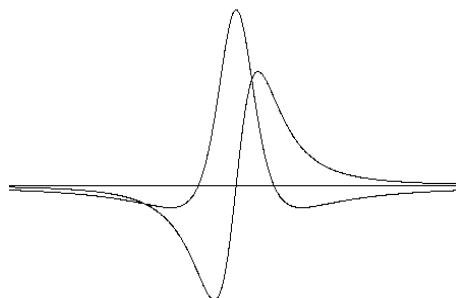


Komplexwertige Wavelets und Phaseninformation, Anwendungen in der Signalverarbeitung



Diplomarbeit im Rahmen des Diplomprüfungsverfahrens
Mathematik an der Universität Potsdam

angefertigt von

Gerd Teschke

Themenstellung und Betreuung durch

Prof. Dr. Peter Maaß

Potsdam, im September 1998

Inhaltsverzeichnis

Einführung	1
Notationen	2
<i>Teil I. Die kontinuierliche Wavelet-Transformation</i>	3
1 Grundlagen	3
2 Approximationstheorie	6
3 Komplexwertige Wavelets	7
3.1 Progressive Wavelets	9
3.2 Die Cauchy-Wavelets	12
3.3 Die Morlet-Gauß-Wavelets	15
3.4 Das Wavelet von Lusin	17
4 Phasen- und Modulusinformation	19
4.1 Komplex-monochromatische Signale	19
4.2 Reell-monochromatische Signale	20
4.3 Homogene Signale	21
4.4 Lokal symmetrische und anti-symmetrische Signale	23
4.5 Stetig-differenzierbare Signale	25
5 Numerische Realisierung	29
5.1 Der Reproduktions-Kern	29
5.2 Lokale Approximation von $\mathcal{W}_\psi f$	32

Teil II. Anwendung - Materialklassifikation	34
6 Physikalischer Hintergrund	34
6.1 Grundlagen	34
6.2 Materialabhängigkeit des Barkhausen-Effektes	35
6.3 Zielstellung	36
7 Ansatz mit der Wavelet-Transformation	36
7.1 Numerische Umsetzung	37
7.2 Auswahl signifikanter Indikatoren	41
8 Statistische Klassifikation	43
8.1 Regressionsansatz	43
8.2 Nichtlineare Diskrimination	45
9 Zusammenfassung	48
Literatur	50

Einführung

Bei der Analyse und Beschreibung verschiedener Signale aus Technik und Wissenschaft ist die Kenntnis über Frequenzverteilungen bedeutend. Ein nützliches Hilfsmittel der Analysis, die Wavelet-Transformation, ist dafür besonders geeignet. Die Analyse entspricht dabei der Auswertung von Skalarprodukten von translatierten und dilatierten Versionen eines Wavelets mit der zu untersuchenden Funktion.

Die Wavelets können reellwertige oder komplexwertige Funktionen sein. Unter der Annahme, daß die zu analysierenden Signale reellwertige Funktionen mit endlicher L^2 -Norm sind, stellt sich die Frage, welche Wavelets eine Transformation ohne Informationsverlust gewährleisten. Da sich herausstellen wird, daß eine Einschränkung auf reellwertige Wavelets zu Informationsverlusten führen kann, besteht die Notwendigkeit, geeignete Klassen zu finden, die die Menge der zur Auswahl stehenden Wavelets beschränkt. Klassenmerkmale sollten einerseits gute analytische Eigenschaften sein. Andererseits muß das Signal hinreichend gut analysiert werden können.

Grundlegende Betrachtungen über die Auswertung spezieller Signalklassen sind dabei unabdingbar, um typische Eigenschaften aus dem Transformationsergebnis ableiten und um Beziehungen zwischen komplexen Größen wie Phase und Modulus und der zu untersuchenden Funktion herstellen zu können. Die gewonnenen Erkenntnisse dienen so der Interpretation numerischer Realisierungen.

Dementsprechend werden in den ersten beiden Abschnitten grundlegende Voraussetzungen und Eigenschaften der Wavelet-Transformation genannt. Der sich anschließende Abschnitt 3 begründet die Auswahl komplexer Wavelets und gibt eine Beschreibung derjenigen Wavelet-Menge, die zur Funktionenanalyse ausreichend ist. Herleitungsschritte und Charakteristika spezieller komplexer Wavelets sowie die Entwicklung von analytischen Interpretationen des Transformationsergebnisses schließen sich im weiteren Verlauf an. Im 4. Abschnitt wird das Phasen- und Modulusverhalten der Wavelet-Transformation in Abhängigkeit vom Signaltyp studiert. Dies dient der konkreten Übersetzung von Phasen- bzw. Modulusdarstellung in Funktionencharakteristika und umgekehrt. Der letzte Abschnitt im *Teil I* bereitet eine numerische Implementierung einer diskretisierten Wavelet-Transformation vor.

Ein Anwendungsbeispiel im *Teil II* bezieht sich auf einen Signaltyp mit gleichverteiltem Frequenzspektrum. Es handelt sich dabei um durch Ummagnetisierung erzeugte Rauschimpulsspannungen in Metalldrähten. Der Kenntnis folgend, daß der Barkhausen-Effekt materialabhängig ist, sollen Indikatoren aus der komplexen Wavelet-Transformation entwickelt werden, die in Beziehung zu den Materialeigenschaften stehen. Es kann so möglich werden, Materialklassifikationen zu entwickeln und diese anstatt materialzerstörender Tests einzusetzen.

Notationen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \dots$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen $\dots, -1, 0, 1, 2, \dots$
$\mathbb{R}$	Körper der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}_-$	Menge der negativen reellen Zahlen
$\mathbb{H}$	$\{(a, b) : a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{C}$	Körper der komplexen Zahlen
$\mathbb{P}$	$\{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$
$\mathcal{C}(\mathbb{R})$	Raum der stetigen Funktionen über $\mathbb{R}$
$\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$	Raum der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen
$\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R})$	Funktionen aus $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger
$L^p(\mathbb{R})$	$\{[f] \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \int f(x) ^p dx < \infty\}, 1 \leq p < \infty$
$\mathcal{H}_+^p(\mathbb{R})$	Raum progressiver L^p -Funktionen *
$\mathcal{H}_-^p(\mathbb{R})$	Raum regressiver L^p -Funktionen *
$L_{loc}^1(\Omega)$	Raum lokalintegrierbarer L^1 -Funktionen über Ω
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$	Schartz-Raum *
$H^p(\mathbb{R})$	Hardy-Raum *
$S^r(\mathbb{R})$	Sobolev-Raum der Ordnung r *
$\langle f, g \rangle_p$	$\int f(x) \overline{g(x)} dx$ mit $f, g \in L^p(\mathbb{R})$
$\ \cdot\ _p$	$(\int f(x) ^p dx)^{1/p}$ p -Norm
$f * g$	$\int f(y-x)g(x)dx$ Faltungsprodukt
$f^{(n)}$	$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ n -te klassische Ableitung von f
$f^{[n]}$	$\frac{d^n f(z)}{dz^n}$ n -te Wirtinger Ableitung von f
$\Re f$	Realteil von f
$\Im f$	Imaginärteil von f
$\bar{f}$	konjugiert-komplexer Wert
$\text{supp} f$	$\{x : f(x) \neq 0\}$
$\mathcal{F}f, \hat{f}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)e^{-ix\omega} dx$ Fourier-Transformation
$\mathcal{F}^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega$ inverse Fourier-Transformation
$\mathcal{W}_\psi f$	Wavelet-Transformation von f zum Wavelet ψ *
Id	Identität
P^+	Projektor $L^p \rightarrow \mathcal{H}_+^p$ *
P^-	Projektor $L^p \rightarrow \mathcal{H}_-^p$ *
H	Hilbert-Transformation *
$T_b f$	$T_b f(x) = f(x-b)$ Translationsoperator
$S_a f$	$S_a f(x) = \sqrt{ a } f(ax)$ Dilationsoperator
$E_b f$	$E_b f(x) = e^{ibx} f(x)$ Modulationsoperator
$f_{a,b}$	$T_a S_{1/a} f$
o	$f(x) = o(g(x))$ f. $x \rightarrow x_0$, falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = 0$

* Definition an entsprechender Stelle

Teil I. Die kontinuierliche Wavelet-Transformation

1 Grundlagen

Die herkömmliche Fourier-Transformation liefert keine Lokalisierung im Phasenraum. Durch die Auswahl einer geeigneten Fensterfunktion kann die Fourier-Transformation zur gefensterten Fourier-Transformation modifiziert werden. Somit erhält man eine Lokalisierungsmöglichkeit bzgl. der Zeit in der Frequenzdarstellung. Größere Flexibilität wird jedoch durch die Wavelet-Transformation erzielt.

Definition 1 *Der Raum der schnell abfallenden Funktionen*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), |x^l f(x)^n| \leq c, l, n \in \mathbb{N}\}$$

heißt *Schwartz-Raum*.

Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ ist zunächst nur für $f \in L^1(\mathbb{R})$ oder $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ erklärt. Wegen der Parsevalschen Relation ($\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$) kann $\mathcal{F}$ auf $L^2(\mathbb{R})$ und auf $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, dem Dualraum von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, fortgesetzt werden. Somit kann folgende technische Bedingung eingeführt werden.

Definition 2 *(Zulässigkeitsbedingung) Eine Funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ heißt Wavelet genau dann, wenn*

$$0 < c_\psi := 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (1)$$

Definition 3 *Die Wavelet-Transformierte einer Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ zum Wavelet ψ ist definiert durch*

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) := |a|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi((t-b)/a)} dt, \quad (2)$$

wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$.

Die Zulässigkeitsbedingung (1) ist für einige konkrete Funktionen ψ schwierig nachzuweisen. Deshalb sind äquivalente Formulierungen wichtig.

Aussage 4 *Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ nicht trivial. Ist $\hat{\psi}$ stetig bei 0 und gilt (1), dann folgt*

$$\hat{\psi}(0) = 0. \quad (3)$$

Beweis: Sei $\hat{\psi}$ stetig bei 0, aber $\hat{\psi}(0) \neq 0$. Dann existieren positive δ und ε derart, daß $|\hat{\psi}(\zeta)| \geq \varepsilon$ falls $\zeta \in [-\delta, \delta]$. Somit kann aber (1) nicht konvergieren. $\square$

Aussage 5 Sei $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ (nicht trivial) mit $\hat{\psi}(0) = 0$ und gibt es ein $1 \geq \beta > 1/2$ mit $\int_{\mathbb{R}} |x|^\beta |\psi(x)| dx < \infty$. Dann ist ψ ein Wavelet.

Beweis: Da $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ und $\int_{\mathbb{R}} |x|^\beta |\psi(x)| dx < \infty$, folgt $\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^\beta) |\psi(x)| dx < \infty$. Mit $(1 + |x|)^\beta \leq 1 + |x|^\beta$ hat man weiter $C = \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^\beta |\psi(x)| dx < \infty$. Sei $\phi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$, dann ist zunächst für $x \leq 0$

$$\begin{aligned} |\phi(x)| &\leq \int_{-\infty}^x |\psi(t)| dt = \int_{-\infty}^x (1 + |t|)^{-\beta} (1 + |t|)^\beta |\psi(t)| dt \\ &\leq (1 + |x|)^{-\beta} \int_{\mathbb{R}} (1 + |t|)^\beta |\psi(t)| dt = (1 + |x|)^{-\beta} \cdot C \end{aligned} \quad (4)$$

Für $x > 0$ ist wegen $\hat{\psi}(0) = 0$

$$|\phi(x)| \leq \int_x^\infty |\psi(t)| dt \leq (1 + |x|)^{-\beta} \int_{\mathbb{R}} (1 + |t|)^\beta |\psi(t)| dt$$

und zusammen mit (4) und $\beta > 1/2$ gilt $\forall x \in \mathbb{R}$, daß $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. Die Zulässigkeitsbedingung (1) ist mit

$$\begin{aligned} 2\pi c_\psi &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\omega|^2 |\hat{\phi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_{-1}^{+1} |\omega| |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega + \\ &\quad \int_{|\omega| > 1} \frac{|\omega|^2 |\hat{\phi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \leq \|\hat{\phi}\|_2^2 + \|\hat{\phi}'\|_2^2 < \infty \end{aligned}$$

erfüllt und es folgt die Behauptung. $\square$

Aussage 6 Sei $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ nicht trivial und habe kompakten Träger. Dann sind äquivalent:

1. $\hat{\psi}(0) = 0$.
2. ψ ist ein Wavelet.

Beweis: ($1 \Rightarrow 2$). Da ψ kompakten Träger besitzt, ist die Konvergenz von $\int_{\mathbb{R}} |x|^\beta |\psi(x)| dx$ für alle $\beta \geq 0$ garantiert. Nach Aussage 5 folgt 2. ($2 \Rightarrow 1$). $\hat{\psi}$ ist stetig in einer Nullumgebung. Da ψ ein Wavelet ist folgt mit Aussage 4 1. $\square$

Eine wesentliche Eigenschaft der Wavelet-Transformation besteht darin, daß sie eine Isometrie zwischen gewichteten L^2 -Räumen ist. Auf dem Bildbereich wird die Inversion durch den zu $\mathcal{W}_\psi$ adjungierten Operator realisiert. $\mathcal{W}_\psi^*$ bildet Elemente des $L^2(\mathbb{R}^2, da db/a^2)$ (nur des Bildbereiches der Wavelet-Transformation) in $L^2(\mathbb{R})$ ab.

Theorem 7 Sei ψ ein Wavelet, welches eine Wavelet-Transformation definiert. Dann gilt für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left((\mathcal{W}_{\psi} f(a, b)) \overline{(\mathcal{W}_{\psi} g(a, b))} \right) da db / a^2 = c_{\psi} \langle f, g \rangle. \quad (5)$$

Für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ und alle $x \in \mathbb{R}$ an denen f stetig ist, gilt die Inversionsformel

$$c_{\psi}^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_{\psi} f(a, b) \psi((x - b)/a) / (|a|^{-1/2}) da db / a^2 = f(x). \quad (6)$$

Beweis: Zunächst folgt mit $\psi_{a,b}(x) = T_b S_{1/a} \psi(x)$ und den Rechenregel der Fourier-Transformation

$$\widehat{\psi}_{a,b} = a |a|^{-1/2} e^{-ib\omega} \widehat{\psi}(a\omega).$$

Sei $F(x) := \widehat{f}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)}$ und $G(x) := \widehat{g}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)}$. Zusammen mit der Identität von Plancherel hat man

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left((\mathcal{W}_{\psi} f(a, b)) \overline{(\mathcal{W}_{\psi} g(a, b))} \right) db \\ &= |a|^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi((t - b)/a)} dt \int_{\mathbb{R}} \overline{g(s)} \psi((s - b)/a) ds \right) db \\ &= a^2 |a|^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{F(x)} e^{-ibx} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{G(y)} e^{-iby} dy \right) db \\ &= a^2 |a|^{-1} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\overline{G}}(b) \widehat{F}(b) db \\ &= a^2 |a|^{-1} \int_{\mathbb{R}} \overline{G}(x) F(x) dx. \end{aligned}$$

Werden die Definitionen für F , G und c_{ψ} substituiert, so folgt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left((\mathcal{W}_{\psi} f(a, b)) \overline{(\mathcal{W}_{\psi} g(a, b))} \right) db \right) / a^2 da \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\widehat{f}(x) \overline{\widehat{g}(x)} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(ax)|^2}{|a|} da \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\widehat{f}(x) \overline{\widehat{g}(x)} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(y)|^2}{|y|} dy \right) dx \\ &= c_{\psi} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = c_{\psi} \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

Sei x ein Stetigkeitspunkt von f . Die Funktion g wird durch die Gaußfunktion $g_{\alpha}(\cdot - x) = 1/(2\sqrt{\pi\alpha}) e^{-(\cdot - x)^2/(4\alpha)}$ ersetzt und dann der Grenzwert $\alpha \searrow 0$ gebildet

$$\begin{aligned} f(x) &= c_{\psi}^{-1} \lim_{\alpha \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left((\mathcal{W}_{\psi} f(a, b)) \overline{\langle g_{\alpha}(\cdot - x), \psi_{a,b} \rangle} \right) / a^2 da db \\ &= c_{\psi}^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{W}_{\psi} f(a, b)) \psi_{a,b}(x) / a^2 da db. \end{aligned}$$

Somit sind (5) und (6) bewiesen. $\square$

2 Approximationstheorie

Die Auswertung von Transformationsergebnissen ist der Kern der Signalanalyse. Deshalb ist es notwendig, die Wavelet-Transformation zu motivieren und ihre Approximationseigenschaften hervorzuheben.

Angenommen, ein beliebiges Signal $f \in L^p(\mathbb{R})$ ist zu analysieren. Im ersten Schritt betrachtet man geglättete Versionen von f . Dazu wählt man eine reellwertige und nichtnegative Funktion $\phi \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R})$ aus und betrachtet die Familie $\phi_a(t) = S_{1/a}\phi(t)$, $a > 0$, von dilatierten Versionen von ϕ . Für ϕ soll gelten $\int \phi = 1$. Die geglättete Version von f ist

$$\sigma_a(b) = \phi_a * f(b) = \int_{\mathbb{R}} \phi_a(b-t)f(t)dt. \quad (7)$$

Eine Konvergenzaussage liefert folgendes Lemma.

Lemma 8 *Sei $\int \phi = 1$. Dann konvergiert die geglättete Version σ_a von f in $L^p(\mathbb{R})$. D.h. für $1 \leq p < \infty$,*

$$\|\sigma_a - f\|_p \rightarrow 0 \quad \text{für } a \rightarrow 0. \quad (8)$$

Ist f sogar gleichmäßig stetig, so gilt dies auch für $p = \infty$.

(Beweis in [15])

Der Ansatz in der Wavelet-Analyse besteht nun darin, Details zu untersuchen, die sich von Skale a zu Skale $a - da$ verändern. Bildet man den Grenzübergang $da \rightarrow 0$, so gelangt man zu der Darstellung

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) = -a\partial_a \sigma_a(b) = \psi_a * f(b), \quad (9)$$

wobei $\psi(t) = (t\partial_t + 1)\phi(t)$. Die Formeln (7) und (9) ähneln sich, aber $\hat{\phi}(0) = 1$ und $\hat{\psi}(0) = 0$. Somit zeigt sich, um Details von f zu finden, hat man Faltungen von f mit dilatierten Versionen von ψ zu bilden. Nach Definition 3 nennt man sie die Wavelet- Transformation von f bezüglich des Wavelets ψ .

Die Bedingung (1) macht nur geringe Einschränkungen an die Funktionen ψ . Die Menge der Wavelets ist sogar dicht in $L^2(\mathbb{R})$. Klassifizierende Approximationskriterien sind somit wichtig, um die Auswahl zu erleichtern.

Definition 9 *Für $r \in \mathbb{R}$ nennt man*

$$S^r(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{S}' \mid (1 + |\cdot|)^{r/2} \hat{f}(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

den Sobolev-Raum der Ordnung r . Die Norm in $S^r(\mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$\|f\|_r = \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |t|^2)^r |\hat{f}(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Definition 10 Ein Wavelet ψ heißt von N -ter Ordnung, falls

1. $\int_{\mathbb{R}} x^k \psi(x) dx = 0, 0 \leq k \leq N-1,$
2. $0 \neq \int_{\mathbb{R}} x^N \psi(x) dx < \infty.$

Die folgende Aussage zeigt die Bedeutung der geeigneten Wahl der Ordnung des analysierenden Wavelets im asymptotischen Verhalten für $a \rightarrow 0$.

Aussage 11 Sei $f \in S^r(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{R}$, und sei $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ein Wavelet N -ter Ordnung mit $\mu = (-1)^N/N! \int x^N \psi(x) dx$. Dann gilt

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left\| \frac{\text{sgn}^N(-a)}{|a|^{N+1/2}} \mathcal{W}_\psi f(a, \cdot) - \mu f^{(N)}(\cdot) \right\|_{r-N} = 0.$$

(Beweis in [12])

3 Komplexwertige Wavelets

Die analysierenden Wavelets die verwendet werden, sind Abbildungen in $\mathbb{C}$. Somit geht die reellwertige Darstellung der Wavelet-Transformation in eine komplexwertige über. So kann man in die Lage versetzt werden, Phasen- und Modulusinformationen der Wavelet-Transformation verwerten zu können, die bei rein reellen Betrachtungen nicht möglich wären. Es stellt sich zunächst die Aufgabe, geeignete Klassen von Wavelets zu finden und Interpretationen der Transformation zu formulieren.

Definition 12 Eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ heißt progressiv bzw. regressiv, falls $\text{supp} \hat{f} \subseteq \mathbb{R}_+$ bzw. $\text{supp} \hat{f} \subseteq \mathbb{R}_-$. Es sei

$$\mathcal{H}_+^2 = \{f : f \in L^2(\mathbb{R}) \wedge \text{supp} \hat{f} \subseteq \mathbb{R}_+\} \quad \text{und} \quad \mathcal{H}_-^2 = \{f : f \in L^2(\mathbb{R}) \wedge \text{supp} \hat{f} \subseteq \mathbb{R}_-\}.$$

Die Projektoren

$$P^+ : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}_+^2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad P^- : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}_-^2(\mathbb{R})$$

wirken wie folgt:

$$\begin{aligned} f &\mapsto P^+ f, \quad \text{vermöge} \quad \hat{f}(\omega) \mapsto \Theta(\omega) \hat{f}(\omega), \\ f &\mapsto P^- f, \quad \text{vermöge} \quad \hat{f}(\omega) \mapsto \Theta(-\omega) \hat{f}(\omega), \end{aligned} \tag{10}$$

wobei Θ die Heaviside-Funktion ist

$$\Theta(t) = 0 \text{ für } t < 0, \quad 1 \text{ sonst.}$$

Nach der Parsevalschen Relation ist die Fourier-Transformation eine Isometrie auf $L^2(\mathbb{R})$ und sie wird somit durch den adjungierten Operator invertiert. Für ein beliebiges $f \in \mathcal{H}_+^2(\mathbb{R})$ und ein beliebiges $g \in \mathcal{H}_-^2(\mathbb{R})$ gilt somit

$$\langle f, g \rangle = 0,$$

denn $\langle \Theta(\cdot)\hat{f}, \Theta(-\cdot)\hat{g} \rangle = 0$. D.h., die durch die Projektoren P^+ und P^- erzeugten Unterräume sind orthogonal

$$L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{H}_+^2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{H}_-^2(\mathbb{R}).$$

Aufgrund der Orthogonalität sind die Unterräume abgeschlossen. Dies impliziert die Stetigkeit der Projektoren.

Da $P^+ + P^- = Id$, können die Projektoren verwendet werden, um das analysierende Wavelet und das untersuchte Signal in progressive und regressive Komponenten zu zerlegen. Man erhält die Darstellung

$$\mathcal{W}_\psi f = \mathcal{W}_{P^+\psi} P^+ f + \mathcal{W}_{P^-\psi} P^- f. \quad (11)$$

Ist ψ nun progressiv, so werden nur positive Frequenzen des Signals sichtbar:

$$\mathcal{W}_\psi f = \mathcal{W}_\psi P^+ f.$$

Im allgemeinen Fall bedeutet dies einen a-priori Verlust an Informationen eines nicht-progressiven Signals $f \in L^2(\mathbb{R})$, falls das analysierende Wavelet progressiv ist. Ist f eine reelle Funktion, geht keine Information a-priori verloren, denn die definierenden Frequenzen sind positiv oder anders formuliert, die Fourier-Transformierte ist hermitisch

$$\hat{f}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}.$$

Aussage 13 *Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ reellwertig ($\hat{f}$ ist hermitisch). Dann kann f allein durch den progressiven Teil $P^+ f$ rekonstruiert werden*

$$f(t) = 2\Re P^+ f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Re \int_0^\infty \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (12)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} f(t) &= \bar{f}(t) = 1/(\sqrt{2\pi}) \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\omega) e^{i\omega t}} d\omega = 1/(\sqrt{2\pi}) \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= 1/(\sqrt{2\pi}) \left(\int_{-\infty}^0 \hat{f}(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega + \int_0^\infty \hat{f}(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right) \\ &= 1/(\sqrt{2\pi}) \left(- \int_\infty^0 \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_0^\infty \overline{\hat{f}(-\omega) e^{i\omega t}} d\omega \right) \\ &= 1/\sqrt{2\pi} \left(\int_0^\infty \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_0^\infty \overline{\hat{f}(\omega) e^{i\omega t}} d\omega \right) \\ &= \sqrt{2/\pi} \Re \int_0^\infty \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 2\Re P^+ f(t) \end{aligned}$$

□

Somit ist die Wavelet-Transformation einer reellen Funktion f bezüglich eines reellen Wavelets ψ nach (11) und (12) in Terme progressiver Funktionen darstellbar

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_\psi f(a, b) &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle = 2\langle \Re P^+ f, \psi_{a,b} \rangle \\ &= 2\Re \langle f, P^+ \psi_{a,b} \rangle = 2\Re \mathcal{W}_{P^+ \psi} f(a, b).\end{aligned}$$

Bezüglich eines komplexwertigen Wavelets ψ hat die Transformation folgende Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_\psi f(a, b) &= \langle f, \psi_{a,b} \rangle = 2\Re \langle f, P^+ \Re \psi_{a,b} \rangle - 2i\Re \langle f, P^+ \Im \psi_{a,b} \rangle \\ &= 2\Re \mathcal{W}_{P^+ \Re \psi} f(a, b) - 2i\Re \mathcal{W}_{P^+ \Im \psi} f(a, b)\end{aligned}\tag{13}$$

oder

$$\mathcal{W}_\psi f = (1 - i) \cdot \Re \mathcal{W}_{P^+ \psi} f + (1 + i) \cdot \Re \mathcal{W}_{P^+ \overline{\psi}} f.$$

3.1 Progressive Wavelets

Wegen (13) kann man sich bei der Analyse reellwertiger Signale auf Wavelets $\psi \in \mathcal{H}_+^2(\mathbb{R})$ beschränken. Für die Interpretation der Wavelet-Transformation sind besonders progressive Wavelets mit reeller Fourier-Transformierter geeignet. Ein analytisches Hilfsmittel bei der Charakterisierung diesartiger Funktionen ist die Hilbert-Transformation.

Definition 14 *Die Abbildung*

$$H : f \rightarrow Hf \text{ vermöge } \hat{f}(\omega) \mapsto -i \operatorname{sgn}(\omega) \hat{f}(\omega)$$

wird als Hilbert-Transformation bezeichnet.

Vermöge H modifizieren sich die orthogonalen Projektoren zu

$$P^+ = \frac{1}{2}(Id + iH) \quad \text{und} \quad P^- = \frac{1}{2}(Id - iH).\tag{14}$$

Die multiplikative Verknüpfung im Fourier-Raum entspricht einer Faltung im Orts-Raum. Da $\mathcal{F}^{-1}(-i \operatorname{sgn})$ zu berechnen ist, wird zunächst $(-i) \operatorname{sgn}(\omega)$ durch $e^{-\varepsilon|\omega|}(-i) \operatorname{sgn}(\omega)$ approximiert ($\varepsilon \searrow 0$), um die Existenz des Integrals abzusichern. Für die inverse Fourier-Transformation der Approximation ergibt sich

$$\begin{aligned}-i\mathcal{F}^{-1}(e^{-\varepsilon|\cdot|}\operatorname{sgn}(\cdot))(t) &= -i/\sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(\omega) e^{-\varepsilon|\omega|+it\omega} d\omega \\ &= -i/\sqrt{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 -e^{\varepsilon\omega+it\omega} d\omega + \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon\omega+it\omega} d\omega \right) \\ &= -i/\sqrt{2\pi} \left(\frac{-1}{\varepsilon + it} - \frac{1}{it - \varepsilon} \right) = \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{\pi}(t^2 + \varepsilon^2)}.\end{aligned}$$

Man hat also unter Zuhilfenahme des Faltungssatzes die Darstellung

$$Hf(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{t-x}{(t-x)^2 + \varepsilon^2} dx.$$

Dieses Integral konvergiert punktweise fast überall (vgl. [14]).

Die Projektionen P^+f und P^-f werden somit im Orts-Raum durch das Auswerten von Hf bestimmt. Die Rekonstruierbarkeit gemäß Aussage 13 folgt nun sofort aus der Modifizierung von P^+ und der Reellwertigkeit von H

$$f(t) = 2\Re P^+f(t) = 2\Re \frac{1}{2}((Id + iH)f)(t) = f(t).$$

Die folgende allgemeine Aussage gibt eine Charakterisierung der gesuchten Funktionen (Wavelets) in der Orts- und Fourierdarstellung.

Aussage 15 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. $\varphi \in \mathcal{H}_+^2(\mathbb{R})$ und $\Im \hat{\varphi} = 0$.
2. $\Re \varphi = -H\Im \varphi$ ist eine gerade und $\Im \varphi = H\Re \varphi$ ist eine ungerade Funktion.

Beweis: $(1 \Rightarrow 2)$. Da $\varphi \in \mathcal{H}_+^2(\mathbb{R})$ ist $\varphi = P^+\varphi$. Nach (14) folgt $\varphi = iH\varphi$. Somit gilt $\varphi = \Re \varphi + i\Im \varphi = iH(\Re \varphi + i\Im \varphi) = iH\Re \varphi - H\Im \varphi$, also $\Re \varphi = -H\Im \varphi$ und $\Im \varphi = H\Re \varphi$. Da $\Im \hat{\varphi} = 0$ ist $\Re \varphi(t) = 1/2(\varphi(t) + \overline{\varphi(t)}) = 1/(2\sqrt{2\pi}) \int_0^\infty \hat{\varphi}(\omega)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})d\omega = 1/\sqrt{2\pi} \int_0^\infty \hat{\varphi}(\omega) \cos(\omega t)d\omega$ sowie $\Im \varphi(t) = 1/2(\varphi(t) - \overline{\varphi(t)}) = 1/(2\sqrt{2\pi}) \int_0^\infty \hat{\varphi}(\omega)(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})d\omega = 1/\sqrt{2\pi} \int_0^\infty \hat{\varphi}(\omega) \sin(\omega t)d\omega$. $(2 \Rightarrow 1)$. Es ist $P^+\varphi = 1/2(\varphi + iH\varphi) = 1/2(\Re \varphi + i\Im \varphi + iH(\Re \varphi + i\Im \varphi)) = 1/2(\Re \varphi + i\Im \varphi + iH\Re \varphi - H\Im \varphi)$ und durch Einsetzen der beiden Identitäten folgt $P^+\varphi = \varphi$. Außerdem ist $\Im \hat{\varphi}(\omega) = 1/2(\int \varphi(t)e^{-it\omega}dt - \int \overline{\varphi(t)}e^{it\omega}dt) = 1/2 \int (\varphi(t) - \overline{\varphi(-t)})e^{-it\omega}dt$. Da $\Re \varphi$ gerade und $\Im \varphi$ ungerade ist, folgt $\varphi(t) - \overline{\varphi(-t)} = 0$ also $\Im \hat{\varphi} = 0$ $\square$

Beispiel: $\triangleright$ Es wird ein Wavelet konstruiert, bei dem Aussage 15 gut einsehbar ist. Es sei

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in [1, 2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Zulässigkeitsbedingung ist somit erfüllt ($c_\psi = \pi \ln 4 < \infty$). Für ψ ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\hat{\psi}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}it}(e^{i2t} - e^{it}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}t}[(\sin(2t) - \sin(t)) + i(\cos(t) - \cos(2t))] \end{aligned}$$

siehe auch Abbildung 1. Der Nachteil dieser Konstruktion mit einer stückweisen konstanten Fourier-Transformierten besteht darin, daß das Wavelet in der Ortsdarstellung kein gutes Abfallverhalten aufweist. Bessere Ergebnisse werden erzielt, wenn $\hat{\psi}$ bessere Glattheitseigenschaften hat, etwa $\hat{\psi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$. $\triangleleft$

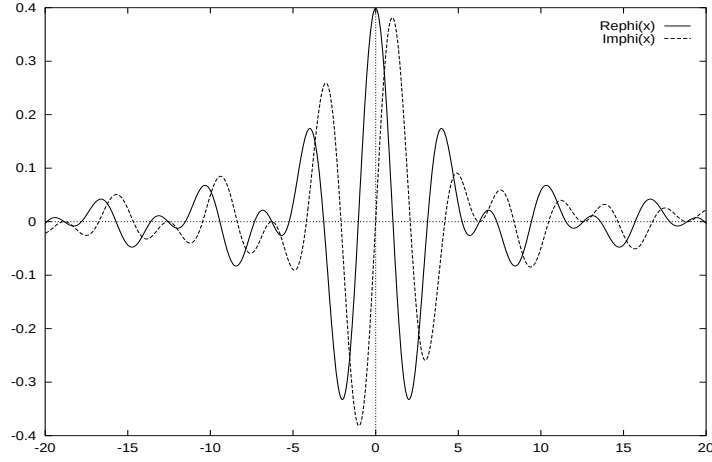


Abbildung 1: Beispiel-Wavelet in der Ortsdarstellung.

Eine gute Interpretierbarkeit der Wavelet-Transformation sowie die Konstruktion von progressiven Wavelets mit besseren Lokalisierungseigenschaften im Orts- und Frequenzbereich erfordern eine Analyse der komplexen Fortsetzbarkeit von Funktionen mit reellem Definitionsbereich.

Eine Funktion $\varphi \in \mathcal{H}_+^2(\mathbb{R})$ hat nach (10) folgende Darstellung

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{\varphi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Da ω stets nichtnegativ unter dem Integral ist, kann $z = t + ix$ substituiert werden, wobei $x > 0$ ist, d.h. eine Fortsetzung in die obere komplexe Halbebene $\mathbb{P}$. In [9] wird gezeigt, daß die Funktion

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{\varphi}(\omega) e^{i\omega z} d\omega, \quad z = t + ix, \quad x > 0$$

in der oberen komplexen Halbebene analytisch ist. Da $|e^{-\omega x}| \leq 1$, ist der Integrand quadratisch integrierbar. Das Theorem 16 macht eine Eindeutigkeitsaussage über die Fortsetzung progressiver Funktionen.

Theorem 16 (Paley-Wiener) *Sei $\varphi \in \mathcal{H}_+^2(\mathbb{R})$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte in der oberen komplexen Halbebene $\mathbb{P}$ analytische Funktion Φ derart, daß*

1. $\int_{\mathbb{R}} |\Phi(t + ix)|^2 dt \leq c < \infty$,
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |\Phi(t + ix) - \varphi(t)|^2 dt = 0$.

D.h. für jede analytische Funktion Φ in der oberen Halbebene $\mathbb{P}$, die der Bedingung 1. genügt, gibt es eine progressive Funktion φ , die Randwert von Φ im Sinne von Bedingung 2. ist.

(Beweis in [19])

Somit wird die Interpretierbarkeit der Transformation analytisch fortgesetzter Funktionen abgesichert. Nach Plancherel ($\int |\varphi|^2 = \int |\hat{\varphi}|^2$) gilt nun

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t + ix)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{T_{-ix}\varphi}(\omega)|^2 d\omega = \int_0^\infty |\hat{\varphi}(\omega)|^2 e^{-2x\omega} d\omega \leq c < \infty$$

und mit $\int_0^\infty e^{i\omega(t+ix)} d\omega = 1/(x - it)$ läßt sich die Fortsetzung durch folgende Gleichungskette beschreiben

$$\begin{aligned} \varphi(t + ix) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{\varphi}(\omega) e^{i\omega(t+ix)} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{\varphi}(\omega) e^{-x\omega} e^{it\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) e^{-i\omega(v-ix-t)} dv d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) \underbrace{\int_0^\infty e^{-i\omega(v-ix-t)} d\omega}_{\frac{1}{x+i(v-t)}} dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(v)}{2\pi(x - i(t - v))} dv, \end{aligned}$$

d.h. die analytische Fortsetzung einer progressiven Funktion φ ist somit durch eine Faltung mit dem Cauchy-Kern gegeben

$$\varphi(t + ix) = C_x * \varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(v)}{2\pi(x - i(t - v))} dv,$$

mit $C_x(t) = x^{-1}C(t/x)$ und $C(t) = 1/(2\pi)(1 - it)^{-1}$. Eine analoge Aussage für regressive Funktionen existiert durch Austausch der oberen mit der unteren komplexen Halbebene.

3.2 Die Cauchy-Wavelets

Als ein Beispiel für progressive Wavelets mit reellwertiger Fourier-Transformierten sind die Cauchy-Wavelets definiert durch die n -te Ableitung des Cauchy-Kerns $C(t)$

$$\psi_n^{Cauchy}(t) = \frac{d^n}{i^n dt^n} C(t) = \frac{1}{2\pi} \Gamma(n+1) (1 - it)^{-(n+1)}, \quad n > 0, \quad (15)$$

wobei $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$, falls $n \in \mathbb{N}$. Mit

$$\begin{aligned} \hat{C}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} 2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos t\omega + t \sin t\omega + i(t \cos t\omega - \sin t\omega)}{1 + t^2} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi} 2\pi} \left\{ \int_0^\infty \frac{\cos t\omega}{1 + t^2} dt + \int_0^\infty \frac{t \sin t\omega}{1 + t^2} dt \right\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi} 2\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} e^{-\omega} + \frac{\pi}{2} e^{-\omega} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega} \end{aligned}$$

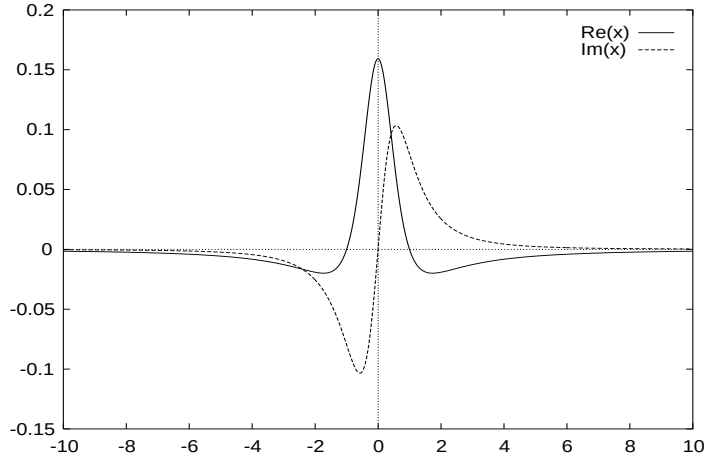


Abbildung 2: Das Cauchy-Wavelet für $n = 1$ in der Ortsdarstellung.

folgt für die Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}\psi_n^{Cauchy}(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{d^n}{dt^n}C(t)\right)(\omega) = \omega^n \hat{C}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\omega^n e^{-\omega} \text{ für } \omega \geq 0, \quad 0 \text{ sonst.}$$

Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ nun ein beliebiges Signal. Bildet man den progressiven Teil P^+f , so ist die Wavelet-Transformierte

$$\mathcal{W}_{\psi_n^{Cauchy}}P^+f(a, b) = \frac{a^{n+1/2}\Gamma(n+1)}{2\pi i^{n+1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{P^+f(t)}{(t - (b + ai))^{n+1}} dt. \quad (16)$$

Durch Faltung P^+f mit C_x erhält man die analytische Fortsetzung von P^+f auf die obere Halbebene

$$\Phi(t + ix) = \int_{\mathbb{R}} \frac{P^+f(v)}{2\pi(x - i(t - v))} dv.$$

Der Interpretierbarkeit des uneigentlichen Integrals (16) dienen die funktionentheoretischen Aussagen 17 und 18 (Beweise in [3]).

Aussage 17 Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $a \in D$ ein Punkt aus D und $f : D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit außerwesentlicher Singularität der Ordnung m in a . Dann gilt

$$\text{res}_a(f) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z)),$$

mit $\text{res}(f)$ als Residuum von f .

Die Berechnung eines uneigentlichen Integrals beruht auf folgender Idee: Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Elementargebiet. Seien a_j endlich viele (o.B.d.A. sei die Anzahl l) paarweise

verschiedene Punkte in $\mathbb{P} \subset D$ und sei $f : D \setminus \{a_j\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische Funktion. Wähle nun $r \in \mathbb{R}$ so, daß $r > |a_j|$ für alle j . Dann sei γ_r der Halbkreisbogen von r über ir nach $-r$ in der komplexen Halbebene $\mathbb{P}$. Der Umrundungsweg um die Singularitäten sei $\gamma = \gamma_r + [-r, r]$. Da dieser einmal im mathematisch positivem Sinn durchlaufen wird, liefert die Residuenformel

$$\int_{-r}^r f(x)dx + \int_{\gamma_r} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^l \text{res}_{a_j}(f).$$

Aussage 18 *Sei f bis auf höchstens l ($0 < l < \infty$) vielen Punkten a_j , von denen keiner reell ist, holomorph in einem Gebiet D . Sei $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ konvergent (der Cauchy'sche HW existiert mit demselben Wert). Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^l \text{res}_{a_j}(f).$$

Sei $\Psi(z) := \Phi(z)/(z - (b + ai))^{n+1}$. Dann hat Ψ bei $b + ai$ eine Singularität der Ordnung $n + 1$. Für das Residuum von Ψ bedeutet dies

$$\text{res}_{b+ai}(\Psi) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \Phi(z) \big|_{z=b+ai}.$$

Nach Aussage 18 folgt

$$\mathcal{W}_{\psi_n^{C_{au}}} P^+ f(a, b) = \frac{2\pi i}{n!} \Phi^{[n]}(b + ai) \cdot \frac{a^{n+1/2} \Gamma(n+1)}{2\pi i^{n+1}} = a^{n+1/2} \Phi^{[n]}(b + ai) / i^n.$$

D.h., die Auswertung der Wavelet-Transformierten eines reellen Signals ist gleichbedeutend mit der Analyse der n -ten Wirtinger Ableitung bzgl. z der analytischen Fortsetzung der Projektion $P^+ f$.

Bemerkung: Ausgehend von der affinen Gruppe läßt sich nach [5] neben der Heisenberg'schen Unschärferelation

$$\|(\diamond - \diamond_0)f(\diamond)\|_2 \cdot \|(\diamond - \diamond_0)\hat{f}(\diamond)\|_2 \geq c\|f\|_2^2 \quad (17)$$

eine analoge Relation bezüglich der Wavelet-Transformation konstruieren. Durch die Definition zweier selbstadjungierter nicht miteinander kommutierender Operatoren (A_a und A_b) wird die folgende Relation für $\varphi \in \mathcal{D}([A_a, A_b]) : \|\varphi\| = 1$ erzeugt

$$\begin{aligned} |\langle [A_a, A_b]f, f \rangle|^2 &= |\langle A_b f, f \rangle|^2 \\ &\leq 4(\|\varphi'\|^2 - \langle A_b f, f \rangle^2) \cdot (\|\diamond \varphi'\|^2 - \frac{1}{4}\|\varphi\|^2 - \langle A_a f, f \rangle^2). \end{aligned} \quad (18)$$

Die minimierenden Funktionen haben nach [5] folgende Form

$$\varphi(x) = c(x - \lambda)^\alpha,$$

wobei mit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ gelten muß: $\lambda \in i\mathbb{R}$, $0 > -i\lambda\mu_2$, $\alpha = -1/2 - i\lambda\mu_2 + i\mu_1$ und c so, daß $\|\varphi\| = 1$.

Für den Fall $n = 1$ ist

$$\|\psi_1^{Cauchy}\| = \frac{\Gamma(2)}{2\pi} \sqrt{\int (1+t^2)^{-2} dt} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}},$$

d.h. mit der Modifizierung $\bar{\psi} = \sqrt{8\pi} \cdot \psi_1^{Cauchy}$ wird $\bar{\psi}$ ein minimierendes Wavelet mit der Einstellung $\lambda = -i$, $\alpha = -2$ und $c = -\sqrt{2/\pi}$.

Dies bedeutet, daß die Menge der Cauchy-Wavelets (geeignet normiert) die Unschärferelation der affinen Gruppe minimieren und somit bzgl. dieser Relation simultan im Zeit- und Frequenzbereich gut lokalisieren.

3.3 Die Morlet-Gauß-Wavelets

Im Gegensatz zu den Cauchy-Wavelets haben die dilatierten und translatierten Versionen der Gaußfunktion die Eigenschaft, die Unschärferelation der Weyl-Heisenberg Gruppe (17) zu minimieren (Gleichheit). Die dazugehörigen Wavelets sind deshalb hervorzuheben.

Generell gilt, daß die Menge der endlichen Linearkombinationen von Versionen der Gaußfunktion abgeschlossen ist unter Fourier-Transformation, punktwiser Multiplikation und Faltung. Das Skalarprodukt zweier Elemente dieser Menge ist durch eine explizite Formel darstellbar (vgl. [8]).

Die speziell untersuchten Basis-Funktionen sollten (1) genügen und progressiv sein. Eine endliche Linearkombination von Gaußfunktionen kann zulässig aber nicht progressiv sein (fast progressiv), da der Träger von $e^{-x^2/2}$ ganz $\mathbb{R}$ ist. In [9] wird die Addition eines Korrekturterms $\eta(t)$ vorgeschlagen, so daß dann

$$\psi^*(t) = \psi(t) + \eta(t)$$

progressiv ist. Eine andere Möglichkeit ist, eine Linearkombination zu konstruieren, die fast progressiv aber dafür günstig für numerische Rechnungen ist (vgl. [8]).

Aussage 19 *In der Menge der endlichen Linearkombinationen von Versionen der Gaußfunktion gibt es wenigstens eine nichttriviale Linearkombination $\psi = e^{ic\phi} h$ mit*

1. $\hat{h} = h$,
2. Für ein $n \in \mathbb{N}$ hat h bei $\pm c$ eine Nullstelle der Ordnung n (oder $\hat{\psi}$ hat bei $\omega = 0$ eine n -fache Nullstelle).

Beweis: Der Beweis ist konstruktiv, d.h. es wird eine entsprechende Funktion ψ konstruiert. Es sei $h_0(x) = e^{-x^2/2}$. Sei $\lambda > 0$ gewählt, dann ist die dilatierte

Gaußfunktion mit gleicher L^2 -Norm $S_{1/\lambda}h_0(x) = \lambda^{-1/2}h_0(x/\lambda)$ und mit Fourier-Transformierter $S_\lambda h_0$. Sei λ reell, dann ist

$$h_0(x) - \gamma(S_\lambda h_0(x) + S_{1/\lambda}h_0(x)) \quad (19)$$

invariant unter Fourier-Transformation und Spiegelung ($x \rightarrow -x$). Sei

$$\gamma = h_0(c)/(S_\lambda h_0(c) + S_{1/\lambda}h_0(c)), \quad (20)$$

dann verschwindet (19) bei $\pm c$. Sei

$$h_1(c; \lambda; x) = h_0(x) - \gamma(S_\lambda h_0(x) + S_{1/\lambda}h_0(x)), \quad (21)$$

mit γ wie in (20). Die n -te Ableitung bezüglich x ist

$$h_1^{(n)}(c; \lambda; x) = (-1)^n [He_n(x)h_0(x) - \gamma(\lambda^{-n-1/2}He(x/\lambda)h_0(x/\lambda) + \lambda^{n+1/2}He_n(\lambda x)h_0(\lambda x))],$$

wobei $He_n(x)$ modifizierte Hermite-Polynome sind: $He_n(x) = 2^{-n/2}H_n(x/\sqrt{2})$, und $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ die Hermite-Polynome. Da $h_1(c; \lambda; x) = h_1(c; \lambda^{-1}; x)$, kann $\lambda \geq 1$ gewählt werden. Für $\lambda = 1$ gilt $h_1(\pm c; 1; x) = 0$. Eine nichttriviale Linearkombination h mit 1 und 2 erhält man nun durch Determinantenbildung

$$h(c; \Lambda; x) = \begin{vmatrix} h_1(c; \lambda_1; x) & \cdots & h_1(c; \lambda_n; x) \\ h_1^{(1)}(c; \lambda_1; x) & \cdots & h_1^{(1)}(c; \lambda_n; x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1^{(n-1)}(c; \lambda_1; x) & \cdots & h_1^{(n-1)}(c; \lambda_n; x) \end{vmatrix}, \quad (22)$$

wobei $\Lambda \in \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_i > 1 \text{ für } 1 \leq i \leq n, \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j\}$. Die Fourier-Transformierte der Funktion

$$\psi(c; \Lambda; x) = e^{icx} h(c; \Lambda; x) \quad (23)$$

hat somit eine Nullstelle der Ordnung n bei $\omega = 0$. $\square$

Wird c in (23) günstig gewählt ($c \geq 5$), so ist ψ fast progressiv. Von Vorteil bei den Morlet-Gauß-Wavelets ist die explizite Berechenbarkeit von Phase und Modulus.

Beispiel: $\triangleright$ Sei $n = 1$ und $\lambda = 1/2$ fest gewählt. Dann ist

$$h(c, \Lambda, x) = h_1(c, 1/2, x) = e^{-x^2/2} - \gamma(\sqrt{2}e^{-2x^2} + 1/\sqrt{2}e^{-x^2/8}),$$

mit $\gamma = e^{-c^2/2}/(\sqrt{2}e^{-2c^2} + 1/\sqrt{2}e^{-c^2/8})$. Somit ergibt sich das Wavelet

$$\psi(c, 1/2, x) = e^{icx} \left(e^{-x^2/2} - e^{-c^2/2} \frac{\sqrt{2}e^{-2x^2} + 1/\sqrt{2}e^{-x^2/8}}{\sqrt{2}e^{-2c^2} + 1/\sqrt{2}e^{-c^2/8}} \right). \quad (24)$$

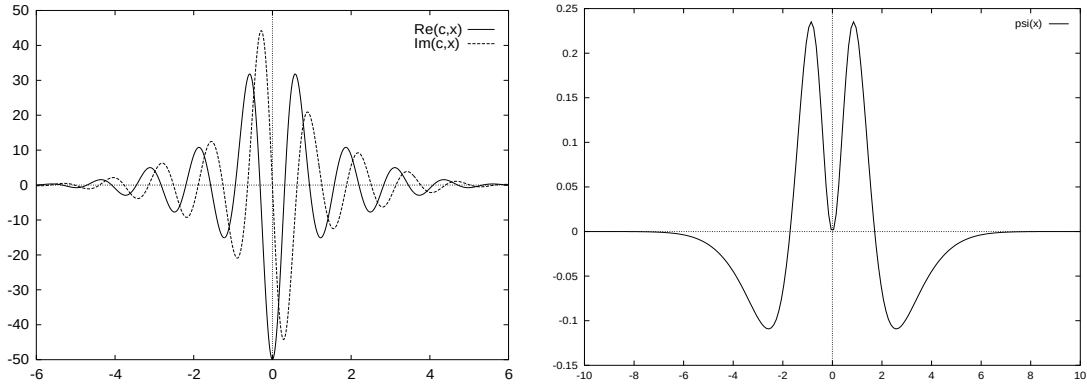


Abbildung 3: Morlet-Gauß-Wavelets für $\lambda = 1/2$, links: $c = 5$ und rechts: $c = 0$

Dementsprechend ist die Fourier-Transformierte

$$\hat{\psi}(c, 1/2, \omega) = e^{-(\omega-c)^2/2} - e^{-c^2/2} \frac{\sqrt{2}e^{-2(\omega-c)^2} + 1/\sqrt{2}e^{-(\omega-c)^2/8}}{\sqrt{2}e^{-2c^2} + 1/\sqrt{2}e^{-c^2/8}}.$$

Für den Fall $c = 0$ erhält man die reellwertige Variante

$$\psi(0, 1/2, x) = \psi(x) = e^{-x^2/2} - (e^{-x^2/8} + 2e^{-2x^2})/3.$$

◁

3.4 Das Wavelet von Lusin

Ausgangspunkt bei der Konstruktion von Lusin's Wavelet bilden Hardy-Räume (vgl. [13]).

Definition 20 *Ein Funktionenraum mit*

$$H^p(\mathbb{R}) = \{[f] : f \text{ ist holomorph in } \mathbb{P}, \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p dx \right)^{1/p} < \infty\}$$

heißt Hardy-Raum.

Ähnlich wie bei der Interpretation der Transformation mit dem Cauchy-Wavelet existiert die Idee, daß ein reelles Signal f endlicher Energie mit einem analytischen Signal F ebenfalls endlicher Energie assoziiert wird, für das $f = \Re F$ gelten soll. Somit ist $F = (f + iHf) \in H^2(\mathbb{R})$. Zur Analyse von Funktionen aus $H^p(\mathbb{R})$ werden Basisfunktionen des $H^p(\mathbb{R})$ der Art $(z - \bar{\zeta})^{-2}$ benutzt, mit $\zeta \in \mathbb{P}$. Gesucht ist eine Darstellung für $f \in H^p(\mathbb{R})$ der Form

$$f(z) = \int \int_{\mathbb{P}} \frac{k(x+iy)}{(z - \overline{(x+iy)})^2} dx dy,$$

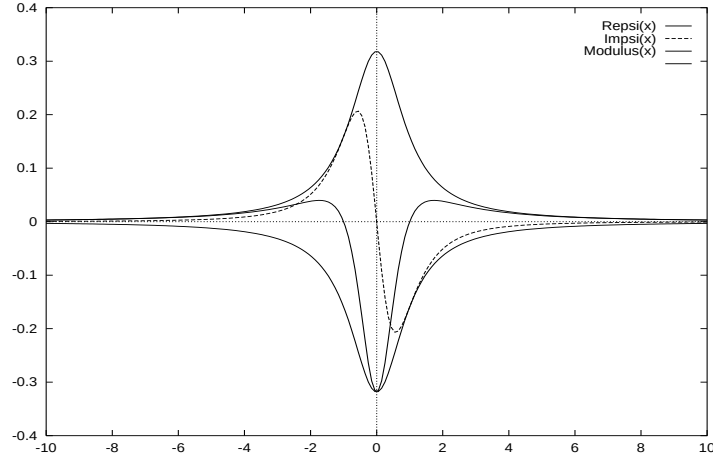


Abbildung 4: Das Lusin-Wavelet in der Ortsdarstellung.

wobei $k(x + iy)$ zu bestimmende Koeffizienten sind. Setzt man voraus, falls

$$A(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{|u-x|}^{\infty} \frac{|k(u + iv)|^2}{v^2} dv du,$$

daß k meßbar ist und

$$\int_{\mathbb{R}} (A(x))^p dx < \infty,$$

so ist gewährleistet, daß $f \in H^p(\mathbb{R})$. Denn falls $|k| \geq 1$, so ist $|f(x + iy)| \leq \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} |k(u + iv)|^2 / (2(x - u)^2 v^2) dv du$. Für den Fall $|k| \leq 1$, ist $\int |f(x + iy)|^p dx$ konvergent. Wird als Basis-Funktion (-Wavelet) $\psi^L(z) = 1/\pi(z + i)^{-2}$ gewählt, wobei $\psi^L(x)$ die Einschränkung auf $\mathbb{R}$ ist, so ist diese Funktion holomorph auf $\mathbb{P}$ und somit ein Element von $H^p(\mathbb{R})$ für $1 \leq p < \infty$. Man gelangt durch diesen Ansatz wieder in die Klasse der progressiven Wavelets mit reellwertiger Fourier-Transformation. Die gewählte Basisfunktion stimmt bis auf einen konstanten Faktor mit dem Cauchy-Wavelet ($n=1$) überein

$$-2\psi_1^{Cauchy}(z) = \psi^L(z).$$

Für die Fourier-Transformierte bedeutet dies

$$\widehat{\psi}^L(\omega) = -\sqrt{2/\pi}\omega e^{-\omega} \text{ für } \omega \geq 0, \quad 0 \text{ sonst.}$$

Die Berechnung der Koeffizienten k ist gleichbedeutend mit der Bestimmung von $\mathcal{W}_{\psi}f$. Die gesuchten Koeffizienten sind aufgrund der Wahl von ψ uneigentliche Integrale vom Typ

$$\mathcal{W}_{\psi^L}f(a, b) = \pi^{-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x) a^{1+1/2}}{(x - (b + ia))^2} dx. \quad (25)$$

Da $f, \psi^L \in H^2(\mathbb{R})$, existiert (25). Sei nun $\Phi(z) = f(z)/(z - (b + ia))^{-2}$. Dann hat $\Phi(z)$ bei $b + ia$ eine Singularität der Ordnung 2. Nach Aussage 17 folgt, daß

$$\text{res}_{b+ia}(\Phi) = \lim_{z \rightarrow b+ia} \frac{d}{dz} ((z - (b + ia))^2 \Phi(z)) = \frac{d}{dz} f(z)|_{b+ia} \quad \text{und somit}$$

$$\mathcal{W}_{\psi^L} f(a, b) = 2\pi i a^{1+1/2} / \pi \frac{d}{dz} f(z)|_{b+ia} = 2ia^{1+1/2} f'(b + ia).$$

4 Phasen- und Modulusinformation

Im kommenden Abschnitt wird versucht, für verschiedene Signalklassen die dazugehörige Wavelet-Transformation analytisch zu beschreiben. Dazu können jeweils stärkere oder schwächere Voraussetzungen an f gestellt werden. Bei der Analyse von realen Signalen muß man sich in der Regel einschränken, deshalb sind starke Annahmen an f eher nachteilig.

Es ist praktisch sinnvoll, die Argumente (a, b) der Wavelet-Transformation aus $\mathbb{H}$ zu wählen (Ausnutzung der Progressivität). Bisher wurde der Translations- bzw. der Dilationsoperator nur auf Funktionen über $\mathbb{R}$ angewandt. Analog kann der Translationsoperator auch über $\mathbb{H}$ definiert werden:

$$T_{b'} f(a, b) := f(a, b - b').$$

Aussage 21 Für die Wavelet-Transformation gilt $\mathcal{W}_{\psi} T_{b'} f = T_b \mathcal{W}_{\psi} f$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\psi} T_{b'} f(a, b) &= 1/\sqrt{a} \int_{\mathbb{R}} f(t - b') \psi((t - b)/a) dt \\ &= 1/\sqrt{a} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi((t - (b - b'))/a) dt = T_{b'} \mathcal{W}_{\psi} f(a, b), \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

Die Aussage 21 ausnutzend lassen sich Phase und Modulus bei speziellen Signalklassen besonders gut beschreiben.

4.1 Komplex-monochromatische Signale

Angenommen das Signal f ist ein Eigenvektor des Translationsoperators, d.h. $T_{b_0} f(t) = \lambda(b_0) f(t)$. Dann folgt $f(t) = e^{i\omega_0 t}$ und $T_{b_0} \mathcal{W}_{\psi} f(a, b) = \lambda(b_0) \mathcal{W}_{\psi} f(a, b)$. Damit hat die Wavelet-Transformation folgende allgemeine Darstellung

$$\mathcal{W}_{\psi} f(a, b) = e^{i\omega_0 b} F(a), \tag{26}$$

wobei F eine komplexwertige Funktion ist. Das heißt, daß die Frequenz eines komplexen monochromatischen Signals aus der Phase einer Einschränkung der Wavelet-Transformation auf einer horizontalen Linie ($a=\text{konstant}$) abgelesen werden kann. Aufgrund (26) ist die Information unabhängig von der Wahl des analysierenden Wavelets. Die Funktion F kann man nun genau beschreiben.

Aussage 22 *Sei f komplex-monochromatisch. Dann gilt für die komplexwertige Funktion F in (26)*

$$F(a) = \sqrt{a} \overline{\widehat{\psi}}(a\omega_0). \quad (27)$$

Beweis: Es ist $f(t) = e^{i\omega_0 t}$. Für die Fourier-Transformierte folgt

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int 1 \cdot e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt \\ &= \mathcal{F}^{-1}(1)(\omega_0 - \omega) = \delta(\omega - \omega_0). \end{aligned}$$

Nach Plancherel ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\psi f(a, b) &= \sqrt{a} \int \overline{\widehat{\psi}}(a\omega) e^{ib\omega} \hat{f}(\omega) d\omega = \sqrt{a} \int \overline{\widehat{\psi}}(a\omega) e^{ib\omega} \delta(\omega - \omega_0) d\omega \\ &= e^{ib\omega_0} \sqrt{a} \overline{\widehat{\psi}}(a\omega_0) \end{aligned}$$

und mit (26) folgt die Behauptung. $\square$

Der Modulus von (26) ist konstant entlang Linien konstanter Skale und variiert wie $\sqrt{a} \overline{\widehat{\psi}}(a\omega_0)$ entlang Linien konstanter Zeit. Eine sogenannte "Spektral-Linie" im Signal zeigt sich durch horizontale Muster (konst. Modulus und lineare Phase) der Wavelet-Transformation.

4.2 Reell-monochromatische Signale

Ist das Signal f reell, so kann nicht gelten $f(t) = e^{i\omega_0 t}$. Eine mögliche Darstellung ist $f(t) = \cos(\omega_0 t)$. Für die Fourier-Transformation ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int 1 \cdot e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int 1 \cdot e^{i(-\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{1}{2} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \delta(\omega + \omega_0). \end{aligned}$$

Die Wavelet-Transformation modifiziert sich zu

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\psi f(a, b) &= \sqrt{a} \int \overline{\widehat{\psi}}(a\omega) e^{ib\omega} \hat{f}(\omega) d\omega \\ &= \sqrt{a} \left(\frac{1}{2} \int \overline{\widehat{\psi}}(a\omega) e^{ib\omega} \delta(\omega - \omega_0) d\omega + \frac{1}{2} \int \overline{\widehat{\psi}}(a\omega) e^{ib\omega} \frac{1}{2} \delta(\omega + \omega_0) d\omega \right) \\ &= \sqrt{a} \left(\frac{1}{2} e^{ib\omega_0} \overline{\widehat{\psi}}(a\omega_0) + \frac{1}{2} e^{-ib\omega_0} \overline{\widehat{\psi}}(-a\omega_0) \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Damit ist $|\mathcal{W}_\psi f|$ aufgrund der Interferenz beider Summanden auf Linien konstanter Skale nicht konstant. Beschränkt man die Auswahl der Wavelets auf $\mathcal{H}_+^2(\mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{H}_-^2(\mathbb{R})$, so muß ein Term in (28) konstant Null sein und man hat eine Interpretation gemäß Abschnitt 4.1. Die Frequenz eines reell-monochromatischen Signals ist dann allein aus $|\mathcal{W}_\psi f(a, b)| = 1/2\sqrt{a}|\widehat{\psi}(a\omega_0)|$ rekonstruierbar.

4.3 Homogene Signale

Eine Funktion f ist homogen von der Ordnung η (η bel. komplexwertig), falls gilt

$$f(\lambda t) = \lambda^\eta f(t).$$

Anders formuliert, f ist eine Eigenfunktion des Dilatationsoperators. Da durch Anwendung des Dilatationsoperators die positive und negative Halbachse nicht vertauscht werden, sind natürliche Beispiele Funktionen, deren Träger eine Halbachse ist,

$$f(t) = t^\eta \text{ für } t \geq 0, \text{ } 0 \text{ sonst.}$$

Durch die Einführung eines Normierungsfaktors kann eine Funktion wie folgt definiert werden

$$u_{\eta+1}^+(t) := \frac{1}{\Gamma(\eta+1)} t^\eta \Theta(t), \quad (29)$$

wobei Θ die Heaviside-Funktion ist. Über die Wavelet-Transformierte erhält man eine Aussage, falls u_η^+ im distributionellen Sinn analysiert wird.

Definition 23 *Es sei $\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\}$. Die durch die Funktionen $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ auf $\mathcal{D}(\Omega)$ erzeugten stetigen linearen Funktionale $(f) : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ heißen reguläre Distributionen, ihre Gesamtheit sei $\mathcal{D}'_r(\Omega)$. Alle anderen nennt man singulär.*

Für $\eta \in \mathbb{C}$ und $\varphi \in \mathcal{D}$ beliebig fest, kann man die Funktion F definieren

$$F(\eta) := (t^\eta \Theta(t))\varphi = \int_0^\infty t^\eta \varphi(t) dt. \quad (30)$$

F ist komplexwertig. Für $\Re \eta > -1$ ist $t^\eta \in L_{loc}^1$ und F ist nach η differenzierbar (vgl. [10]), d.h. für $\Re \eta > -1$ ist F holomorph. Die rechte Seite von (30) kann zu

$$\int_0^1 t^\eta (\varphi(t) - \varphi(0)) dt + \int_1^\infty t^\eta \varphi(t) dt + \frac{\varphi(0)}{\eta+1} \quad (31)$$

umformuliert werden. Somit wird (31) $\forall \eta \neq -1 \wedge \Re \eta > -2$ nach η differenzierbar, denn mit $\varphi(t) = \varphi(0) + t\psi(t)$ enthält der Integrand im ersten Integral von (31) einen zusätzlichen Faktor t . D.h. (31) ist für $\Re \eta > -2$ und $\eta \neq -1$ holomorph und

stimmt für $\Re \eta > -1$ mit F überein. Man hat also eine Fortsetzung der analytischen Funktion F in den Streifen $-2 < \Re \eta \leq -1 \wedge \eta \neq -1$. Aus (31) ist ablesbar, daß F in $\eta = -1$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\varphi(0) = \delta(\varphi)$ hat. Weiter kann nach [10] die rechte Seite von (30) in

$$\int_0^1 t^\eta \left(\varphi(t) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\varphi^{(\nu)}(0)}{\nu!} t^\nu \right) dt + \int_1^\infty t^\eta \varphi(t) dt + \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\varphi^{(\nu)}(0)}{\nu! (\nu + \eta + 1)} \quad (32)$$

umgeschrieben werden. Der selbe Fortsetzbarkeitsschluß wie oben führt für $\Re \eta > -k-1$ mit Ausnahme von $-1, -2, \dots, -k$ dazu, daß (32) eine holomorphe Funktion ist, die in der Halbebene $\Re \eta > -1$ mit F übereinstimmt und somit die analytische Fortsetzung ist. In $-m$ ($m = 1, \dots, k$) besitzt F Pole erster Ordnung mit dem Residuum

$$\frac{1}{(m-1)!} \varphi^{(m-1)}(0) = (-1)^{m-1} \frac{1}{(m-1)!} \delta^{(m-1)}(\varphi).$$

Zusammenfassend kann die Hilfsaussage 24 formuliert werden.

Hilfsaussage 24 Sei $\varphi \in \mathcal{D}$ fest gewählt, die für $\eta \in \mathbb{C} \wedge \Re \eta > -1$ definierte Funktion F läßt sich in die ganze η -Ebene mit Ausnahme der Punkte $-m$, $m \in \mathbb{N}$ analytisch fortsetzen. Dort hat sie Pole erster Ordnung mit Residuen

$$(-1)^{m-1} \frac{1}{(m-1)!} \delta^{(m-1)}(\varphi).$$

Die Gammafunktion Γ ist für $\Re \eta > 0$ holomorph (analog F). Vermöge der Funktionalgleichung $\Gamma(\eta+1) = \eta \Gamma(\eta)$ wird Γ in die ganze η -Ebene bis auf die Punkte $-m$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ analytisch fortgesetzt. In den Punkten $-m$ hat Γ Pole erster Ordnung mit den Residuen

$$\frac{(-1)^m}{m!}.$$

D.h. Γ^{-1} ist eine ganze Funktion mit Nullstellen erster Ordnung in $-m$.

Hilfsaussage 25 Die Distribution $1/\Gamma(\eta+1)(t^\eta \Theta(t))$ ist ganz in η . Für $\eta = -m$, $m \in \mathbb{N}$, sind sie auf $\mathcal{D}$ gleich mit $\delta^{(m-1)}$. D.h. für $\varphi \in \mathcal{D}$ ist $1/\Gamma(\eta+1)F(\eta)$ ganz in η und die Werte in $-m$ sind $(-1)^{m-1} \varphi^{(m-1)}(0)$.

Beweis: Die Funktion wird ganz, da Pole von F und Nullstellen von $1/\Gamma(\eta+1)$ gleiche Ordnung haben und an der selben Stelle liegen. Die Werte für $\eta = -m$ sind die Quotienten der Residuen von F und $\Gamma(\eta+1)$. $\square$

Für $\eta \in \mathbb{C}$ und $\eta \neq -m$, $m \in \mathbb{N}$ sei $u_{\eta+1}^+$ eine Distribution auf $\mathcal{D}$

$$u_{\eta+1}^+ = \frac{1}{\Gamma(\eta+1)} (t^\eta \Theta(t)).$$

Aussage 26 Für alle $\eta \in \mathbb{C}$ gilt $\frac{d}{dt} u_{\eta+1}^+ = u_\eta^+$ und für alle $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $u_{-m}^+ = \delta^m$ auf $\mathcal{D}$.

Beweis: Sei $\eta \in \mathbb{R}$. Für $\eta > 0$ ist $\frac{d}{dt}u_{\eta+1}^+ = \frac{\eta}{\Gamma(\eta+1)}(t^\eta \Theta(t))$. Ist $\eta = 0$, so ist $\frac{d}{dt}u_{\eta+1}^+ = \delta$. Für $\eta < 0$, $\eta \neq -m$, $m \in \mathbb{N}$, folgt $\frac{d}{dt}u_{\eta+1}^+ = \frac{\eta}{\Gamma(\eta+1)}\mathcal{P}t^{\eta-1}\Theta(t)$ (Ist $\Omega \subset \mathbb{R}$ und $0 \notin \mathbb{R}$, so ist $\mathcal{P}t^\zeta \Theta(t) = (t^\zeta \Theta(t))$ auf $\mathcal{D}(\Omega)$. D.h. die Pseudofunktion ist gleich der reg. Distribution und somit ist die Pseudofunktion als Fortsetzung der reg. Distribution in 0 interpretierbar.). Unter Ausnutzung von $\Gamma(\eta+1) = \eta\Gamma(\eta)$ kann die erste Behauptung gefolgert werden: Für $\varphi \in \mathcal{D}$ folgt $(\frac{d}{dt}u_{\eta+1}^+)\varphi = (u_\eta^+)\varphi = \frac{1}{\Gamma(\eta)}F(\eta-1)$. Die rechte Seite ist nach Hilfsaussage 25 ganz in η . Somit kann $(\frac{d}{dt}u_{\eta+1}^+)$ in $\eta = -m$ holomorph fortgesetzt werden. D.h. die Ableitungsformel gilt für $\eta \in \mathbb{C}$. Mit Hilfsaussage 25 gilt also $\lim_{\eta \rightarrow -m} (u_\eta^+)\varphi = (-1)^m \varphi^{(m)}(0) = \delta^{(m)}\varphi$. Es ist also $u_{-m}^+ = \delta^{(m)}$ auf $\mathcal{D}$. $\square$

Mit Aussage 26 folgt

$$\mathcal{W}_\psi u_{-m}^+(a, b) = (-1)^m S_{1/a} \psi^{(m)}(-b),$$

was allerdings $\psi \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R})$ voraussetzt. Bezüglich einer fest gewählten Skale a ist somit die gesamte Signalinformation gegeben. Sei nun $\psi = \psi_n^{Cau}$, dann ist

$$\mathcal{W}_{\psi_n^{Cau}} u_{-m}^+(1, b) = (-1)^m \psi_{m+n}^{Cau}(-b),$$

d.h. $\mathcal{W}_\diamond u_{-m}^+$ wird zum Ableitungsoperator. Wählt man aus dem Definitionsbereich von $\mathcal{W}_{\psi_n^{Cau}} u_{-m}^+$ als Argumente (x, x) , so ist $\mathcal{W}_{\psi_n^{Cau}} u_{-m}^+(x, x) = c|x|^{-1/2}$ mit $c \in \mathbb{C}$.

4.4 Lokal symmetrische und anti-symmetrische Signale

Die Aussagen 27 und 28 geben einen Zusammenhang zwischen der Bauart des Signals und der zugehörigen komplexen Phase der Wavelet-Transformation an. Die dabei gemachte Kompaktheitsannahme bzgl. ψ ist allerdings selten erfüllbar, zeigt aber, daß schnellabfallende Wavelets bei der Phasenanalyse erforderlich sind.

Aussage 27 *Sei f reell, stetig und habe lokale Symmetrieeigenschaften in einer Umgebung von b . ψ sei hermitisch und kompakt getragen. Ist a hinreichend klein gewählt, dann ist die Phase von $\mathcal{W}_\psi f$ entweder 0 oder π .*

Beweis: Sei f stetig. Lokal symmetrisch bedeutet

$$\exists b \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall |h| < \varepsilon : f(b+h) = f(b-h).$$

D.h., f besitzt um b ein Extremum. ψ sei hermitisch und kompakt getragen auf $(-\Delta/2, \Delta/2)$. Dann ist zunächst

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) = \sqrt{a} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} f(at+b) \overline{\psi(t)} dt.$$

Gilt nun für a , daß $|a\Delta/2| < \varepsilon$, so ist $f(b+at) = f(b-at)$. Es gilt nun mit $\psi(t) + \overline{\psi(t)} = 2\Re\psi(t)$ folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_\psi f(a, b) &= \sqrt{a} \left(\int_{-\Delta/2}^0 f(b+at) \overline{\psi(t)} dt + \int_0^{\Delta/2} f(b+at) \overline{\psi(t)} dt \right) \\
&= \sqrt{a} \left(- \int_{\Delta/2}^0 f(b-at) \overline{\psi(-t)} dt + \int_0^{\Delta/2} f(b+at) \overline{\psi(t)} dt \right) \\
&= \sqrt{a} \int_0^{\Delta/2} (f(b-at)\psi(t) + f(b+at)\overline{\psi(t)}) dt \\
&= \sqrt{a} \int_0^{\Delta/2} f(b+at)(\psi(t) + \overline{\psi(t)}) dt = \sqrt{a} \int_0^{\Delta/2} f(b+at) 2\Re\psi(t) dt.
\end{aligned}$$

Für $a \rightarrow 0$, d.h. bei Einhaltung von $|a\Delta/2| < \varepsilon$, kann gefolgert werden, daß $\mathcal{W}_\psi f$ reell ist. $\square$

Aussage 28 Sei f reell, stetig und habe lokale Anti-Symmetrieeigenschaften in einer Umgebung von b . ψ sei hermitisch und kompakt getragen. Ist a hinreichend klein gewählt, dann ist die Phase von $\mathcal{W}_\psi f$ entweder $\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$.

Beweis: Es sei f stetig und anti-symmetrisch. D.h. b sei nun ein Punkt, in dem f' ein lokales Extremum annimmt:

$$\exists b \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall |h| < \varepsilon : f(b+h) = 2f(b) - f(b-h).$$

Man erhält mit $\overline{\psi(t)} - \psi(t) = -2i\Im\psi(t)$ die Gleichungskette

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_\psi f(a, b) &= \sqrt{a} \left(- \int_{\Delta/2}^0 f(b-at) \overline{\psi(-t)} dt + \int_0^{\Delta/2} f(b+at) \overline{\psi(t)} dt \right) \\
&= \sqrt{a} \left(\int_0^{\Delta/2} f(b-at)\psi(t) dt + \int_0^{\Delta/2} f(b+at)\overline{\psi(t)} dt \right) \\
&= \sqrt{a} \left(\int_0^{\Delta/2} (2f(b) - f(b+at))\psi(t) dt + \int_0^{\Delta/2} f(b+at)\overline{\psi(t)} dt \right) \\
&= \sqrt{a} \left(\int_0^{\Delta/2} f(b+at)(\overline{\psi(t)} - \psi(t)) dt + 2f(b) \int_0^{\Delta/2} \psi(t) dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{a} \left(-2i \int_0^{\Delta/2} f(b+at) \Im \psi(t) dt + 2i f(b) \int_0^{\Delta/2} \Im \psi(t) dt \right) \\
&= 2i\sqrt{a} \int_0^{\infty} (f(b) - f(b+at)) \Im \psi(t) dt,
\end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. $\square$

4.5 Stetig-differenzierbare Signale

Phasen ungleich von $0, \pi/2, -\pi/2, \pi$ fanden in Abschnitt 4.4 keine Berücksichtigung. Deshalb wird nun vorausgesetzt, daß ψ komplex sei, kompakt getragen, hermitisch (d.h. $\bar{\psi}(t) = \psi(-t)$) und m mal stetig differenzierbar ($m \geq 2$). f sei reell und zunächst 2 mal stetig differenzierbar. Es ist

$$|\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2 = \mathcal{W}_\psi f(a, b) \overline{\mathcal{W}_\psi f(a, b)}.$$

Die Ableitung bzgl. der Zeitvariable b ist

$$\frac{\partial |\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2}{\partial b} = \frac{\partial \mathcal{W}_\psi f(a, b)}{\partial b} \overline{\mathcal{W}_\psi f(a, b)} + \frac{\partial \overline{\mathcal{W}_\psi f(a, b)}}{\partial b} \mathcal{W}_\psi f(a, b).$$

Sei allgemein $g(x, y)$ eine komplexwertige Funktion, dann ist $|g|^2 = g\bar{g}$ und außerdem $g = \Re g + i\Im g = u + iv$. Es ist $g_y \bar{g} = (u_y + iv_y)(u - iv) = u_y u + v_y v + i(v_y u - u_y v)$ und $\bar{g}_y g = (u_y - iv_y)(u + iv) = u_y u + v_y v - i(v_y u - u_y v)$. D.h. $g_y \bar{g} + \bar{g}_y g = 2\Re(g_y \bar{g}) = 2\Re(\bar{g}_y g)$. Somit folgt zunächst

$$\frac{\partial |\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2}{\partial b} = 2\Re \left(\frac{\partial \mathcal{W}_\psi f(a, b)}{\partial b} \overline{\mathcal{W}_\psi f(a, b)} \right). \quad (33)$$

Aufgrund der gemachten Annahmen kann die partielle Ableitung berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{W}_\psi f(a, b)}{\partial b} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int f(t) \frac{\partial \overline{\psi((t-b)/a)}}{\partial b} dt \\
&= \frac{-1}{\sqrt{aa}} \int f(t) \overline{\psi'((t-b)/a)} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int f'(t) \overline{\psi((t-b)/a)} dt.
\end{aligned}$$

Da $\frac{f(b+at)-f(b)}{at} \approx f'(b)$, folgt durch Substitution und der Approximation der Ableitung von f :

$$\begin{aligned}
\int f(t) \overline{\psi((t-b)/a)} dt &= a \int f(b+at) \overline{\psi(t)} dt \\
&\approx a \int (f(b) + at f'(b)) \overline{\psi(t)} dt \\
&= \underbrace{af(b) \int \overline{\psi(t)} dt}_{=0} + a^2 f'(b) \int t \overline{\psi(t)} dt.
\end{aligned}$$

Da die 2. Ableitung von f existiert und stetig ist, folgt analog

$$\int f'(t) \overline{\psi((t-b)/a)} dt \approx a^2 f''(b) \int t \overline{\psi(t)} dt.$$

Daraus ergibt sich zusammen mit (33)

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2}{\partial b} &\approx 2\Re \left(\frac{1}{\sqrt{a}} a^2 f''(b) \int t \overline{\psi(t)} dt \cdot \overline{\frac{1}{\sqrt{a}} a^2 f'(b) \int t \overline{\psi(t)} dt} \right) \\ &= 2\Re \left(a^3 f'(b) f''(b) \left| \int t \overline{\psi(t)} dt \right|^2 \right) \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt Aussage 29:

Aussage 29 *Sei f reell und 2 mal stetig differenzierbar. ψ sei hermitisch, kompakt getragen, wenigstens 2 mal stetig differenzierbar und m_i das i -te Moment von ψ . Dann gilt die Approximation*

$$\frac{\partial |\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2}{\partial b} \approx 2a^3 f'(b) f''(b) |m_1|^2. \quad (34)$$

Somit können Beziehungen zwischen den lokalen Extremwerten von $|\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2$ bzgl. b und den lokalen Extremwerten sowie den Wendepunkten von f hergestellt werden. Besitze f nun in b ein Maximum. Dies bedeutet, daß $f'(b) = 0$ und $f''(b) < 0$. Für ein $\varepsilon > 0$ gilt also, $f'(b+\varepsilon) \cdot f''(b+\varepsilon) > 0$ und $f'(b-\varepsilon) \cdot f''(b-\varepsilon) < 0$. Somit hat $|\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2$ in b ein Minimum. Besitze f nun in b ein Minimum. Dann folgt, da $f'(b+\varepsilon) \cdot f''(b+\varepsilon) > 0$ und $f'(b-\varepsilon) \cdot f''(b-\varepsilon) < 0$, daß $|\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2$ ebenfalls in b ein Minimum annimmt. In dem Fall, daß f in b einen Wendepunkt der Art $f''(b) = 0$, $f'(b) > 0$ besitzt, ergibt sich für $|\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2$ in b ein Maximum. Analog für einen Wendepunkt der Art $f''(b) = 0$, $f'(b) < 0$. Es kann also vom lokalen Extremwertverhalten von $|\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2$ auf f in einfache Art und Weise geschlossen werden.

Die gewonnenen Aussagen über die Wavelet-Transformation können durch härtere Forderungen an das Signal f weiter entwickelt werden. Im Hintergrund ist die Idee, möglichst viele Phasen zu berücksichtigen. Setzt man nun voraus, daß f m -mal stetig differenzierbar ist, so lassen sich Peaks und Wendepunkte gut lokalisieren.

Aussage 30 *Seien f (reell) und ψ m -mal stetig differenzierbar. m_i sei das i -te Moment von ψ . Dann existiert die Approximation*

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) \approx \alpha + i\beta, \quad (35)$$

$$\text{mit } \alpha = -\sqrt{a} \sum_{n \text{ ger.}} a^n \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \widehat{\psi}^{(n)}(0) \text{ und } \beta = -\sqrt{a} \sum_{n \text{ unger.}} a^n \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \widehat{\psi}^{(n)}(0).$$

Beweis: Die Reihenentwicklung von f um b ist:

$$f(t) = \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (t-b)^n + \eta(t)(t-b)^m,$$

wobei $\eta(t) \rightarrow 0$, falls $t \rightarrow b$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\psi f(a, b) &= \sqrt{a} \int \left(\sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (at)^n + \eta(at+b)(at)^m \right) \overline{\psi(t)} dt \\ &= \sqrt{a} \sum_{n=1}^m \frac{f^{(n)}(b)}{n!} a^n \overline{m_n} + \sqrt{a} \int \eta(at+b)(at)^m \overline{\psi(t)} dt. \end{aligned}$$

Mit $\widehat{\psi}^{(n)}(0) = (i)^n \int x^n \overline{\psi(x)} dx = (i)^n \overline{m_n}$ erhält man die Approximation:

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) \approx \sqrt{a} \sum_{n=1}^m (-ia)^n \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \widehat{\psi}^{(n)}(0) = \alpha + i\beta, \quad \text{falls}$$

$$\alpha := -\sqrt{a} \sum_{n \text{ ger.}} a^n \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \widehat{\psi}^{(n)}(0) \text{ und } \beta := -\sqrt{a} \sum_{n \text{ unger.}} a^n \frac{f^{(n)}(b)}{n!} \widehat{\psi}^{(n)}(0). \quad \square$$

Entwickelt man beispielsweise bis $m = 2$, so ist

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) \approx C_1(a)f''(b) + iC_2(a)f'(b).$$

Mit $\varrho^2(a, b) = (C_1(a)f''(b))^2 + (C_2(a)f'(b))^2$ und $\gamma(a, b) = \arctan \frac{C_2(a)f'(b)}{C_1(a)f''(b)}$ läßt sich schreiben:

$$C_1(a)f''(b) + iC_2(a)f'(b) = \varrho^2 e^{i\gamma},$$

wobei $C_1(a)f''(b) \neq 0$ oder nur, wenn $C_2(a)f'(b) = 0$. Mit den Voraussetzungen der Aussage 30 für $m = 2$ kann somit anhand der Phase das Krümmungsverhalten des Signals f in einer Umgebung von b studiert werden.

Häufig ist man am Verhalten der m -ten klassischen Ableitung des Signals f interessiert. Diese Information ist erhältlich, falls das Wavelet ψ von m -ter Ordnung gewählt werden kann. Geeignet dafür ist die Menge der Cauchy-Wavelets.

Hilfsaussage 31 Für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ hat das Cauchy-Wavelet ψ_n^{Cau} die Ordnung n . Für $k \leq n$ und $\omega \geq 0$ hat die k -te Ableitung der Fourier-Transformierten die Gestalt

$$\widehat{\psi_n^{Cau}}^{(k)}(\omega) = \frac{e^{-\omega}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=0}^k \left[\frac{n!}{(n-m)!} \binom{k}{m} \omega^{n-m} (-1)^{m+k} \right]. \quad (36)$$

Für $k = n$ gilt

$$\widehat{\psi_n^{Cau}}^{(n)}(0) = \sqrt{2\pi} \psi_n^{Cau}(0). \quad (37)$$

Beweis: Zuerst soll die zweite Aussage durch einen Induktionsschluß bewiesen werden. D.h. zu zeigen ist die Gültigkeit von (36). Die Fourier-Transformierte von ψ_n^{Cau} ist $1/\sqrt{2\pi}\omega^n e^{-\omega}\Theta(\omega)$. Sei nun $l = 1$. Dann ergibt sich für (36)

$$\widehat{\psi_n^{Cau}}^{(1)}(\omega) = -\frac{e^{-\omega}}{\sqrt{2\pi}}(\omega^n - n\omega^{n-1}),$$

was mit der ersten Ableitung der Fourier-Transformierten übereinstimmt. Angenommen (36) gilt für ein festes $k = l$

$$\sqrt{2\pi} \cdot \widehat{\psi_n^{Cau}}^{(l)}(\omega) = (-1)^l e^{-\omega} \sum_{m=0}^l \left[\frac{n!}{(n-m)!} \binom{l}{m} \omega^{n-m} (-1)^m \right].$$

Der Übergang von $l \rightarrow l+1$ erfolgt durch Bilden von $\sqrt{2\pi} \cdot \frac{d}{d\omega} \widehat{\psi_n^{Cau}}^{(l)}(\omega) =: A$

$$\begin{aligned} A &= (-1)^{l+1} e^{-\omega} \sum_{m=0}^l \left[\frac{n!}{(n-m)!} \binom{l}{m} \omega^{n-m} (-1)^m \right] + \\ &\quad (-1)^l e^{-\omega} \sum_{m=0}^l \left[\frac{n!}{(n-m)!} \binom{l}{m} (n-m) \omega^{n-(m+1)} (-1)^m \right] \\ &= (-1)^{l+1} e^{-\omega} \left\{ \sum_{m=0}^l \left[\frac{n!}{(n-m)!} \binom{l}{m} \omega^{n-m} (-1)^m \right] + \right. \\ &\quad \left. \sum_{m=1}^{l+1} \left[\frac{n!}{(n-(m-1))!} \binom{l}{m-1} (n-(m-1)) \omega^{n-m} (-1)^m \right] \right\} \\ &= (-1)^{l+1} e^{-\omega} \left\{ \sum_{m=0}^l \left[\frac{n!}{(n-m)!} \binom{l}{m} \omega^{n-m} (-1)^m \right] + \right. \\ &\quad \left. \sum_{m=1}^{l+1} \left[\frac{n!}{(n-m)!} \binom{l}{m-1} \omega^{n-m} (-1)^m \right] \right\} \\ &= (-1)^{l+1} e^{-\omega} \left\{ \sum_{m=1}^l \frac{n!}{(n-m)!} \omega^{n-m} (-1)^m \left[\binom{l}{m} + \binom{l}{m-1} \right] + \right. \\ &\quad \left. \omega^n + \frac{n!}{(n-(l+1))!} \omega^{n-(l+1)} (-1)^{l+1} \right\} \\ &= (-1)^{l+1} e^{-\omega} \sum_{m=0}^{l+1} \left[\frac{n!}{(n-m)!} \binom{l+1}{m} \omega^{n-m} (-1)^m \right]. \end{aligned}$$

Damit ist (36) bewiesen. Für alle $k < n$ gilt nach (36) $\widehat{\psi_n^{Cau}}^{(k)}(0) = 0$, da ω mit positiver Potenz in der Summe enthalten ist. Sei $k = n$, dann folgt

$$\widehat{\psi_n^{Cau}}^n(0) = \frac{(-1)^n e^0}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=0}^n \left[\frac{n!}{(n-m)!} \binom{n}{m} 0^{n-m} (-1)^m \right] = \frac{n!}{\sqrt{2\pi}} < \infty,$$

womit die erste Aussage nachgewiesen ist. Die dritte Aussage folgt durch

$$\psi_n^{Cau}(0) = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi},$$

womit alle Behauptungen von Hilfsaussage 31 gezeigt sind. $\square$

Aussage 32 [Spezialfall der Aussage 30] *Sei f reellwertig und m -mal stetig differenzierbar und sei das analysierende Wavelet ψ_m^{Cau} . Dann gilt die Approximation*

$$\mathcal{W}_{\psi_m^{Cau}} f(a, b) \approx \frac{(-i)^m}{\sqrt{2\pi}} \cdot a^{m+1/2} \cdot f^{(m)}(b).$$

Beweis: Wegen Aussage 30, 31 und der Reellwertigkeit von $\widehat{\psi_m^{Cau}}$ hat man

$$\mathcal{W}_{\psi_m^{Cau}} f(a, b) \approx \sqrt{a}(-ia)^m \frac{f^{(m)}(b)}{m!} \widehat{\psi_m^{Cau}}(0) = \frac{(-i)^m}{\sqrt{2\pi}} \cdot a^{m+1/2} \cdot f^{(m)}(b).$$

(Für gerade m ist die Phase approximativ 0 oder π und für ungerade m ist sie $\pi/2$ oder $-\pi/2$.) $\square$

Die Bedeutung zeigt sich darin, daß mit der Wahl der Ordnung des Cauchy-Wavelets und entsprechender Annahme über die Existenz von Ableitungen, genau die Ableitung approximiert wird, die der Ordnung entspricht.

5 Numerische Realisierung

Alle bisherigen Betrachtungen wurden für den kontinuierlichen Fall durchgeführt. Reale Signale liegen in der Regel diskret vor. So erweist es sich als notwendig, eine diskrete Approximation an die Kontinuierliche Wavelet-Transformation zu entwickeln, ohne dabei jedoch die Theorie der 'klassischen' Diskreten Wavelet-Transformation zu berühren.

5.1 Der Reproduktions-Kern

Die Transformation (2) ist eine Korrespondenz zwischen einer Funktion $f(t)$ einer Variablen und einer Funktion $\mathcal{W}_\psi f(a, b)$ zweier Variablen. Gesucht ist zunächst eine geeignete Darstellung der Wavelet-Transformation. Nach (6) hat man für $\mathcal{W}_\psi f(a, b)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{c_\psi \sqrt{a'}} \psi \left(\frac{t-b'}{a'} \right) \mathcal{W}_\psi f(a', b') da' db' / a'^2 \right] \overline{\psi \left(\frac{t-b}{a} \right)} dt \\ &= \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \left[\frac{1}{\sqrt{aa'}} \int_{\mathbb{R}} \psi \left(\frac{t-b'}{a'} \right) \overline{\psi \left(\frac{t-b}{a} \right)} dt \int_{\mathbb{R}} f(s) \overline{\psi \left(\frac{s-b'}{a'} \right)} ds \right] da' db' / a'^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} p_\psi(a, b, a', b') \langle f, \psi_{a', b'} \rangle da' db' / a'^2, \end{aligned}$$

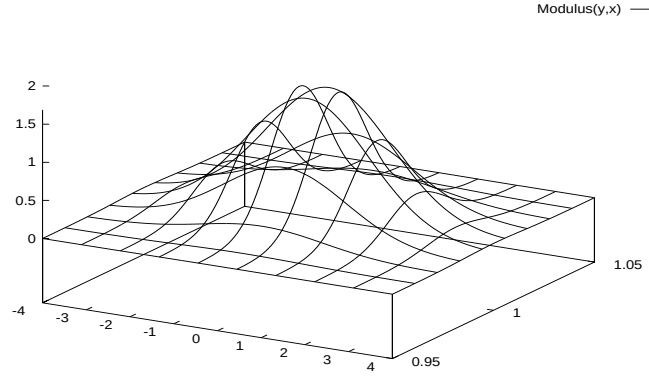


Abbildung 5: Erster Summand von p_ψ bzgl. des Punktes $(a', b') = (1, 0)$ und des Morlet-Gauß-Wavelets gemäß (24)

mit $p_\psi(a, b, a', b') = \langle \psi_{a,b}, \psi_{a',b'} \rangle / c_\psi$. Nach den Rechenregeln der Fourier-Transformation ergibt sich

$$\mathcal{F}(T_{(b-b')/a} S_{a'/a} \psi)(\omega) = \sqrt{a/a'} e^{-i\omega(b-b')/a} \widehat{\psi}(a\omega/a'). \quad (38)$$

Somit existiert nach (38) die Darstellung

$$p_\psi(a, b, a', b') = \frac{1}{c_\psi} \sqrt{\frac{a}{a'}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(\omega) E_{(b-b')/a'} \overline{\widehat{\psi}(a\omega/a')} d\omega. \quad (39)$$

Es zeigt sich also, daß man die Wavelet-Transformationen vermöge p_ψ charakterisieren kann. Dies ist bedeutend, denn nicht jede Funktion über $\mathbb{H}$ ist eine Wavelet-Transformation.

Definition 33 Die Funktion p_ψ gemäß (39) heißt *Reproduktions-Kern* für den Bildraum von $\mathcal{W}_\psi$.

Maximal wird $|p_\psi|$, falls $(a, b) = (a', b')$. D.h., für einen fest gewählten Punkt $(a', b') \in \mathbb{H}$ lokalisiert p_ψ um (a', b') . Heuristisch nachvollziehbar ist, daß sich gute Lokalisierungseigenschaften von ψ auf die Kernfunktion p_ψ übertragen. Sei ψ gemäß (24) gewählt. Durch die Berechnung des Modulus ist man in der Lage, das Abfallverhalten der Kernfunktion p_ψ zu beschreiben.

(24) läßt sich in drei Summanden ψ^1 , ψ^2 und ψ^3 zerlegen, wobei mit $c_1^l, c_2^l \in \mathbb{R}$ gilt $\psi^l(x) = c_1^l e^{ict} e^{-c_2^l t^2/2}$. Gesucht ist eine Darstellung in Bezug eines festen Punktes, etwa $(a', b') = (1, 0) \in \mathbb{H}$. Für $p_\psi(a, b, 1, 0)$ gibt es eine Modulusfunktion $M(a, b)$ und eine Winkelfunktion $\varphi(a, b)$, so daß mit $\langle \psi_{a,b}^l, \psi_{1,0}^j \rangle = d_{j+3(l-1)}$ gilt

$$M(a, b) e^{i\varphi(a,b)} = \langle \psi_{a,b}, \psi_{1,0} \rangle = \left\langle \sum_{l=1}^3 \psi_{a,b}^l, \sum_{j=1}^3 \psi_{1,0}^j \right\rangle = \sum_{k=1}^9 d_k. \quad (40)$$

Für jedes k gilt $d_k = m_k e^{i\varphi_k}$. Die Exponentialfunktion ist monoton, deshalb kann (40) geschrieben werden als

$$e^{Me^{i\varphi}} = e^{\sum_{k=1}^9 m_k e^{i\varphi_k}} = \prod_{k=1}^9 e^{m_k e^{i\varphi_k}}. \quad (41)$$

Mit $m_k e^{i\varphi_k} = m_k(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$ und $e^{m_k \cos \varphi_k} = \overline{m_k} \in \mathbb{R}$ ist zunächst

$$(41) = \prod_{k=1}^9 \overline{m_k} e^{im_k \sin \varphi_k}.$$

Sei $\overline{M} = \prod_{k=1}^9 \overline{m_k}$ und $\gamma = \sum_{k=1}^9 m_k \sin \varphi_k$, dann folgt

$$Me^{i\varphi} = \ln \overline{M} + i\gamma.$$

Substituiert man $\overline{M}$ und γ , so hat man Modulus und Phase von p_ψ allgemein beschrieben

$$M = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^9 m_k \cos \varphi_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^9 m_k \sin \varphi_k\right)^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan \left(\frac{\sum_{k=1}^9 m_k \sin \varphi_k}{\sum_{k=1}^9 m_k \cos \varphi_k} \right).$$

Für jedes $k = 1, \dots, 9$ muß m_k und φ_k bestimmt werden. Hier soll nur die Berechnung für $k = 1$ durchgeführt werden. Somit ist das Skalarprodukt $\langle \psi_{a,b}^1, \psi_{1,0}^1 \rangle$ für $\psi^1(x) = e^{icx} e^{-x^2/2}$ auszuwerten. Mit

$$e^{(-icb/a - b^2/(2a^2)) + t^2(-1/2 - 1/(2a^2)) + t(b/a + ic(1/a - 1))} = e^{t^2 d + te + f}$$

und dem Ansatz $t^2 d + te + f = -(tA - B)^2 + C$ ergibt sich

$$A = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{\sqrt{2}a}, \quad B = \frac{b/a + ic(1 - a)}{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + 1}}, \quad C = -\frac{b^2 + c^2(1 - a)^2}{2(a^2 + 1)} - i\frac{cb(1 + a)}{a^2 + 1}.$$

Mit der durchgeführten Substitution vereinfacht sich das Skalarprodukt zu

$$\langle \psi_{a,b}^1, \psi_{1,0}^1 \rangle = \frac{\sqrt{2\pi a}}{\sqrt{a^2 + 1}} e^C.$$

Es ist somit

$$m_1 = \frac{\sqrt{2\pi a}}{\sqrt{a^2 + 1}} e^{-\frac{b^2 + c^2(1-a)^2}{2(a^2 + 1)}} \quad \text{und} \quad \varphi_1 = -\frac{cb(1 + a)}{a^2 + 1}.$$

Sei a fest gewählt, dann gilt für das Landau-Symbol o , ein $\varepsilon > 0$ und $b \rightarrow \infty$

$$p_\psi(a, b, 1, 0) = o\left(e^{-b(\frac{b}{2(a^2 + 1)} + \varepsilon)}\right).$$

Mit festem b folgt für $a \rightarrow \infty$ bzw. $a \rightarrow 0$

$$p_\psi(a, b, 1, 0) = o\left(a^{-(\frac{1-\varepsilon}{2})}\right) \quad \text{bzw.} \quad p_\psi(a, b, 1, 0) = o\left(a^{-(\frac{1+\varepsilon}{2})}\right),$$

was in Abbildung 5 gut nachvollziehbar ist.

5.2 Lokale Approximation von $\mathcal{W}_\psi f$

Nachdem die lokale Approximationseigenschaft von p_ψ am Beispiel eines Morlet-Gauß-Wavelets festgestellt wurde, soll nun unter Ausnutzung des Reproduktions-Kernes eine lokale Approximationsformel entwickelt werden, die unter Ausnutzung bekannter diskreter Transformationswerte die Wavelet-Transformation interpoliert.

Seien n Punkte $P_1 = (a_1, b_1), \dots, P_n = (a_n, b_n)$ aus der Halbebene $\mathbb{H}$ so gewählt, daß die Determinante von $A = (A_{ij}) = (p_\psi(a_j, b_j, a_i, b_i))$ ungleich Null ist. Dies impliziert die lineare Unabhängigkeit der ψ_{a_i, b_i} und wegen $p_\psi = \overline{p_\psi}$ folgt, daß A hermitisch ($A = \bar{A}^T = A^H$) und eine positiv definite Gramsche Matrix ist. Die Punkte P_i bilden das Gitter τ . Angenommen das analysierende Wavelet sowie die Werte

$$W_i = \mathcal{W}_\psi f(a_i, b_i), \quad i = 1, \dots, n$$

seien gegeben. Auf einer geeigneten kompakten Untermenge der Argumente $(a, b) \in \mathbb{H}$ soll $\mathcal{W}_\psi f(a, b)$ durch eine endliche Linearkombination der Funktionen

$$e_i(a, b) = p_\psi(a, b, a_i, b_i)$$

approximiert werden

$$\mathcal{W}_\psi^{app} f(a, b) = \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i(a, b), \quad (42)$$

mit der Bedingung $W_i = \mathcal{W}_\psi^{app} f(a_i, b_i)$. Aufgrund der Lokalisierungseigenschaft von p_ψ dürfen die Punkte P_i nicht zu weit voneinander entfernt gewählt werden. Befindet sich $P = (a, b)$ in der konvexen Hülle der gewählten Punkte P_i , so kann (42) eine ausgezeichnete Approximation an $\mathcal{W}_\psi f(a, b)$ darstellen. Die Berechnung der γ_i ist einfach. Nach (42) kann folgende Gleichung notiert werden

$$\begin{aligned} W_j = \mathcal{W}_\psi^{app} f(a_j, b_j) &= \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i(a_j, b_j) = \sum_{i=1}^n \gamma_i p_\psi(a_j, b_j, a_i, b_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma_i A_{ij}. \end{aligned}$$

Es sei nun $B = A^{-1}$, dann ist

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^n W_j B_{ji}.$$

Zusammen mit (42) erhält man die Approximationsformel

$$\mathcal{W}_\psi^{app} f(a, b) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_j B_{ji} e_i(a, b). \quad (43)$$

Da (43) nur lokal gilt, das Signal f aber für verschiedene Skalen- und Zeitbereiche analysiert werden soll, muß (43) noch in Abhängigkeit einer Gitteränderung $\tau_k \rightarrow \tau_{k+1}$ betrachtet werden.

Aussage 34 (Kovarianz) *Die Matrix A ist invariant bezüglich der Transformationsfamilien Translation und Reskalierung.*

Beweis: Sei $P_1, \dots, P_n$ ein fest gewähltes Gitter τ . Das um t_0 verschobene Gitter $\tilde{\tau}$ sei $\tilde{P}_1 = (a_1, b_1 + t_0), \dots, \tilde{P}_n = (a_n, b_n + t_0)$. Mit der Substitution $t = x - t_0$ gilt

$$\begin{aligned} p_\psi(a_j, b_j + t_0, a_i, b_i + t_0) &= 1/c_\psi \langle \psi_{a_j, b_j + t_0}, \psi_{a_i, b_i + t_0} \rangle = 1/c_\psi \langle \psi_{a_j, b_j}, \psi_{a_i, b_i} \rangle \\ &= p_\psi(a_j, b_j, a_i, b_i). \end{aligned}$$

Sei $\tilde{\tau}$ das mit $\lambda > 0$ reskalierte Gitter $\tilde{P}_1 = (\lambda a_1, \lambda b_1), \dots, \tilde{P}_n = (\lambda a_n, \lambda b_n)$. Mit der Substitution $t = x/\lambda$ hat man

$$\begin{aligned} p_\psi(\lambda a_j, \lambda b_j, \lambda a_i, \lambda b_i) &= 1/c_\psi \langle \psi_{\lambda a_j, \lambda b_j}, \psi_{\lambda a_i, \lambda b_i} \rangle = 1/c_\psi \langle \psi_{a_j, b_j}, \psi_{a_i, b_i} \rangle \\ &= p_\psi(a_j, b_j, a_i, b_i). \end{aligned}$$

D.h., durch Translation um ein t_0 und Reskalierung um einen Faktor $\lambda > 0$ wird ein zu τ kongruentes Gitter $\tilde{\tau}$ generiert. $\square$

Die Aussage 34 impliziert, daß die Matrix A für alle nötigen τ_k nur einmal berechnet und invertiert werden muß.

Man erhält somit die Möglichkeit durch einmalige Inversion einer Matrix und durch Kenntnis der Wavelet-Transformation auf einer Menge von diskreten Punkten, beliebige Zwischenstellen (in $\mathbb{H}$) in der konvexen Hülle dieser Punkte zu interpolieren.

Teil II. Anwendung - Materialklassifikation

In einer gemeinsamen Studie mit dem Institut für Meß- und Senortechnik der TU-Bergakademie Freiberg wurde der Versuch unternommen, durch Analyse des Barkhausenrauschens, ein mathematisches Modell zur Materialklassifizierung zu entwickeln. Nach einigen Erläuterungen über die physikalische Problemstellung steht ein auf die Ergebnisse der Wavelet-Transformation aufbauendes statistisches Klassifikationsmodell im Mittelpunkt der Betrachtungen.

6 Physikalischer Hintergrund

Die zunehmende Automatisierung der Fertigung erfordert ständig neue Meß- und Prüfverfahren, die Informationen über den Produktionsprozeß bzw. über das hergestellte Produkt liefern können. Mit Hilfe von Mikroelektronik, moderner Rechentechnik und mathematischen Verfahren zur Informationsverarbeitung und zur Auswertung stochastischer Signale ist es heute möglich, physikalische Effekte auszunutzen, die bisher nicht oder nur mit hohem Aufwand auswertbar waren. Ein Beispiel ist der Barkhausen-Effekt.

6.1 Grundlagen

Ein Ferromagnetikum besteht in seiner Mikrostruktur aus Weiß'schen Bezirken mit jeweils einheitlicher Magnetisierungsrichtung. Die Richtung dieser Magnetisierungsvektoren ist im magnetischen Zustand nicht statisch verteilt. Die Grenzen zwischen unterschiedlich magnetisierten Weiß'schen Bezirken werden durch schmale Blochwände gebildet, in denen sich die Magnetisierungsrichtung umkehrt. Beim Anlegen eines äußeren Magnetfeldes drehen sich die einzelnen Magnetisierungsvektoren zunehmend in Richtung des Außenfeldes, was mit einer Blochwandwanderung verbunden ist. Nach Erreichen der magnetischen Sättigung liegen alle Magnetisierungsvektoren in gleicher Richtung und die Blochwände verschwinden.

Wird eine ferromagnetische Probe magnetisiert, so zeigt die Hystereseschleife $B = f(H)$ in ihrer Feinstruktur unregelmäßige Stufungen (Abb. 6), die durch die irreversiblen Blochwandbewegungen verursacht werden. Diese Blochwandbewegungen sind mit einer sprungförmigen Änderung des magnetischen Flusses verbunden und lassen sich über eine Meßspule als induzierte Spannungsimpulse, die sogenannten Barkhausen-Impulse, erfassen. Die Auslösung dieser Sprünge kann durch ein äußeres Magnetfeld (magnetischer Barkhausen-Effekt), durch mechanische Beanspruchung

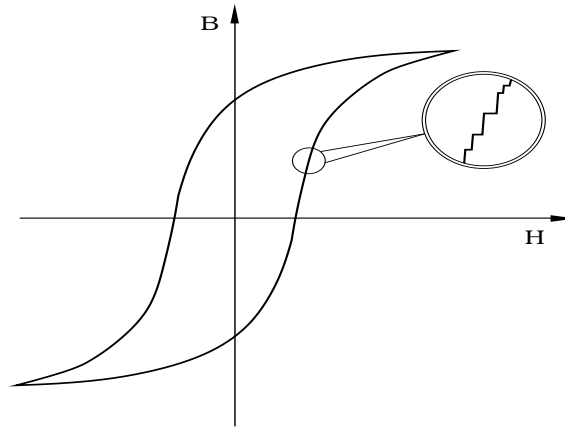


Abbildung 6: Hystereseschleife und ihre Mikrostruktur

des Werkstoffes (mechanischer Barkhausen-Effekt) sowie durch Temperaturänderung erfolgen. Für physikalische Grundlagenuntersuchungen können die einzelnen Spannungsimpulse mit den Methoden der kernphysikalischen Zähltechnik ausgewertet werden. Dabei wird sehr langsam magnetisiert, um Impulsgruppen zu vermeiden. Bei schneller Magnetisierung mit Wechselstrom z.B. 50Hz entsteht in der Meßspule durch statische Überlagerung der Einzelimpulse eine Rauschspannung. Diese weist ein kontinuierliches Frequenzspektrum auf, das sich vom tiefen Niederfrequenzbereich bis in den Hochfrequenzbereich von über 100kHz erstreckt. Die typische Zeitfunktion einer Barkhausenrauschspannung bei zyklischer Ummagnetisierung durch ein Wechselfeld zeigt Abbildung 7. Es entstehen Rauschimpulse, die ihr Maximum in der Nähe des Nulldurchganges des Magnetisierungsfeldes aufweisen.

6.2 Materialabhängigkeit des Barkhausen-Effektes

Durch Grundlagenuntersuchungen (vgl. [2],[17],[18]) ist bekannt, daß sich die Eigenschaften des ferromagnetischen Materials in charakteristischen Änderungen der Rauschspannungen widerspiegeln. Ursache dafür ist, daß die Blochwandbewegungen im Ferromagnetikum durch verschiedene Eigenschaften wie Leitfähigkeit, Einschlüsse, Gefügestruktur, Härte, innere und äußere mechanische Spannungen, Ermüdung u.a. beeinflußt werden. Damit ist die Möglichkeit einer zerstörungsfreien Werkstoffprüfung mittels Barkhausen-Effekt gegeben. Die bekannten Messungen beschränken sich darauf, Informationen über die Materialeigenschaften aus den Effektivwerten, den Hüllkurven, den Spektren oder Amplituden-Verteilungen der Rauschspannung zu gewinnen. Ein Problem dabei ist, daß aus diesen Ergebnissen nur bedingt auf einzelne Einflußgrößen geschlossen werden kann. Aufgabe ist es deshalb, Zusammenhänge zwischen bestimmten Materialeigenschaften und Kenngrößen der Rauschspannung zu finden.

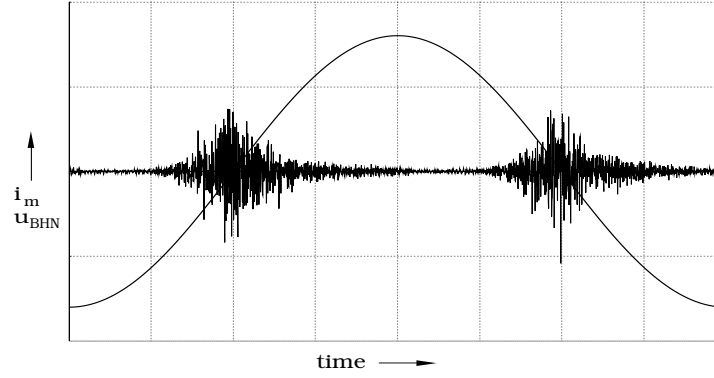


Abbildung 7: Barkhausenrauschspannung u_{BHN} und Magnetisierungsstrom i_m bzgl. der Zeit

6.3 Zielstellung

Bei den Untersuchungen soll geklärt werden, ob mit dem Barkhausen-Rauschen Drähte auf ihre Ziehfähigkeit geprüft werden können. Dazu werden Drahtproben mit gleicher Zusammensetzung (0.085% C, 0.69% SI, 1.84% MN, 0.014% P, 0.005% S, 0.09% CR, 0.99% NI, 0.29% MO, 0.001% AL, 0.02% CU, 0.001% TI) ausgewählt, die durch verschiedene Glühzeiten unterschiedliche Festigkeitswerte (in N/mm^2) aufweisen. Die Festigkeit wurde bisher durch zerstörende Materialprüfung ermittelt. Als Maß für die Ziehfähigkeit der Drähte wird die Einschnürung (in %) genutzt.

7 Ansatz mit der Wavelet-Transformation

Gemäß der Zielstellung soll die Barkhausenrauschspannung u_{BHN} analysiert werden. Ausgangspunkt bilden die beschriebenen Werkstoffe, die aufgrund verschieden langer Glühzeiten unterschiedliche Eigenschaften aufweisen.

Die Materialproben seien nun wie folgt gruppiert: Jeweils 5 von insgesamt 15 Proben gehören zur Gruppe G_1 = "zu kurz geglüht", Gruppe G_2 = "ordnungsgemäß geglüht" und Gruppe G_3 = "ungeglüht". Dieser Bezeichnung entsprechend gilt

$$G_1 = \{u_{BHN}^1, \dots, u_{BHN}^5\}, G_2 = \{u_{BHN}^6, \dots, u_{BHN}^{10}\} \text{ und } G_3 = \{u_{BHN}^{11}, \dots, u_{BHN}^{15}\}.$$

Die experimentell erzeugten Datensätze beinhalten durch die zyklische Ummagnetisierung periodisch wiederkehrende Rauschimpulsgruppen (Abb. 7). Mit der reellen

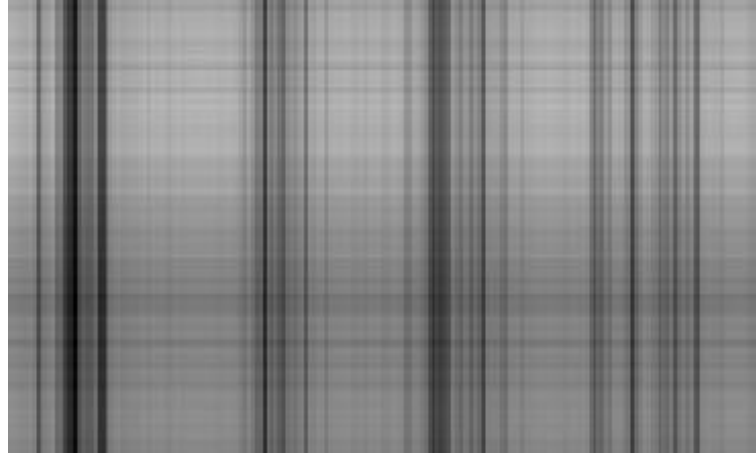


Abbildung 8: Darstellung von $\sqrt{n(a) + m(b)}$ über die Zeit von vier Impulsgruppen

Wavelet-Transformation bzgl. des Haar-Wavelets

$$\psi_{Haar}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, 1/2) \\ -1 & \text{für } x \in [1/2, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

lassen sich Merkmalsunterschiede in jeweils aufeinanderfolgenden Impulsgruppen feststellen, was auf die Periodizität des Magnetisierungsstromes zurückzuführen ist. Betrachtet man die Indikatorfunktionen

$$n(a) = \int |\mathcal{W}_{\psi_{Haar}} u_{BHN}(a, b)|^2 db \text{ und } m(b) = \int |\mathcal{W}_{\psi_{Haar}} u_{BHN}(a, b)|^2 da,$$

so lassen sich die Unterschiede gut visualisieren (Abb. 8). Eine Vermischung ist deshalb zu vermeiden. Um eine mögliche Änderung des Materialverhaltens im Verlaufe der Ummagnetisierungen ebenfalls zu berücksichtigen, soll zufällig nur eine Magnetisierungsperiode (zwei Impulsgruppen) ausgewählt werden, die der komplexen Wavelet-Transformation unterzogen wird. Dabei soll das Cauchy-Wavelet Anwendung finden, um die theoretischen Interpretationsmöglichkeiten gegebenenfalls anwenden zu können. Das Ziel und somit eine Lösung der Fragestellung besteht nun darin, durch die Analyse einer geeigneten endlichen Auswahl von Indikatoren ϑ_n aus den Phasen- bzw. Modulusdarstellungen der Transformationen der einzelnen Datensätze einen Zusammenhang zwischen den materialbeschreibenden Größen (Einschnürung und Festigkeit) und den Indikatoren ϑ_n aufzudecken.

7.1 Numerische Umsetzung

Die Datensätze u_{BHN} können als Funktionen auf dem Gitter der natürlichen Zahlen aufgefaßt werden. (Die Funktionswerte entsprechen der physikalischen Größe Mikro-

Volt.) Somit wird eine Diskretisierung der kontinuierlichen Wavelet-Transformation (2) notwendig. Eine einfache Quadraturformel zur Approximation eines kontinuierlichen Integrals ist die Mittelpunkregel

$$\int_{\mu_1}^{\mu_2} f(t) dt \sim h \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f(\mu_1 + (k + 1/2) \cdot h) , \quad (44)$$

mit $h = (\mu_2 - \mu_1)/N$. Da die analysierenden Wavelets in der Regel nicht kompakt getragen sind, ist es für die numerische Auswertung von (2) günstig, die Intervallgrenzen μ_1 und μ_2 so auszuwählen, daß für eine vorher vorgegebene Toleranz tol gilt

$$\max |f(t)| \int_{\mathbb{R} \setminus [\mu_1, \mu_2]} |\psi(x)| dx < tol. \quad (45)$$

Mit $I = [\mu_1, \mu_2]$ impliziert (45) für jeden Punkt $(a, b) \in \mathbb{H}$

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) - a^{1/2} \cdot tol < a^{1/2} \int_I f(b + at) \psi(t) dt < \mathcal{W}_\psi f(a, b) + a^{1/2} \cdot tol .$$

Die linke Ungleichung folgt aufgrund

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\psi f(a, b) &\leq a^{1/2} \left\{ \int_I f(b + at) \psi(t) dt + \int_{\mathbb{R} \setminus I} |f(b + at)| |\psi(t)| dt \right\} \\ &< a^{1/2} \int_I f(b + at) \psi(t) dt + a^{1/2} \cdot tol . \end{aligned}$$

Wegen $f(b + at) \psi(t) + |\psi(t)| \max |f| \geq 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &\leq a^{1/2} \int_{\mathbb{R} \setminus I} (f(b + at) \psi(t) + |\psi(t)| \max |f|) dt \\ &= \mathcal{W}_\psi f(a, b) - a^{1/2} \int_I f(b + at) \psi(t) dt + a^{1/2} \max |f| \int_{\mathbb{R} \setminus I} |\psi(t)| dt \\ &< \mathcal{W}_\psi f(a, b) - a^{1/2} \int_I f(b + at) \psi(t) dt + a^{1/2} \cdot tol \end{aligned}$$

und es folgt die rechte Ungleichung. D.h. für ein geeignetes tol gilt die Approximation

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) \approx a^{1/2} \int_I f(b + at) \psi(t) dt .$$

Sei $N \in \mathbb{N}$ passend gewählt, so hat man vermöge (44) eine allgemeine Quadraturformel

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) \approx a^{1/2} \cdot h \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f(b + a(\mu_1 + (k + 1/2) \cdot h)) \psi(\mu_1 + (k + 1/2) \cdot h). \quad (46)$$

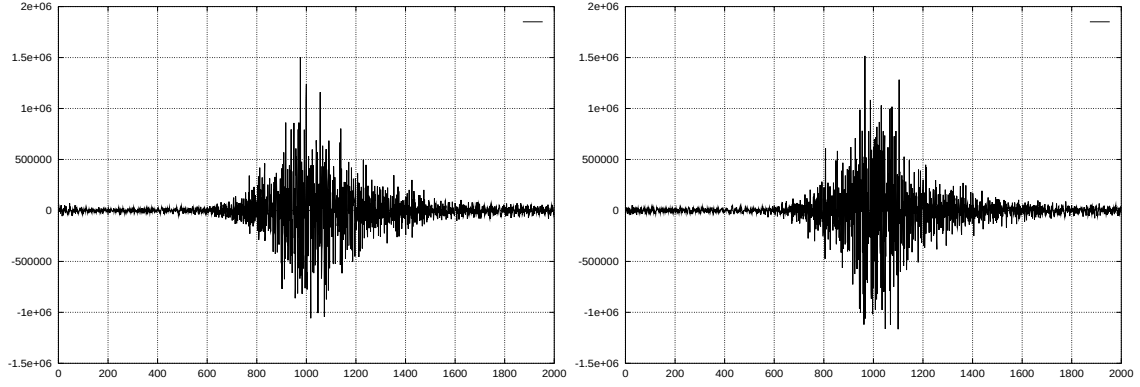


Abbildung 9: Zufällig gewählte Impulsgruppen $\bar{u}^{-1}$ (li.) und $\bar{\bar{u}}^{-1}$ (re.) des Datensatzes u_{BHN}^1

Das Wavelet ψ ist analytisch bekannt und somit als Funktion in einen Algorithmus implementierbar. Sei $u_{BHN} = u|_{\mathbb{N}}$ die Einschränkung von u auf $\mathbb{N}$. Die Funktion u ist aufgrund der Kenntnis von u_{BHN} nur auf $\mathbb{N}$ bekannt, d.h. bei entsprechend großem N müssen die Zwischenstellen bestimmt werden. Dabei notwendige Forderungen an u (Glattheit o.ä.) sind allgemein nicht nachweisbar. Mit dem Ansatz, daß u ein Element des Raumes stückweiser konstanter Funktionen ist, modifiziert sich die Quadraturformel zu

$$\mathcal{W}_\psi u(a, b) \approx a^{1/2} \cdot h \cdot \sum_{k=0}^{N-1} u_{BHN}([b + a(\mu_1 + (k + 1/2) \cdot h)]) \psi(\mu_1 + (k + 1/2) \cdot h) ,$$

wobei $[r] = z$, mit $r \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{Z}$ und $z - 1 < r \leq z$. Man ist nun in der Lage, für die notwendigen Gitter $\tau_k = \{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ die Werte $W_i = \mathcal{W}_\psi u(a_i, b_i)$ zu bestimmen und gemäß Formel (42) die Wavelet-Transformation jeweils lokal für τ_k , entsprechend der Aussage 34, für $k = 0, 1, 2, \dots$ zu approximieren.

Sei nun $\psi = \psi_1^{Cau}$ und u stückweise konstant mit $u_l = u(t_l) = u_{BHN}(t_l)$ für $t_l \in \mathbb{N}$ und $l = 1, \dots, K$. Für u existiert die Darstellung

$$u(t) = \sum_{l=1}^K 1_{[t_{l-1}, t_l]}(t) \cdot u_{BHN}(t_l) . \quad (47)$$

Wegen (15) und (47) ist $\mathcal{W}_{\psi_1^{Cau}} u$ exakt bestimmbar und der entstehende Approximationsfehler in (46) kann vermieden werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\psi_1^{Cau}} u(a, b) &= a^{-1/2} \sum_{l=1}^K u_l \int_{t_{l-1}}^{t_l} \psi_1^{Cau}((t - b)/a) dt \\ &= a^{1/2} \sum_{l=1}^K u_l \int_{b+at_{l-1}}^{b+at_l} \frac{d}{idt} C(t) dt \end{aligned}$$

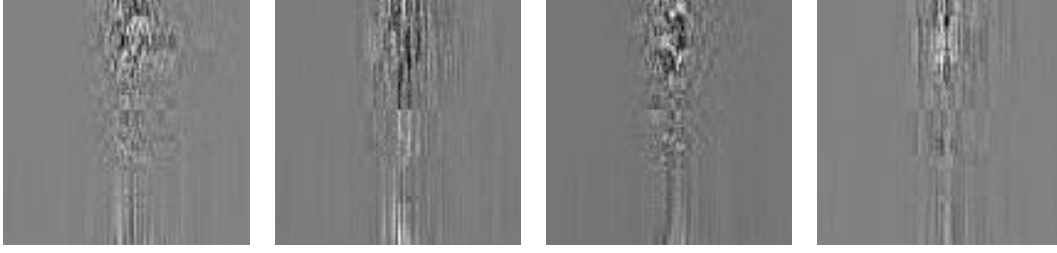


Abbildung 10: Komplexe Wavelet-Transformation auf τ (50×50 Raster): (v.l.n.r.) $\Re \mathcal{W}_{\psi_1^{Cau}} \bar{u}^1$, $\Im \mathcal{W}_{\psi_1^{Cau}} \bar{u}^1$, $\Re \mathcal{W}_{\psi_1^{Cau}} \bar{u}^1$, $\Im \mathcal{W}_{\psi_1^{Cau}} \bar{u}^1$

$$= a^{1/2} \sum_{l=1}^K u_l (C(b + at_l) - C(b + at_{l-1})) (-i) .$$

Man hat als Integralformeln für die komplexe Wavelet-Transformation von u bzgl. ψ_1^{Cau} für einen Punkt $(a, b) \in \mathbb{H}$

$$\Re \mathcal{W}_{\psi_1^{Cau}} u(a, b) = \frac{a^{1/2}}{2\pi} \sum_{l=1}^K u_l \left(\frac{b + at_l}{1 + (b + at_l)^2} - \frac{b + at_{l-1}}{1 + (b + at_{l-1})^2} \right) \quad (48)$$

$$\Im \mathcal{W}_{\psi_1^{Cau}} u(a, b) = \frac{a^{1/2}}{2\pi} \sum_{l=1}^K u_l \left(\frac{1}{1 + (b + at_{l-1})^2} - \frac{1}{1 + (b + at_l)^2} \right) . \quad (49)$$

Man hat somit einfach implementierbare Summenformeln für den Real- und Imaginärteil. Wegen der Periodizität des Magnetisierungsstromes werden die Datensätze zerlegt. Es sei $u^{k,j}$ mit $u_l^{k,j} = u^{k,j}(t_l) = 1_{[0,2000]}(t_l) u_{BHN}^j(2000(k-1) + t_l)$ die k -te Impulsgruppe des Datensatzes u_{BHN}^j , wobei $j = 1, \dots, 15$ gilt, eine Impulsgruppe 2000 Meßwerte hat und jeder Datensatz 16 Impulsgruppen beinhaltet. Sei nun ein $m \in \{1, \dots, 8\}$ zufällig gewählt (Abb. 9), dann sind die zu analysierenden Impulsgruppen des Datensatzes u_{BHN}^j

$$\bar{u}^j(t_l) = u^{2m-1,j}(t_l) \quad \text{und} \quad \bar{\bar{u}}^j(t_l) = u^{2m,j}(t_l) \quad \text{mit} \quad t_l \in [0, 2000] \subseteq \mathbb{N}.$$

Mit (48) und (49) werden die Wavelet-Transformationen bzgl. $\bar{u}^j$ und $\bar{\bar{u}}^j$ auf dem in a und b jeweils äquidistanten Gitter

$$\tau = \{ (a, b) : a = l/2 \wedge b = l \cdot 40 \wedge l = 1, \dots, 50 \}$$

berechnet (Mit diesem Gitter wird das interessierende Skalierungs- bzw. Zeitintervall mit einer Schrittweite von $h_a = 1/2$ bzw. $h_b = 40$ diskretisiert.), siehe Abbildung 10. Anschließend erfolgt die Berechnung der Phasen- und Modulusdarstellung.

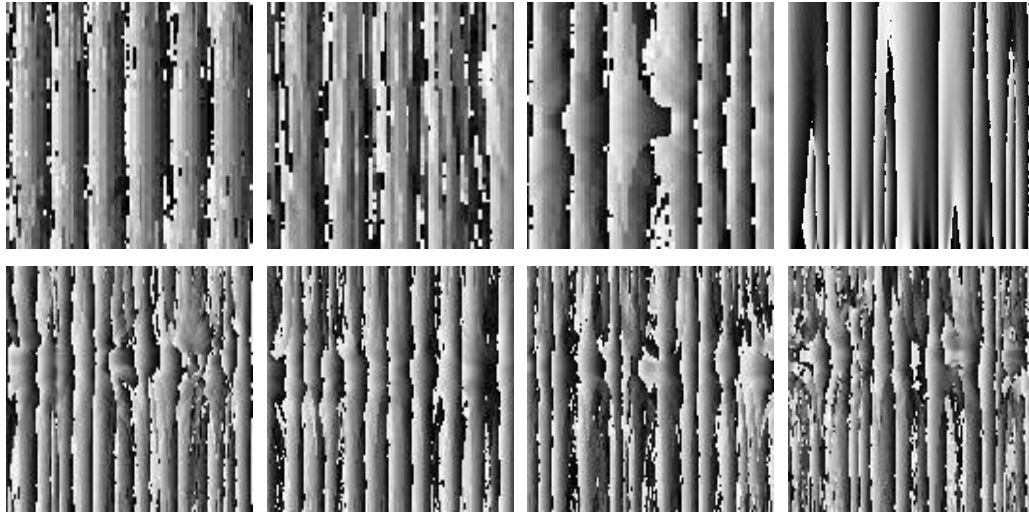


Abbildung 11: Zoom in die Phasendarstellung. Obere Reihe v.l.n.r. Fig.1 bis Fig.4 verschiedene Charakteristika, untere Reihe (gleiche Zoom-Bereiche) v.l.n.r. Fig.5 bis Fig.8 Phasen für u_{BHN}^1 , u_{BHN}^6 , u_{BHN}^{11} sowie u_{BHN}^9

7.2 Auswahl signifikanter Indikatoren

Die Phasenanalyse zeigt bestimmte Charakteristika des Signals auf. Die Fig.1 in Abb. 12 zeigt einen Skalenbereich, der über die gesamte Zeit einer Impulsgruppe unverändert bleibt. Mit den Aussagen aus Abschnitt 4.1 bzw. 4.2 kann nachgewiesen werden, daß in diesem Skalierungsbereich eine monochromatische Komponente existiert. Über große Skalenbereiche entspricht die Phase der Fig.2. Das Grundmuster wird durch zeitweise auftretende Komponenten überlagert. Fig.3 zeigt, daß die gleichbleibende Phase lokal zu bestimmten Zeitpunkten auf verschiedenen Skalen Störungen unterliegt. Die Phasenübergänge sind nicht mehr auf Linien konstanter Zeit. Die Fig.4 beinhaltet eine Darstellung für $a \rightarrow 0$. Die auftretenden Spitzen zeigen Sprünge an, die in etwas größeren Skalen verschwinden (verschmelzen). Es kann sich dabei um Dirac-Impulse verschiedener Ableitungsgrade zu bestimmten Zeitpunkten handeln (Abschnitt 4.3).

Aus den Phasendarstellungen auf Gruppenzugehörigkeit zu schließen, ist problematisch. Zunächst scheint dies möglich, in dem man ein Skalenbereich mit ähnlichen Phänomen wie in Fig.3 auswählt und u_{BHN}^1 , u_{BHN}^6 , u_{BHN}^{11} miteinander vergleicht. Durch paarweise Vergleiche (Widerlegung mit u_{BHN}^9) muß dieser Ansatz verworfen werden. Es lassen sich keine offensichtlichen typischen Merkmale feststellen.

Erfolgversprechender ist die Analyse des Modulus. Es sind $\overline{M}_j = \overline{M}_j(a, b)$ und $\overline{\overline{M}}_j = \overline{\overline{M}}_j(a, b)$ mit $(a, b) \in \tau$ die Modulusdarstellungen bzgl. $\overline{u}^j$ und $\overline{\overline{u}}^j$. Die Mittelungen

$$\Psi_j^1(b) = \sum_{i=1}^{50} |\overline{M}_j(i/2, b)|^2 \sim \int |\overline{M}_j(a, b)|^2 da ,$$

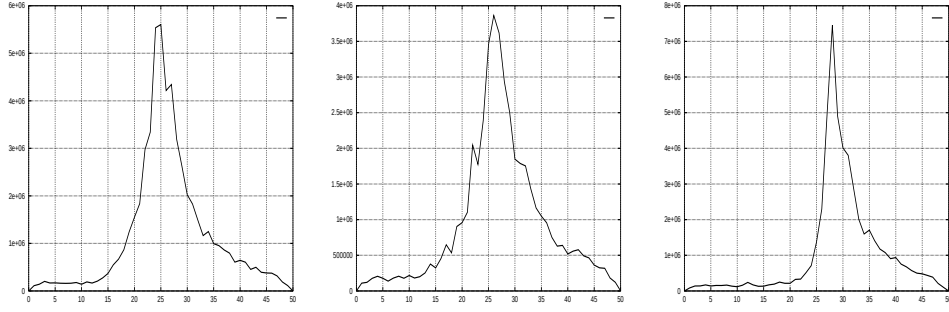


Abbildung 12: Darstellung Ψ_j^1 für je ein u_{BHN}^j aus G_1 , G_2 bzw. G_3 (v.l.n.r.)

$$\Psi_j^2(b) = \sum_{i=1}^{50} |\overline{M}_j(i/2, b)|^2 \sim \int |\overline{M}_j(a, b)|^2 da$$

lassen Charakteristika bzgl. G_1 , G_2 und G_3 vermuten (Abb. 12).

Die Indikatoren ϑ_n werden nun wie folgt belegt

$$\vartheta_2^{j,i} = b_j^i \text{ mit } \Psi_j^i(b_j^i) \geq \Psi_j^i(t_l) \text{ für } l = 1, \dots, 50 \text{ und } i = 1, 2,$$

$$\vartheta_3^{j,i} = \Psi_j^i(\vartheta_2^{j,i}), \quad \vartheta_4^{j,i} = \sum_{l=1}^{b_j^i} \Psi_j^i(t_l) \text{ und } \vartheta_5^{j,i} = \sum_{l=b_j^i}^{50} \Psi_j^i(t_l).$$

Angenommen $\tilde{\Psi}_j^i = \Psi_j^i / (\vartheta_4^{j,i} + \vartheta_5^{j,i})$ repräsentieren Säulendiagramme (relative Häufigkeiten), so lassen sich die $\tilde{\Psi}_j^i$ als Dichten von empirischen Verteilungsfunktionen H_j^i interpretieren.

Definition 35 Es sei $\bar{z} = \int zH(dz)$ das arithmetische Mittel bzgl. der empirischen Verteilung H . Dann heißt

$$m_k = \int (z - \bar{z})^k H(dz)$$

das k -te zentrale empirische Moment bzgl. der Verteilung H .

Für die Diskretisierung bzgl. τ werden für ϑ_6^j die Erwartungswerte (arithmetische Mittel) gewählt

$$\vartheta_6^{j,i} = \sum_{l=1}^{50} l \cdot \tilde{\Psi}_j^i(t_l).$$

Spezielle statistische Größen sind die Schiefe und der Exzess einer Verteilung:

$$S = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} \quad \text{und} \quad E = \frac{m_4}{m_2^2} - 3.$$

Der Exzess beschreibt die Steilheit einer Dichtefunktion bzgl. der entsprechenden Normalverteilung (im Parameterbereich). Positive Werte bedeuten größere Steilheit als bei der Normalverteilung. Die diskretisierten Momente bzgl. $\tilde{\Psi}_j^i$ sind

$$m_k^{j,i} = m_k(\tilde{\Psi}_j^i) = \sum_{p=1}^{50} \left(p - \sum_{l=1}^{50} l \cdot \tilde{\Psi}_j^i(t_l) \right)^k \tilde{\Psi}_j^i(t_p)$$

und damit ergeben sich weitere Indikatoren

$$\vartheta_7^{j,i} = S^{j,i} = \frac{m_3^{j,i}}{(m_2^{j,i})^{3/2}} \quad \text{und} \quad \vartheta_8^{j,i} = E^{j,i} = \frac{m_4^{j,i}}{(m_2^{j,i})^2} - 3.$$

8 Statistische Klassifikation

Nach der Auswahl der Indikatoren $\vartheta_n^{j,i}$ aus den Modulusdarstellungen der jeweiligen Datensätze u_{BHN}^j muß nun versucht werden, einen Zusammenhang zwischen $\vartheta_n^{j,i}$ und den vorgegebenen Werten für die Einschnürung und Festigkeit herzustellen.

Die Vektoren der klassisch ermittelten Einschnürungen und Festigkeiten werden bezeichnet mit

$$Y_e = (y_e^1, \dots, y_e^{15}) \quad \text{und} \quad Y_f = (y_f^1, \dots, y_f^{15}),$$

wobei sich der Index j in y_e^j bzw. y_f^j auf u_{BHN}^j bezieht.

8.1 Regressionsansatz

Definition 36 Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei Ω der Ereignisraum, $\mathcal{A}$ die zugehörige σ -Algebra und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Eine meßbare Abbildung $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{C})$ heißt Zufallsgröße mit Werten in $\mathcal{Y}$. Es sind für $\omega \in \Omega$ die Werte $Y(\omega) = y$ die Realisierungen der Zufallsgrößen.

Definition 37 Es sei Δ ein Parameterraum. $\mathcal{P} = \{P_\nu : \nu \in \Delta\}$ sei eine parametrische Verteilungsfamilie. Ferner sei $Y \in \mathbb{R}^n$, $Y \sim P_\nu$ mit $Y - \mathbf{E}_\nu Y = \varepsilon$ ($\mathbf{E}_\nu$ sei der Erwartungswert bzgl. ν). Die Verteilung Q_ν von ε und $\mathbf{E}_\nu$ seien als Funktionen von ν unabhängig voneinander. Dann heißt $Y = \mu + \varepsilon$ mit $\mu = \mathbf{E}_\nu Y$ Regressionmodell für Y . Gilt $\mu = X\beta$ für eine $n \times k$ -Matrix X , so heißt $Y = X\beta + \varepsilon$ lineares Regressionsmodell.

Es wird jetzt angenommen, daß y_e^j bzw. y_f^j Realisierungen von Y_e^j bzw. Y_f^j sind. Durch die klassische Materialprüfung stehen deshalb Beobachtungsvektoren der Größen Y_e und Y_f zur Verfügung, die nun mit k Einflußgrößen $x_1, \dots, x_k$ in folgender Form verbunden sein sollen

$$\begin{aligned} Y_e &= x_1\beta_1^e + \dots + x_k\beta_k^e + \varepsilon_e \\ Y_f &= x_1\beta_1^f + \dots + x_k\beta_k^f + \varepsilon_f. \end{aligned}$$

Die Regressionskoeffizienten β_i^e und β_i^f sind unbekannt. Die Zufallsgrößen ε_e und ε_f sind Fehler mit $E\varepsilon_e = 0$, $\text{Var}\varepsilon_e = \sigma_e^2 W_e$ und $E\varepsilon_f = 0$, $\text{Var}\varepsilon_f = \sigma_f^2 W_f$, wobei W_e und W_f positiv definite Matrizen sind. Je Datensatz u_{BHN}^j wurden die Indikatorvektoren $\vartheta^j = (\vartheta_2^{j,1}, \dots, \vartheta_8^{j,1}, \vartheta_2^{j,2}, \dots, \vartheta_8^{j,2})$ erzeugt. Mit dieser umfassenden Auswahl und mit $\vartheta_1^j = 1$ hat man die linearen Modelle

$$\begin{aligned} Y_e^j &= \vartheta_1^j \beta_1^e + \vartheta_2^{j,1} \beta_2^e + \dots + \vartheta_8^{j,1} \beta_8^e + \vartheta_2^{j,2} \beta_9^e + \dots + \vartheta_8^{j,2} \beta_{14}^e + \varepsilon_e^j \\ Y_f^j &= \vartheta_1^j \beta_1^f + \vartheta_2^{j,1} \beta_2^f + \dots + \vartheta_8^{j,1} \beta_8^f + \vartheta_2^{j,2} \beta_9^f + \dots + \vartheta_8^{j,2} \beta_{14}^f + \varepsilon_f^j \end{aligned}$$

oder in Matrizenschreibweise

$$Y_e = \theta \beta^e + \varepsilon_e \quad \text{und} \quad Y_f = \theta \beta^f + \varepsilon_f.$$

Das Ziel besteht nun darin, β^e und β^f geeignet zu schätzen. Auf Gauß bzw. auf Gauß und Markov geht die Methode der kleinsten Abweichungsquadrate zurück, die für schätzbare β beste lineare erwartungstreue Schätzungen liefert. Dabei wird die Summe der Abweichungsquadrate $\|Y - \theta\beta\|^2$ minimiert. Differenziert man nach β , so erhält man die Normalgleichung

$$\theta^T \theta \hat{\beta} = \theta^T Y.$$

Hat θ vollen Rang, so ist $\theta^T \theta$ regulär und die Schätzung

$$\hat{\beta} = (\theta^T \theta)^{-1} \theta^T Y$$

ist einzige Lösung. $\hat{\beta}$ ist also der geschätzte Koeffizientenvektor für β . Hat θ nicht vollen Rang, so ist immer noch

$$\hat{\beta} = (\theta^T \theta)^+ \theta^T Y$$

für eine beliebige verallgemeinerte Inverse eine Lösung und minimiert $\|Y - \theta\beta\|^2$. Da W_e und W_f positiv definite Matrizen sind, können auch die gewichteten Abweichungsquadrate minimiert werden. Für die Koeffizientenvektoren hat man dann die Schätzungen

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^e &= (\theta^T W_e \theta)^{-1} \theta^T W_e Y_e \\ \hat{\beta}^f &= (\theta^T W_f \theta)^{-1} \theta^T W_f Y_f. \end{aligned}$$

Mit den konkreten Beobachtungen

$$Y_f = (708, 697, 708, 725, 713, 600, 665, 617, 649, 649, 1294, 1344, 1400, 1334, 1400)^T,$$

$$Y_e = (64.7, 62.7, 67.7, 61.2, 65.8, 67.7, 67.3, 66.1, 70.5, 70.5, 49, 53.9, 46.1, 47.2, 56.1)^T$$

ergeben sich aufgrund der Regularität von $\theta^T \theta$ ($|\theta^T \theta| = 2.42 \cdot 10^{23}$) eindeutig bestimmte beste lineare erwartungstreue Schätzungen

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^e &= (4.55 \cdot 10^{02}, -8.22 \cdot 10^{-06}, -3.6 \cdot 10^{01}, 1.62 \cdot 10^{01}, \\ &\quad 7.22, -1.63 \cdot 10^{02}, 8.69 \cdot 10^{01}, -3.46 \cdot 10^{-07}, 3.85 \cdot 10^{-05}, \\ &\quad -9.98 \cdot 10^{01}, 9.53 \cdot 10^{01}, 6.17, 8.99 \cdot 10^{01}, 3.75 \cdot 10^{02}, -1.06 \cdot 10^{-05})^T \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^f = & (-9.4 \cdot 10^0, 4.84 \cdot 10^{-05}, 3.96 \cdot 10^{01}, 1.95 \cdot 10^{02}, \\ & 4.88 \cdot 10^{01}, 1.62 \cdot 10^{03}, 1.37 \cdot 10^{03}, 6.23 \cdot 10^{-05}, -1.74 \cdot 10^{-04}, \\ & 1.06 \cdot 10^{03}, -8.56 \cdot 10^{02}, -1.82 \cdot 10^{02}, -1.67 \cdot 10^{02}, -5.32 \cdot 10^{03}, 9.98 \cdot 10^{-06})^T.\end{aligned}$$

Mit diesen Koeffizientenvektoren lassen sich jeweils $\hat{Y}_e$ und $\hat{Y}_f$ bestimmen:

$$\hat{Y}_e = \begin{pmatrix} 64.70000002696247 \\ 62.70000002889731 \\ 67.70000002810013 \\ 61.20000002335070 \\ 65.80000002571944 \\ 67.70000002268506 \\ 67.30000002443484 \\ 66.10000002720096 \\ 70.50000002642719 \\ 70.50000003099314 \\ 49.00000002795133 \\ 53.90000002872227 \\ 46.10000002617636 \\ 47.20000002633930 \\ 56.10000002882805 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{Y}_f = \begin{pmatrix} 708.0000003859848 \\ 697.0000004344918 \\ 708.0000003870464 \\ 725.0000004403970 \\ 713.0000004091527 \\ 600.0000004406697 \\ 665.0000004316804 \\ 617.0000004145168 \\ 649.0000004394524 \\ 649.0000003768412 \\ 1294.000000418367 \\ 1344.000000430137 \\ 1400.000000468202 \\ 1334.000000447431 \\ 1400.000000435385 \end{pmatrix}.$$

Die Normen $\|Y_e - \hat{Y}_e\| = 1.04332114188 \cdot 10^{-07}$ und $\|Y_f - \hat{Y}_f\| = 1.64482041768 \cdot 10^{-06}$ zeigen den Schätzfehler an. Aufgrund der geringen Ausgangsmenge an Datensätzen ist eine Gruppenzuordnung anhand der errechneten Vektoren statistisch ungenügend abgesichert. Um bei entsprechenden Testdatensätzen aber einer objektiven Gruppenzuordnung zu genügen, wird ein spezielles Klassifikationsmodell eingeführt.

8.2 Nichtlineare Diskrimination

Es seien n Testdatensätze u_{Test}^j gegeben. Diese werden der komplexen Wavelet-Transformation unterzogen und man erhält ϑ^j für $j = 1, \dots, n$. Mit

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & \vartheta_2^{1,1} & \dots & \vartheta_8^{1,1} & \vartheta_2^{1,2} & \dots & \vartheta_8^{1,2} \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & \vartheta_2^{n,1} & \dots & \vartheta_8^{n,1} & \vartheta_2^{n,2} & \dots & \vartheta_8^{n,2} \end{pmatrix}$$

werden die Vektoren $(t_e^1, \dots, t_e^n)^T = \theta \hat{\beta}^e$ und $(t_f^1, \dots, t_f^n)^T = \theta \hat{\beta}^f$ gebildet. Die Problematik besteht nun darin, objektiv zu entscheiden, ob $u_{Test}^j \in G_1$, $\in G_2$ oder $\in G_3$ gilt.

Angenommen, mit $t^i = (t_e^i, t_f^i)^T$ gelte $t^i \sim P_{\nu_i}$ für $\nu_i \in \Delta$. Nach den Gegebenheiten des Experimentes (3 Gruppen) muß vorausgesetzt werden, daß maximal drei Verteilungen P_{ν_1} , P_{ν_2} und P_{ν_3} mit $\nu_i \in \Delta$ existieren, die eine Klasseneinteilung implizieren können. Das Ziel ist es nun, Mengen A_1 , A_2 und A_3 derart zu bestimmen, daß diesen

Mengen durch die Verteilungen P_{ν_i} "signifikant" unterschiedliche Maße zugeordnet werden. Für $i = 1, 2$ etwa $P_{\nu_1}(A_1) > P_{\nu_2}(A_1)$ und $P_{\nu_1}(A_2) < P_{\nu_2}(A_2)$. Sind ν_1, ν_2, ν_3 bekannt, ist das Problem gut zu lösen. Dann sind $p_{\nu_1}, p_{\nu_2}, p_{\nu_3}$ die Dichten der Verteilungen und es könnte $A_i = \{y : p_{\nu_i}(y) = \max p_{\nu_j}(y)\}$ gewählt werden.

Zunächst existiert über ν_i keine Information. Es stehen aber die Datensätze u_{BHN}^j zur Verfügung. Es wird nun angenommen, daß P_{ν_i} Elemente einer parametrischen Verteilungsfamilie sind und daß die unterschiedlichen Werte für Einschnürung und Festigkeit je Gruppe auf stochastisch unabhängige normalverteilte Fehler im klassischen Verfahren zurückzuführen sind (eine sehr starke Annahme, die hier nicht belegbar ist). Es kann nun die Existenz von drei 2-dim. Normalverteilungen $N_2(\mu_i, \Sigma_i)$ vorausgesetzt werden, wobei nun $\nu_i = (\mu_i, \Sigma_i)$ gilt.

Aus den gegebenen Beobachtungen sind nun μ_i und Σ_i zu bestimmen. Mit $Y_j = (y_e^j, y_f^j)^T$ soll gelten

$$Y_j \sim N_2(\mu_1, \Sigma_1) \text{ für } j = 1, \dots, 5, Y_j \sim N_2(\mu_2, \Sigma_2) \text{ für } j = 6, \dots, 10$$

$$\text{und } Y_j \sim N_2(\mu_3, \Sigma_3) \text{ für } j = 11, \dots, 15.$$

Die entsprechenden Dichten sind

$$p_j(y) = \frac{1}{2\pi|\Sigma_i|^{1/2}} e^{-1/2(y-\mu_i)^T \Sigma_i^{-1}(y-\mu_i)}, \text{ wobei}$$

$i = 1$ für $j = 1, \dots, 5$, $i = 2$ für $j = 6, \dots, 10$, $i = 3$ für $j = 11, \dots, 15$. Da die Y_j unabhängig sind, können die gemeinsamen Dichten

$$L^1(y, \mu_1, \Sigma_1) = p^1(y) = p_1(y) \cdots p_5(y), L^2(y, \mu_2, \Sigma_2) = p^2(y) = p_6(y) \cdots p_{10}(y) \text{ und}$$

$$L^3(y, \mu_3, \Sigma_3) = p^3(y) = p_{11}(y) \cdots p_{15}(y)$$

gedildet werden. Sie heißen die Likelihood-Funktionen. Wird nun y beobachtet, so ist die plausibelste Verteilung diejenige, für die $L(y, \cdot, \cdot)$ maximal wird. Da die $\ln$ -Funktion monoton ist, kann die zu L äquivalente $\ln$ -Likelihood-Funktion

$$l^i(y, \mu_i, \Sigma_i) = \ln L^i(y, \mu_i, \Sigma_i)$$

minimiert werden. Es ergeben sich als Likelihood-Schätzungen für μ_i und Σ_i

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=5i-4}^{5i} y_j \text{ und } \hat{\Sigma}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=5i-4}^{5i} (y_j - \hat{\mu}_i)(y_j - \hat{\mu}_i)^T.$$

Man hat also Schätzungen $\hat{\nu}_i$ für ν_i und somit Verteilungen $N_2(\hat{\mu}_i, \hat{\Sigma}_i)$.

Definition 38 Als *Maximum-Likelihood Klassifikationsregel* bezeichnet man: $g_i(z) = 1 :\Leftrightarrow (z - \hat{\mu}_i)^T \hat{\Sigma}_i^{-1}(z - \hat{\mu}_i) < (z - \hat{\mu}_j)^T \hat{\Sigma}_j^{-1}(z - \hat{\mu}_j) \quad \forall i \neq j$ ansonsten $g_i(z) = 0$. Dabei wird z in die i -te Klasse eingeordnet, falls $g_i(z) = 1$. Ist $g_i(z) = 0 \quad \forall i$, so ist z nach dieser Regel nicht klassifizierbar.



Abbildung 13: Entscheidungsbereiche einer nichtlinearen Diskrimination (Abzisse: Einschnürung [45,75], Ordinate: Festigkeit [450,1800])

D.h., daß ein Beobachtungsvektor z in die i -te Klasse eingeordnet wird, falls $p^i(z) > p^j(z)$ für alle $i \neq j$.

Aus neun konkreten Testdatensätzen wurden die Vektoren t_i erzeugt

$$\begin{aligned} t_1 &= (72.01, 466.89)^T & t_2 &= (58.48, 911.48)^T & t_3 &= (50.01, 1275.54)^T \\ t_4 &= (60.39, 809.49)^T & t_5 &= (66.19, 622.04)^T & t_6 &= (53.71, 1771.89)^T \\ t_7 &= (64.93, 677.36)^T & t_8 &= (62.57, 807.21)^T & t_9 &= (61.94, 556.49)^T. \end{aligned}$$

Alle neun Datensätze konnten klassifiziert werden. Folgende Zuordnungen ergaben sich:

$$\begin{aligned} g_2(t_1) &= 1 & g_3(t_2) &= 1 & g_3(t_3) &= 1 \\ g_1(t_4) &= 1 & g_2(t_5) &= 1 & g_3(t_6) &= 1 \\ g_1(t_7) &= 1 & g_1(t_8) &= 1 & g_2(t_9) &= 1. \end{aligned}$$

Abbildung 13 zeigt die Zuordnungsbereiche in einer "Festigkeit-Einschnürung-Ebene". Da $\hat{\Sigma}_i \neq \hat{\Sigma}_j$ für $i \neq j$ gilt, ergeben sich keine linearen sondern quadratische Trennfunktionen.

In einer anschließenden Kontrolle hat sich ergeben, daß t_5 und t_7 falsch klassifiziert wurden. Es muß gelten $g_1(t_5) = 1$ und $g_2(t_7) = 1$. Als Ursachen dafür können die geringe Ausgangsdatenanzahl, eine leicht veränderte Experimentieranordnung (Maximum der Amplitude des Magnetisierungsstromes) sowie eine mögliche Nicht-optimalität des linearen Modells angegeben werden.

9 Zusammenfassung

Unter Ausnutzung von [8] und [9] konnte ausgearbeitet werden, daß man sich bei der komplexen Wavelet-Transformation reellwertiger Signale auf progressive Wavelets beschränken kann. Nach Fortsetzbarkeitsaussagen in [19] kann eine analytische Beschreibung des Transformationsergebnisses durch die Fortsetzung von Funktionen mit reellem Definitionsbereich in die obere komplexe Halbebene realisiert werden. Unter Ausnutzung allgemeiner funktionentheoretischer Aussagen (siehe [3]) konnte somit ausführlich die Aussage aus [9] nachgewiesen werden, wonach sich die Wavelet-Transformation bzgl. des Cauchy-Wavelets als eine Wirtingerableitung des fortgesetzten Signals interpretieren läßt. Der Einsatz der Cauchy-Wavelets konnte außer mit sehr guten analytischen Eigenschaften auch damit gerechtfertigt werden, daß sie sich in die Menge minimierender Funktionen der Unschärferelation der affinen Gruppe einordnen ließen. Die Konstruktion der Morlet-Gauß-Wavelets, basierend auf [8], zielte darauf ab, Wavelets zu erhalten, die sich durch gute Berechenbarkeit von Phase und Modulus auszeichnen. Mit dem Lusin-Wavelet, gemäß einem Ansatz aus [13], stellte sich ein anderer Zugang zu den Cauchy-Wavelets heraus.

Bei der Analyse spezieller Signalklassen, basierend auf [1], [8] und [9], wurden zum Teil durch einfache Folgerungen Rückschlüsse auf das Signal sowie deren Beziehungen zu Phase und Modulus der Wavelet-Transformation realisiert. Anmerkenswert ist die Unabhängigkeit der Waveletausswahl bei der Analyse monochromatischer Funktionen. Mit Hilfe der Distributionentheorie (siehe [10]) konnte eine Interpretation homogener Signalstrukturen aus [8] vollständig bewiesen werden (unabhängig und andersartiger Beweis als in [9]). Weiter hervorzuheben ist auch, daß unter der Annahme der Existenz von Ableitungen, diese durch geeignete Wahl des analysierenden Wavelets approximiert werden konnten. Durch den Nachweis einer expliziten Berechnungsvorschrift für die n -te Ableitung der Fourier-Transformierten des Cauchy-Wavelets, konnte eine Aussage über deren Ordnung erzielt werden. Dadurch wurden die Cauchy-Wavelets auch für die Approximation auswählenswert. Bei entsprechend starken Forderungen an die Differenzierbarkeitsordnung des Signals und an die Ordnung des analysierenden Wavelets, wurde es so möglich, das Krümmungs- und Ableitungsverhalten in einfacher Weise zu studieren.

In Vorbereitung auf die numerische Umsetzung wurde mit dem Reproduktions-Kern (gemäß [8]) eine Charakterisierung der Menge der Wavelet-Transformationen über $\mathbb{H}$ eingesehen (siehe auch [9]). Unter Ausnutzung des guten Lokalisierungsverhaltens dieses Kernes, das aufgrund der expliziten Berechenbarkeit von Phase und Modulus der Morlet-Gauß-Wavelets exemplarisch nachgewiesen werden konnte, wurde gemäß der Ausarbeitung in [8] eine Interpolationsformel für die diskretisierte Transformation eingesehen und die Invarianz der Gramschen Matrix A bzgl. einer Gitteränderung bewiesen. Es entstand damit der Vorteil, die Transformation nur auf einem relativ groben Gitter durchführen zu müssen.

Ein Anwendungsbeispiel aus dem Bereich der Materialklassifikation/-prüfung repräsentiert einen reellen Signaltyp, bei dem keine Frequenz dominierend ist. Dem

Ziel folgend, Materialien entsprechend ihrer Güte (Festigkeit etc.) zu klassifizieren, wurden die reellen Meßdaten einer komplexen Wavelet-Transformation unterzogen. Im Hinblick auf die Interpretierbarkeit wurde das Cauchy-Wavelet ausgewählt. Die Phasenanalyse ergab, daß das Signal aus monochromatischen und zum Teil aus homogenen Komponenten besteht. Annormalitäten in den Phasenübergängen konnten nicht interpretiert werden. Der Versuch, verschiedene Datensätze danach zu klassifizieren, schlug fehl.

Dementgegen erwiesen sich die Indikatoren aus den Modulusdarstellungen erfolgversprechender. Durch einen erstmals formulierten und somit neuartigen Ansatz (Kombination der Analyse deterministischer Größen der Wavelet-Transformation und statistischem Klassifikationsmodell) konnte ein Materialklassifikationsmodell entwickelt werden

Dabei konnte durch einen Regressionsansatz ein linearer Zusammenhang zwischen klassischen Güteparametern und Transformationsergebnissen hergestellt werden. Aufgrund der zu geringen Ausgangsprobenmenge, ist dieser Zusammenhang nur genügend statistisch abgesichert. Die Maximum-Likelihood-Klassifikationsregel lieferte eine nichtlineare Diskrimination, die objektiv Testdatensätze in entsprechende Gütegruppen einordnet. Im Ergebnis konnte das entwickelte Klassifikationsmodell 80% der Materialproben in die richtigen Qualitätsgruppen einordnen.

Ausblick: Die allgemeine Darstellung von minimierenden Wavelets der Unschärferelation der affinen Gruppe ausnutzend, könnte versucht werden, eine analytische Darstellung der Wavelet-Transformation zu finden. Durch Auswertung dieser in Bezug auf verschiedene Signalklassen, kann es möglich sein, die freien Wavelet-Parameter signalabhängig zu belegen. Eine so optimierte Transformation könnte im Anwendungsbeispiel bessere Ergebnisse liefern.

Bezüglich der Materialklassifikation scheint es ohne weiteres denkbar, nach einem nichtlinearen Zusammenhang zu suchen und außerdem transformationsunabhängige Parameter, wie etwa Amplitude und Offset des Magnetisierungsstromes, einzusetzen.

Literatur

- [1] Aldroubi A., Unser M.: *WAVELETS in Medicine and Biology*. CRC Press, 1996.
- [2] Buque C., Tirschler W., Blochwitz C.: *Barkhausenrauschen in mechanisch ermüdeten Nickelkristallen*. Zeitschrift Metallkunde 86, S. 1-12, (1995).
- [3] Busam, Freitag: *Funktionentheorie*. Springer Verlag, 1993.
- [4] Chui Ch.K.: *An Introduction to WAVELETS*. Academic Press, San Diego, 1992.
- [5] Dahlke S., Maaß P.: *The Affine Uncertainty Principle in One and Two Dimensions*. Comp. Math. Appl. vol. 30, No. 3-6, S. 293-305 (1995).
- [6] Gade S., Gram-Hansen K.: *The Analysis of Nonstationary Signals*. Journal of Sound and Vibrations, S.40-46, (Jan. 1997).
- [7] Gradstheyn I.S., Ryzhik I.M.: *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, San Diego, 1980.
- [8] Grossmann A., Kronland-Martinet R., Morlet J.: *Reading and understanding continuous wavelet transform*. In: Wavelets: Time-Frequency Methods and Phase Space, Inverse Problems and Theoretical Imaging, Springer Verlag, 1989.
- [9] Holscheider M.: *Wavelets An Analysis Tool*. Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [10] Jantscher L.: *Distributionen*. de Gruyter, 1971.
- [11] Kornwinder T.H.: *WAVELETS: An Elementary Treatment of Thoery and Applications*. World Scientific, Singapore, 1993.
- [12] Louis A.K., Maaß P., Rieder A.: *Wavelets*. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [13] Meyer Y.: *Wavelets Algorithms and Applications*. Society for Industrial an Applied Mathematics, Philadelphia, 1993.
- [14] Stein E.: *Singular Integrals and the Differentiability Property of Functions*. Princeton University Press, Princeton, 1979.
- [15] Torchinsky A.: *Real Variables*. Addison - Wesley, New York, 1988.
- [16] Wickerhauser M.V.: *Adaptive Wavelet-Analysis*. Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1996.
- [17] Willmann W., Wollmann G.: *Gerätesystem zur Auswertung des Barkhausen-rauschens*. Wiss. Beiträge der IH Zwickau 11, S. 64-66, (1985).
- [18] Willmann W., Wollmann G.: *Der Barkhausen-Effekt und seine meßtechnische Nutzung*. Experimentelle Technik der Physik 31, S.533-543, (1983).
- [19] Yosida, K: *Functional Analysis*. Springer Verlag, 1980