^2 = \xi_1^2 + \cdots \xi_k^2$, $r_k \geq 0$. Jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist darstellbar als $x = r\xi$ mit $r \geq 0$ und $\xi \in S^{n-1}$, d.h. man sphärische Koordinaten in $\mathbb{R}^n$: $r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$. Seien $e_1, e_2, \dots, e_n$ eine fixierte Basis des $\mathbb{R}^n$. Für den Stabilisator von e_n gilt

$$SO(n)_{e_n} = \{R \in SO(n) : \ Re_n = e_n\} \cong SO(n-1)$$

und man hat die Zerlegung $SO(n) = S^{n-1} \times SO(n-1)$. Deshalb kann jedes $g \in SO(n)$ in der Form

$$g = g_1(\theta_1) \dots g_{n-1}(\theta_{n-1})k, \quad k \in SO(n-1)$$

dargestellt werden. Setzt man die Faktorisierung für k fort ($S^{n-2} \cong SO(n-1)/SO(n-2)$), so erhält man

$$g = g^{(n-1)} g^{(n-2)} \dots g^{(1)},$$

mit

$$g^{(k)} = g_1^k(\theta_1^k) \dots g_k^k(\theta_k^k) \ , \quad 1 \geq k \geq n-1.$$

Hierbei ist $g_i(\theta)$ Drehung in der (x_i, x_{i+1})-Ebene um θ. Die Winkel θ_i^k sind die Euler Winkel der Gruppe $SO(n)$.

Falls $\xi = \eta \sin\theta + \zeta \cos\theta$ mit $\eta \in S^{s-1}$ und $\zeta \in S^{n-s-1}$, dann kann das invariante Maß auf S^{n-1} der Form

$$d\zeta = c \sin^{s-1}\theta \cos^{n-s-1}\theta d\eta d\zeta d\theta$$

dargestellt werden. Iteriert man diesen Prozeß , so erhält man

$$d\zeta = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}} \sin^{n-2}\theta_{n-1} \ldots \sin\theta_2 d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1}.$$

Zur Bestimmung des invarianten Maßes auf $SO(n)$ nutzt man die Faktorisierung und hat zunächst $dg = dk d\zeta$, wobei dk das Maß auf $SO(n-1)$ und $d\zeta$ das Maß auf S^{n-1} ist. Daraus folgt

$$dg = \frac{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(i/2)}{2^n \pi^{n(n+1)/2}} \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{i} \sin^{j-1}\theta_j^i d\theta_j^i.$$

Frechét und Gâteaux Ableitung

Detailierte Ausführungen zu diesen Themen befinden sich unter anderem in [Zei86, Zei85]. Hier soll nur eine knappe Darstellung wiedergegeben werden.

Das Funktional F ist G-differenzierbar in $u_0 \in X$ genau dann, wenn es ein linear stetiges Funktional $a \in X^*$ gibt, das mit $F'(u_0)$ bezeichnet wird, so daß

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t} = \langle F'(u_0), h \rangle \quad h \in X \ .$$

$F'(u_0)$ wird G-Ableitung (Gâteaux Ableitung) von F in u_0 genannt. Man notiert $F'(u_0)h$ für $\langle F'(u_0), h \rangle$. Die G-Ableitung $F'(u_0)$ existiert genau dann, wenn

$$\delta F(u_0; h) := \frac{\partial}{\partial t} F(u_0 + th)|_{t=0}$$

für alle $h \in X$ existiert und die Abbildung $h \mapsto \delta F(u_0; h)$ ein linear stetiges Funktional auf X ist. Dann ist

$$\delta F(u_0; h) = \langle F'(u_0), h \rangle \quad h \in X \ .$$

Sei X ein normierter Raum. Das Funktional F ist F-differenzierbar in u_0 genau dann, wenn es linear stetiges Funktional $a \in X^*$ gibt, mit $F'(u_0)$ bezeichnet, so daß

$$F(u_0 + h) = F(u_0) + \langle F'(u_0), h \rangle + o(\|h\|)$$

für $h \to 0$ für alle $h \in X$ gilt. $F'(u_0)$ wird Frechét-Ableitung von F in u_0 genannt. Das F-Differential von F in u_0 wird durch $dF(u_0; h) = \langle F'(u_0), h \rangle$ definiert.

Jede F-Ableitung $F'(u_0)$ ist auch G-Ableitung

$$\delta F(u_0; h) = dF(u_0; h) = \langle F'(u_0), h \rangle$$

für alle $h \in X$. Falls die G-Ableitung $F'(u_0)$ von F für alle $u \in U(u_0)$ definiert ist und falls $F' : U(u_0) \subseteq X \to X^*$ in u_0 stetig ist, dann ist $F'(u_0)$ auch F-Ableitung.

Literaturverzeichnis

[AAG91a] S.T. Ali, J.-P. Antoine, and J.-P. Gazeau. Square-integrability of group representation on homogeneous spaces i, reproducing triples and frames. *Ann. Inst. H. Poincaré*, (55):829–856, 1991.

[AAG91b] S.T. Ali, J.-P. Antoine, and J.-P. Gazeau. Square-integrability of group representation on homogeneous spaces ii, generalized square-integrability and equivalent families of coherent states. *Ann. Inst. H. Poincaré*, (55):860–890, 1991.

[AM92] J.-P. Antoine and R. Murenzi. Isotropic and anisotropic multidimensional wavelets: applications to the analysis of two-dimensional fields. *Rapport CERFACS TR/VI/92/7, Toulouse(Coll. 'Wavelets and Turbulence', Princeton, June 1991)*, pages 1–20, 1992.

[Bar47] V. Bargmann. On unitary ray representation for continuous groups. *Ann. Math.*, 48:568–640, 1947.

[Bau92] H. Bauer. *Maß und Integrationstheorie*. de Gruyter, Berlin, New Tork, 1992.

[DF93] A. Defant and K. Floret. *Tensor Norms and Operator Ideals*. North-Holland, Amsterdam, 1993.

[DJ92] D. L. Donoho and I. M. Johnstone. Minimax estimation via wavelet shrinkage. Technical Report 402, Department of Statistics, Stanford University, 1992.

[DJ94] D. Donoho and I.M. Johnstone. Minimax estimation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81:425–455, 1994.

[DJKP93] D. L. Donoho, I. M. Johnstone, G. Kerkyacharian, and D. Picard. Density estimation by wavelet thresholding. Preprint, Dept. of Statistics, Stanford University, 1993.

[DM76] M. Duflo and C.C. Moore. On the regular representation of a nonunimodular locally compact group. *J.Funct.An.*, 21:209–243, 1976.

[DM95] S. Dahlke and P. Maaß. The affine uncertainty principle in one and two dimensions. *Comp. Math. Appl.*, 30(3-6):293–305, 1995.

[GMP85] A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul. Transforms associated to squareintegrable group representations i. *Math. Phys.*, 27, 1985.

[GMP86] A. Grossmann, J. Morlet, and T. Paul. Transforms associated to squareintegrable group representations ii. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 45, 1986.

[God47] R. Godement. Sur les relations d'orthogonalité de v. bargmann. *C.R. Acad. Sci.*, 255:521–523, 657–659, 1947.

[Häu92] H. Häuser. *Funktionalanalysis*. Teubner, Stuttgart, 1992.

[HKPT98] W. Härdle, G. Kerkyacharian, D. Picard, and A. Tsybakov. *Wavelets, Approximation, and Statistical Applications*. Springer, New York, 1998.

[Hoc98] R. Hochmuth. Wavelet bases in numerical analysis and restricted nonlinear approximation. *Habilitationschrift*, 1998.

[KP94] G. Kerkyacharian and D. Picard. Density estimation in besov spaces. *Statistics and Probability Letters*, 13:15–24, 1994.

[KT93] C. Kalisa and B. Torrésani. N-dimensional affine weyl-heisenberg wavelets. *Ann. Inst. H. Poincaré, Physique Théorique*, (59):201–236, 1993.

[LMR98] A. K. Louis, P. Maaß, and A. Rieder. *Wavelets*. Teubner, Stuttgart, 1998.

[LT00a] V. Lehmann and G. Teschke. Wavelet based methods for improved wind profiler signal processing. *Conference Proceedings of MST9-COST76, Toulouse*, 2000.

[LT00b] V. Lehmann and G. Teschke. Waveletbasierte Bereinigung von Radarsignalen. Technical Report 00-12, Universität Bremen, Zentrum für Technomathematik, FB 3 - Mathematik und Informatik, Mai 2000.

[LT01] V. Lehmann and G. Teschke. Wavelet based methods for improved wind profiler signal processing. *Annales Geophysicae*, (19), 2001.

[Mac76] G. Mackey. *Theory of Unitary Group Representation*. University of Chicago Press, 1976.

[Nik75] S.M. Nikol'skij. *Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems*. Springer Verlag, Berlin, 1975.

[Rob96] D.J.S. Robinson. *A Course in the Theory of Groups*. Springer, New York, 1996.

[Rot95] J.J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer, New York, 1995.

[SD80] W. Schempp and B. Dreseler. *Einführung in die harmonische Analyse*. Teubner, Stuttgart, 1980.

[ST87] H.-J. Schmeisser and H. Triebel. *Topics in Fourier Analysis and Function Spaces*. John Wiley and Sons, New York, 1987.

[Sta92] H.-G. Stark. Continuous wavelet transform and continuous multiscale analysis. *Math. Anal. and Appl.*, 169(1):179–196, 1992.

[TAGM95] S. Twareque, J.-P. Antoine, J.-P. Gazeau, and U.A. Mueller. Coherent states and their generalizations: A mathematical overview. *Reviews in Mathematical Physics*, (7):1013–1104, 1995.

[Tor91] B. Torrésani. Wavelets associated with represenations of the affine weyl-heisenberg group. *J. Math. Phys.*, (32):1273–1279, 1991.

[Tor92] B. Torrésani. Time-frequency representations: Wavelet packets and optimal decomposition. *Ann. Inst. H. Poincaré, Physique Théorique*, (56):215–234, 1992.

[Tor94] B. Torrésani. Some remarks on wavelet represenation and geometric aspects. *In: Wavelets:Theory, Algorithms and Applications Series V , World Scientific*, pages 91–115, 1994.

[Tri78] H. Triebel. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.* Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

[VK91] N.J. Vilenkin and A.U. Klimyk. *Representation of Lie Groups and Special Functions - Vol. 1.* Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991.

[VK93] N.J. Vilenkin and A.U. Klimyk. *Representation of Lie Groups and Special Functions - Vol. 2.* Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993.

[VK95] N.J. Vilenkin and A.U. Klimyk. *Representation of Lie Groups and Special Functions.* Kluwer Academic Publishers, Boston, 1995.

[vSM98] R. v. Sachs and B. MacGibbon. Nonparametric curve estimation by wavelet thresholding with locally stationary errors, 1998. Preprint.

[Zei85] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications III.* Springer, New York, 1985.

[Zei86] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I.* Springer, New York, 1986.

[Zrn75] Dušan S. Zrnić. Simulation of weatherlike Doppler spectra and signals. *J. Appl. Meteor.*, 14:619–620, June 1975.