



Karl Foppe

Repetitorium
zur
Fehlerlehre und Statistik
und
Ausgleichsrechnung

Neubrandenburg
5. März 2009

Die vorliegende Zusammenstellung wichtiger Formeln und Begriffe der *Fehlerlehre und Statistik* sowie der *Ausgleichsrechnung* soll Praktikern sowie Studierenden als „kleines Nachschlagewerk“ dienen und erhebt weder einen Anspruch auf Vollständigkeit noch einen Anspruch darauf, ein Lehrbuch ersetzen zu wollen. Insbesondere kann und will es den Studierenden einen regelmäßigen Besuch der Vorlesungen nicht ersparen.

Alle Formeln und Beispiele wurden mit viel Sorgfalt zusammengestellt. Trotzdem kann keine Gewähr (z.B. für Druck- oder Schreibfehler) übernommen werden.

Grundbegriffe

1 Matrizenalgebra

Vektor: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$

Transponierter Vektor: $\mathbf{a}^T = [a_1 \ a_2 \ a_3]$

Matrix: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

Transponierte Matrix: $\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$

1.1 Addition, Subtraktion und Multiplikation von Vektoren

Vektoren: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

Addition: $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T = [a_1 \ a_2 \ a_3] + [b_1 \ b_2 \ b_3] = [a_1 + b_1 \ a_2 + b_2 \ a_3 + b_3]$$

Subtraktion: $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{a}^T - \mathbf{b}^T = [a_1 \ a_2 \ a_3] - [b_1 \ b_2 \ b_3] = [a_1 - b_1 \ a_2 - b_2 \ a_3 - b_3]$$

Multiplikation: $\mathbf{c} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = [a_1 \ a_2 \ a_3] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = [a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3] = [c_1]$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot [b_1 \ b_2 \ b_3] = \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & a_1 \cdot b_3 \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & a_2 \cdot b_3 \\ a_3 \cdot b_1 & a_3 \cdot b_2 & a_3 \cdot b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Multiplikationsregeln: $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^T$ aber $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}$ bzw. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T \neq \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{a}$ aber $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^T$

1.2 Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen

Matrizen:
$$\mathbf{a} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \quad \mathbf{b} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{matrix}$$

Addition:
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} + \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{matrix}$$

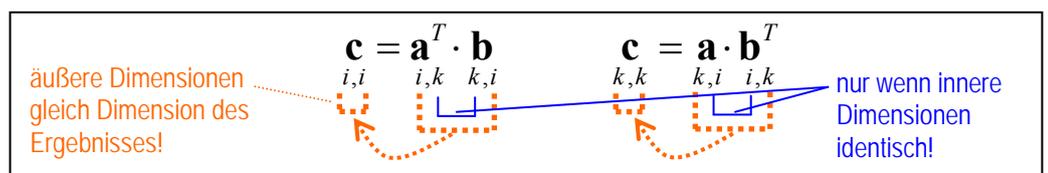
$$\mathbf{c}^T = \mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{matrix} + \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} & a_{31} + b_{31} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} & a_{32} + b_{32} \end{matrix}$$

Subtraktion:
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} - \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} \end{matrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{a}^T - \mathbf{b}^T = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{matrix} - \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} - b_{11} & a_{21} - b_{21} & a_{31} - b_{31} \\ a_{12} - b_{12} & a_{22} - b_{22} & a_{32} - b_{32} \end{matrix}$$

Multiplikation:
$$\mathbf{c} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{21} \cdot b_{21} + a_{31} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{21} \cdot b_{22} + a_{31} \cdot b_{32} \\ a_{12} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{32} \cdot b_{31} & a_{12} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{32} \cdot b_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{matrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{12} & a_{11} \cdot b_{21} + a_{12} \cdot b_{22} & a_{11} \cdot b_{31} + a_{12} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{12} & a_{21} \cdot b_{21} + a_{22} \cdot b_{22} & a_{21} \cdot b_{31} + a_{22} \cdot b_{32} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{12} & a_{31} \cdot b_{21} + a_{32} \cdot b_{22} & a_{31} \cdot b_{31} + a_{32} \cdot b_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{matrix} \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{matrix}$$



1.3 Formen von Matrizen

"hohe Matrix"

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

"breite Matrix"

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

"unteres Dreieck"

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

"oberes Dreieck"

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}$$

quadratisch

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

quadratisch, symmetrisch

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Diagonalmatrix

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}$$

Einheitsmatrix

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4 Spur, Determinante, Rang einer Matrix

Spur einer Matrix

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow Sp(\mathbf{c}) = c_{11} + c_{22} + c_{33}$$

Determinante einer Matrix

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{c}) = c_{11} \cdot c_{22} - c_{12} \cdot c_{21}$$

Rang einer Matrix

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow Rg(\mathbf{c}) = \begin{cases} \text{Anzahl linear} \\ \text{unabhängiger} \\ \text{Spalten/Zeilen} \end{cases}$$

wenn $\det(\mathbf{c}) = 0 \Rightarrow Rg(\mathbf{c}) < \text{Zahl der Spalten } n \text{ von } \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{c} \text{ ist singular}$

wenn $\det(\mathbf{c}) \neq 0 \Rightarrow Rg(\mathbf{c}) = \text{Zahl der Spalten } n \text{ von } \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{c} \text{ ist regulär}$

1.5 Inversion einer Matrix

Inverse einer Matrix

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{c}^{-1} = \left(\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}^{-1} = \mathbf{I} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{c}^{-1} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{I}$$

existiert nur, wenn Matrix \mathbf{c} regulär!

2 Grundbegriffe der Statistik

Zufallsgröße:	X	- Ergebnis eines Experiments, dessen Ausgang in gewissen Grenzen ungewiss ist.
Beobachtungswert:	x_i	- Realisierung der Zufallsgröße. Die Zufallsgröße X kann in einem bestimmten Wertebereich verschiedene Werte x_i annehmen
Beobachtungsvektor:	$\mathbf{x}_{1,n}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$	
Messgröße:	L	- Zufallsgröße, die durch eine Messung realisiert wird.
Beobachtungswert:	l_i mit $i = 1, 2, \dots, n$	- Einzelner Messwert aus einer Reihe von n Messungen
Diskrete Zufallsgröße:	$\mathbf{w}(X) = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]$	- entstammt einem Wertebereich aus abzählbar vielen, diskreten Werten (Beispiel „Resultat eines Würfelspiels“ ⇒ Ergebnis nur diskrete ganze Zahlen 1,2,3,...,6)
Stetige Zufallsgröße:	$\mathbf{w}(L) = \langle a, b \rangle$	- Wertebereich ist ein Intervall auf der Zahlengeraden
Erwartungswert von X :	$\mu_x = E\{X\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	
Zufällige Abweichung:	$\varepsilon_x = X - \mu_x$	<u>Nicht mehr</u> „zufälliger Fehler“!
Varianz von X :	$\sigma_x^2 = E\{\varepsilon_x^2\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X - \mu_x)^2$	
(Empirischer) Mittelwert:	$\bar{L} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n l_j = \frac{1}{n} \cdot \mathbf{e}_{1,n}^T \cdot \mathbf{L}_{1,n}$	mit $\mathbf{e}_{1,n}^T = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ und $\mathbf{L}_{1,n}^T = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]$
Erwartungswert bei $n \rightarrow \infty$:	$\mu_l = E\{L\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n l_j \right)$	
Wahrer Wert:	$\tilde{L} = \mu_l - \Delta$	mit Δ = systematische Abweichung
Zufällige Abweichung:	$\varepsilon_j = l_j - \mu_l$ $\boldsymbol{\varepsilon}_{n,1} = \mathbf{L}_{n,1} - \mathbf{e}_{n,1} \cdot \mu_l$	bezogen auf den Erwartungswert
Verbesserung:	$v_j = \bar{L} - l_j$ $\mathbf{v}_{n,1} = \mathbf{e}_{n,1} \cdot \bar{L} - \mathbf{L}_{n,1}$	bezogen auf den Mittelwert

Theoretische Varianz: $\sigma_l^2 = E\{\varepsilon^2\} = E\{(L - \mu_l)^2\}$

Theor. Standardabw.: $\sigma_l = +\sqrt{\sigma_l^2}$

Empirische Varianz :

I. aus zufälligen Abweichungen : (Erwartungswert bekannt)	II. aus Verbesserungen (Erwartungswert unbekannt)
$\varepsilon_j = l_j - \mu_l$	$v_j = \bar{L} - l_j$
<p><u>Varianz</u> :</p> $s_l^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2}{n} = \frac{\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2}{n} = \frac{1}{n} \cdot \mathbf{\varepsilon}^T \mathbf{\varepsilon}_{1,n \quad n,1}$	<p><u>Varianz</u> :</p> $s_l^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}{(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)} \mathbf{v}^T \mathbf{v}_{1,n \quad n,1}$
<p><u>Standardabweichung</u> : (Einzelwert) $s_l = +\sqrt{s_l^2}$</p>	<p><u>Standardabweichung</u> : (Einzelwert) $s_l = +\sqrt{s_l^2}$</p>
	<p><u>Standardabweichung</u> : (des Mittelwertes) $s_{\bar{L}} = \frac{s_l}{\sqrt{n}}$</p>

2.1 Korrelation

Theoretischer Korrelationskoeffizient : $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$ mit $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$

Empirischer Korrelationskoeffizient : $r_{ij} = \frac{s_{ij}}{s_i s_j}$ mit $-1 \leq r_{ij} \leq 1$

$\rho_{ij} = \pm 1$	$\Rightarrow L_i$ und L_j sind linear abhängig (maximal korreliert)
$\rho_{ij} = 0$	$\Rightarrow L_i$ und L_j sind linear unabhängig (unkorreliert)

- Physikalische Korrelation:
Korrelation zwischen je zwei Realisierungen von Zufallsgrößen auf Grund systematischer Restabweichungen, die im funktionalen Modell nicht oder nur unzureichend erfasst sind.
- Mathematische Korrelation:
(auch funktionale oder algebraische Korrelation)
Wenn zwischen zwei oder mehreren Realisierungen von Zufallsgrößen bei einer Auswertung ein funktionaler Zusammenhang formuliert wird, so entsteht zwischen den sich ergebenden Schätzwerten eine Korrelation.

2.2 m-Dimensionale Kovarianzmatrix

m-Dim. Zufallsvektor: $\mathbf{L} = [L_1 \ L_2 \ \dots \ L_m]$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{m1} \\ l_{12} & l_{22} & \dots & l_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{1n} & l_{2n} & \dots & l_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{\parallel} = \begin{bmatrix} E\{\boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_1\} & E\{\boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_2\} & E\{\boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_3\} & \dots & E\{\boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_m\} \\ E\{\boldsymbol{\varepsilon}_2^T \boldsymbol{\varepsilon}_1\} & E\{\boldsymbol{\varepsilon}_2^T \boldsymbol{\varepsilon}_2\} & E\{\boldsymbol{\varepsilon}_2^T \boldsymbol{\varepsilon}_3\} & \dots & E\{\boldsymbol{\varepsilon}_2^T \boldsymbol{\varepsilon}_m\} \\ E\{\boldsymbol{\varepsilon}_3^T \boldsymbol{\varepsilon}_1\} & E\{\boldsymbol{\varepsilon}_3^T \boldsymbol{\varepsilon}_2\} & E\{\boldsymbol{\varepsilon}_3^T \boldsymbol{\varepsilon}_3\} & \dots & E\{\boldsymbol{\varepsilon}_3^T \boldsymbol{\varepsilon}_m\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \boldsymbol{\varepsilon}_1\} & E\{\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \boldsymbol{\varepsilon}_2\} & E\{\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \boldsymbol{\varepsilon}_3\} & \dots & E\{\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \boldsymbol{\varepsilon}_m\} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{\parallel} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2m} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \dots & \sigma_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \sigma_{m3} & \dots & \sigma_m^2 \end{bmatrix}$$

Varianz: σ_i^2 für $i=1\dots m$

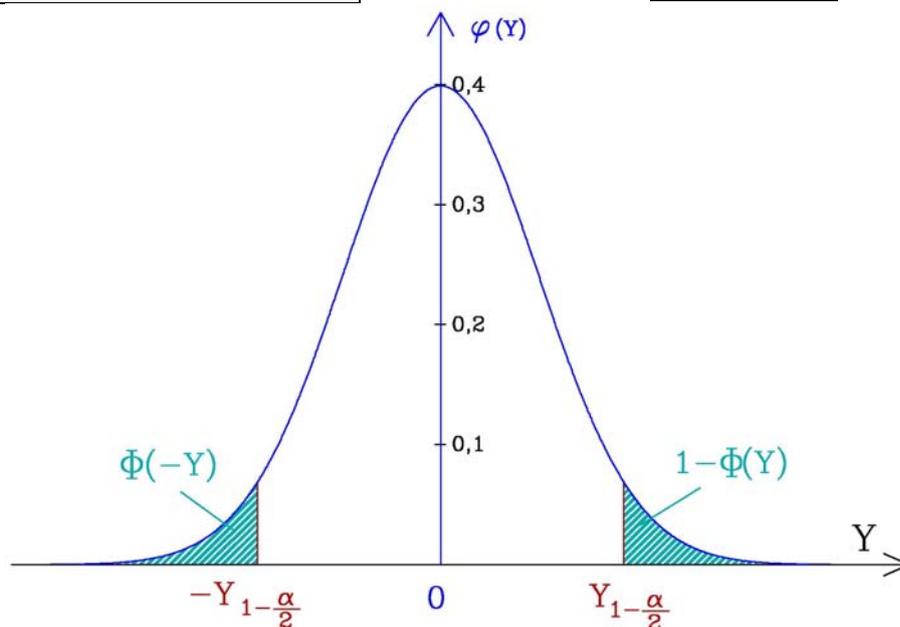
Kovarianz: $\sigma_{ij} = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_{ji}$
 \Leftrightarrow Korrelationskoeffizient: $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$ für $i \neq j$

2.3 Standardisierte Normalverteilung

$$P(a \leq L \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(Y) dY$$

$$L \sim N(\mu, \sigma^2)$$

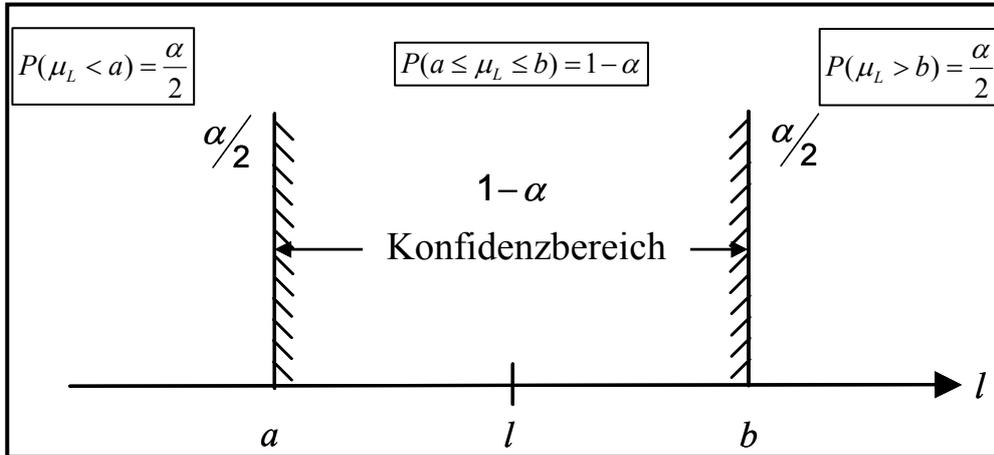
$$L \sim N(0, 1)$$



2.3.1 Konfidenzbereich für den Erwartungswert einer Zufallsgröße L

Bereich (Intervall) um einen Messwert $L \sim N(\mu, \sigma^2)$, in dem sich der Erwartungswert μ_L mit einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit $S=1-\alpha$ befindet.
(Bei bekanntem μ_L ist der Bereich um μ_L definiert)

α ist vorzugeben z.B. $\begin{cases} \alpha = 0,05 \hat{=} \text{signifikant} \\ \alpha = 0,01 \hat{=} \text{hochsignifikant} \end{cases}$



Fall 1: Theoretische Standardabweichung σ bekannt

gegeben \hat{x} mit $\sigma_{\hat{x}}$

$$P\left(\hat{x} - Y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\hat{x}} \leq \mu_{\hat{x}} \leq \hat{x} + Y_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\hat{x}}\right) = 1 - \alpha$$

Fall 2: Empirische Standardabweichung s bekannt

gegeben \hat{x} mit $s_{\hat{x}}$ und f

$$P\left(\hat{x} - t_{f,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_{\hat{x}} \leq \mu_{\hat{x}} \leq \hat{x} + t_{f,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_{\hat{x}}\right) = 1 - \alpha$$

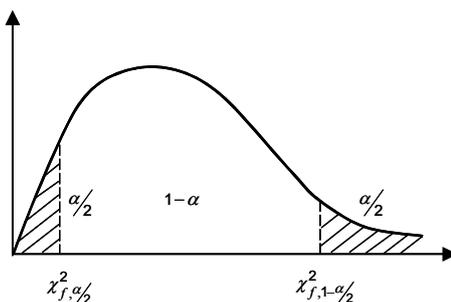
Konfidenzbereich einer Standardabweichung

Bereich (Intervall) um die empirische Standardabweichung s , in dem sich die theoretische Standardabweichung σ mit einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit $S=1-\alpha$ befindet.

$$P(a \leq \sigma \leq b) = 1 - \alpha$$

$$P(\sigma < a) = P(\sigma > b) = \frac{\alpha}{2}$$

α ist vorzugeben z.B. $\begin{cases} \alpha = 0,05 \hat{=} \text{signifikant} \\ \alpha = 0,01 \hat{=} \text{hochsignifikant} \end{cases}$



Konfidenzbereich für σ :

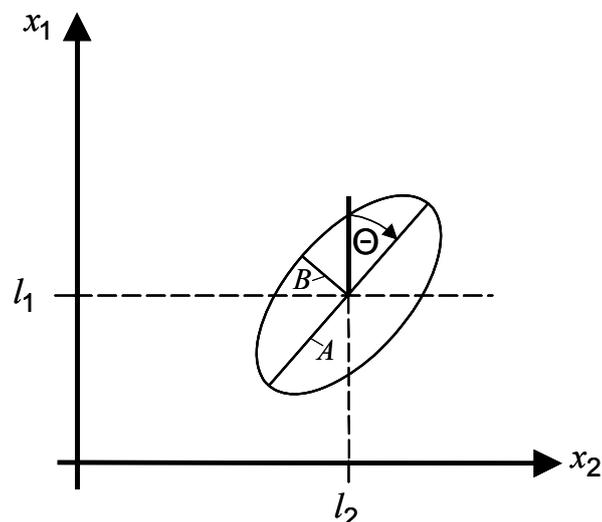
gegeben: s mit f

$$P\left(s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f,1-\frac{\alpha}{2}}^2}} \leq \sigma \leq s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f,\frac{\alpha}{2}}^2}}\right) = 1 - \alpha$$

2.3.2 2D-Konfidenzbereich: Die Konfidenzellipse

Zufallsvektor: $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ mit $l_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
 $l_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Varianzkovarianzmatrix: $\Sigma_{\mathbf{L}\mathbf{L}} = E\{\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T\} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \\ \rho_{12} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$



Bereich um eine Realisierung von $\mathbf{L} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma_{\mathbf{L}\mathbf{L}})$, in dem sich der Erwartungswert $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{L}}$ mit einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit $S=1-\alpha$ befindet. (Bei bekanntem $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{L}}$ ist der Bereich um $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{L}}$ definiert)

Spektralzerlegung: $\Sigma_{\mathbf{L}\mathbf{L}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^T$

Spektralmatrix: $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ mit Eigenwerten λ_1 u. λ_2

Modalmatrix: $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{11} & \boldsymbol{\varphi}_{12} \\ \boldsymbol{\varphi}_{21} & \boldsymbol{\varphi}_{22} \end{bmatrix}$ mit den

Eigenvektoren: $\boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{11} \\ \boldsymbol{\varphi}_{21} \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{12} \\ \boldsymbol{\varphi}_{22} \end{bmatrix}$

Konfidenzellipse bei vorliegendem σ_0^2 und $f=\infty$

Allgemeines Eigenwertproblem: $\det(\Sigma_{\mathbf{L}\mathbf{L}} - \mathbf{D}) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \sigma_1^2 - \lambda & \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \\ \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 & \sigma_2^2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$

Ausmultiplizieren der Determinante: $\lambda^2 - \lambda(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 - (\rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2)^2 = 0$
mit $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12} = \sigma_{12}$

Lösung der Gleichung: $\lambda_1 / \lambda_2 = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \pm \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + (2 \cdot \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2)^2})$

Richtungswinkel der großen Halbachse: $\Theta = \arctan \frac{\boldsymbol{\varphi}_{21}}{\boldsymbol{\varphi}_{11}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2 \cdot \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$

Große Halbachse: $A^2 = \lambda_1 \cdot \chi_{2,1-\alpha}^2 = \chi_{2,1-\alpha}^2 \cdot \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + w)$

Kleine Halbachse: $B^2 = \lambda_2 \cdot \chi_{2,1-\alpha}^2 = \chi_{2,1-\alpha}^2 \cdot \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - w)$

Hilfsgröße: $w^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + 4 \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 \cdot \rho_{12}^2$

Konfidenzellipse bei vorliegendem s_0^2 und f aus Ausgleichung

Zufallsvektor: $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$ mit $\Sigma_{\mathbf{LL}} = \begin{bmatrix} s_1^2 & \rho_{12} \cdot s_1 \cdot s_2 \\ \rho_{12} \cdot s_1 \cdot s_2 & s_2^2 \end{bmatrix}$

Allgemeines Eigenwertproblem: $\det(\Sigma_{\mathbf{LL}} - \mathbf{D}) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} s_1^2 - \lambda & \rho_{12} \cdot s_1 \cdot s_2 \\ \rho_{12} \cdot s_1 \cdot s_2 & s_2^2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$

Ausmultiplizieren der Determinante: $\lambda^2 - \lambda(s_1^2 + s_2^2) + s_1^2 \cdot s_2^2 - (\rho_{12} \cdot s_1 \cdot s_2)^2 = 0$
mit $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12} = s_{12}$

Lösung der Gleichung: $\lambda_1 / \lambda_2 = \frac{1}{2} \cdot (s_1^2 + s_2^2 \pm \sqrt{(s_1^2 - s_2^2)^2 + (2 \cdot \rho_{12} \cdot s_1 \cdot s_2)^2})$

Richtungswinkel der großen Halbachse: $\Theta = \arctan \frac{s_{21}}{s_{11}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2 \cdot \rho_{12} \cdot s_1 \cdot s_2}{s_1^2 - s_2^2}$

Große Halbachse: $A^2 = \lambda_1 \cdot F_{2,f,1-\alpha} = F_{2,f,1-\alpha} \cdot \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 + w)$

Kleine Halbachse: $B^2 = \lambda_2 \cdot F_{2,f,1-\alpha} = F_{2,f,1-\alpha} \cdot \frac{1}{2} (s_1^2 + s_2^2 - w)$

Hilfsgröße: $w^2 = (s_1^2 - s_2^2)^2 + 4 s_1^2 \cdot s_2^2 \cdot \rho_{12}^2$

Helmertsche Fehlerellipse

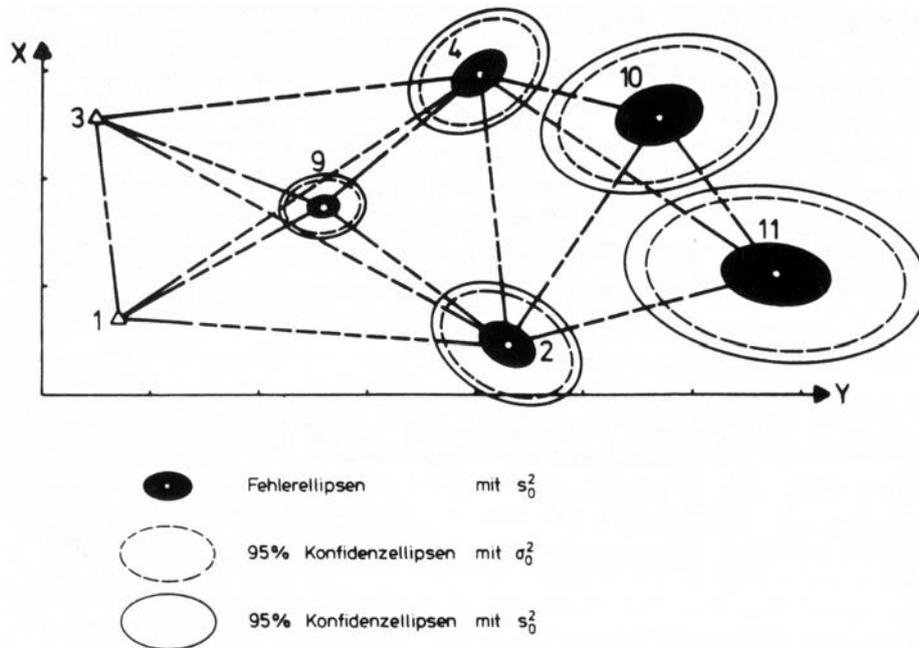
Richtungswinkel der großen Halbachse: $\Theta = \arctan \frac{s_{21}}{s_{11}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2 \cdot \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$

Große Halbachse: $A^2 = \lambda_1 = \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + w)$

Kleine Halbachse: $B^2 = \lambda_2 = \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - w)$

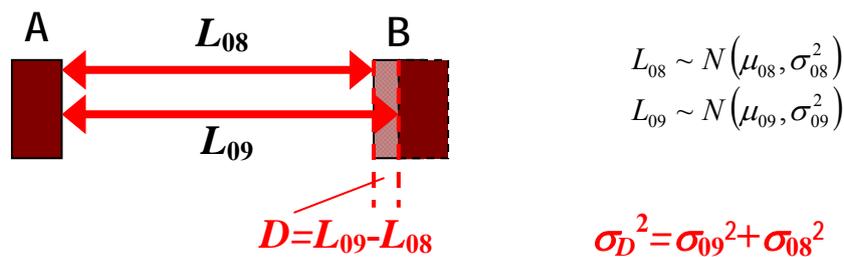
Hilfsgröße: $w^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 + 4 \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 \cdot \rho_{12}^2$

Die Helmertsche Fehlerellipse ist kein statistisches Maß im Sinne eines Konfidenzbereichs. Die Wahrscheinlichkeit, dass die wahre Punktlage innerhalb der Fehlerellipse liegt, ist abhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade des Netzes.



Helmertsche Fehlerellipsen und Konfidenzellipsen (aus Pelzer: *Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung*, 1985)

2.4 Prinzip statistischer Tests



Frage: Hat sich der Abstand D signifikant verändert? (bzw. $L_{08}=L_{09}$?)

Hypothesen:	$H_0: \tilde{L}_{09} = \tilde{L}_{08}$
	$H_{A_1}: \tilde{L}_{09} > \tilde{L}_{08}$
	$H_{A_2}: \tilde{L}_{09} \neq \tilde{L}_{08}$

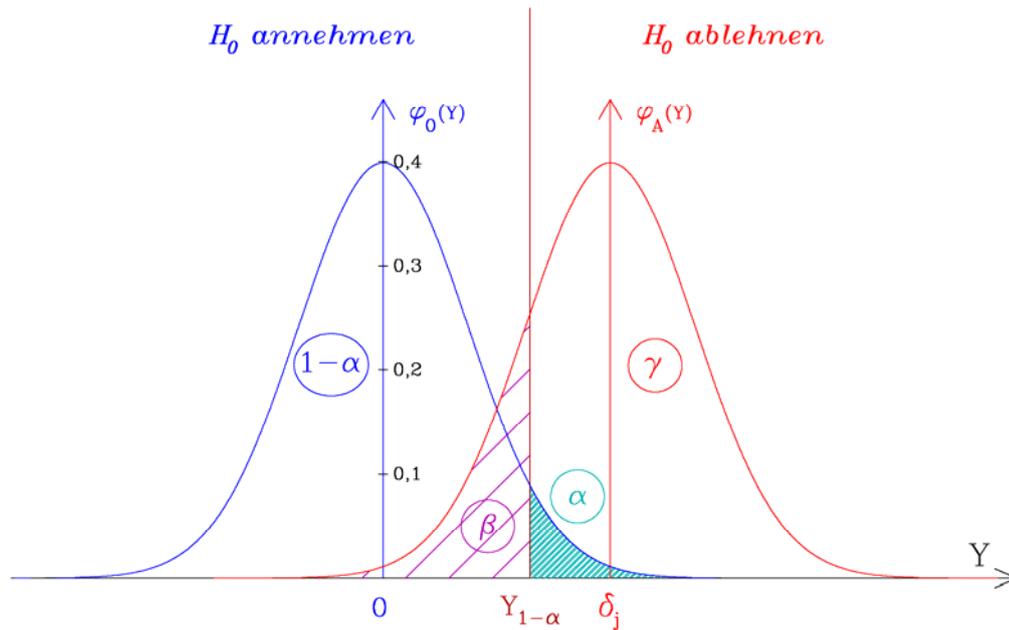
Testgröße:	$\tilde{Y} = \frac{\tilde{D}}{\sigma_D}$
------------	--

$H_0: Y \sim N(0,1)$
$H_A: Y \sim N(\tilde{Y},1)$

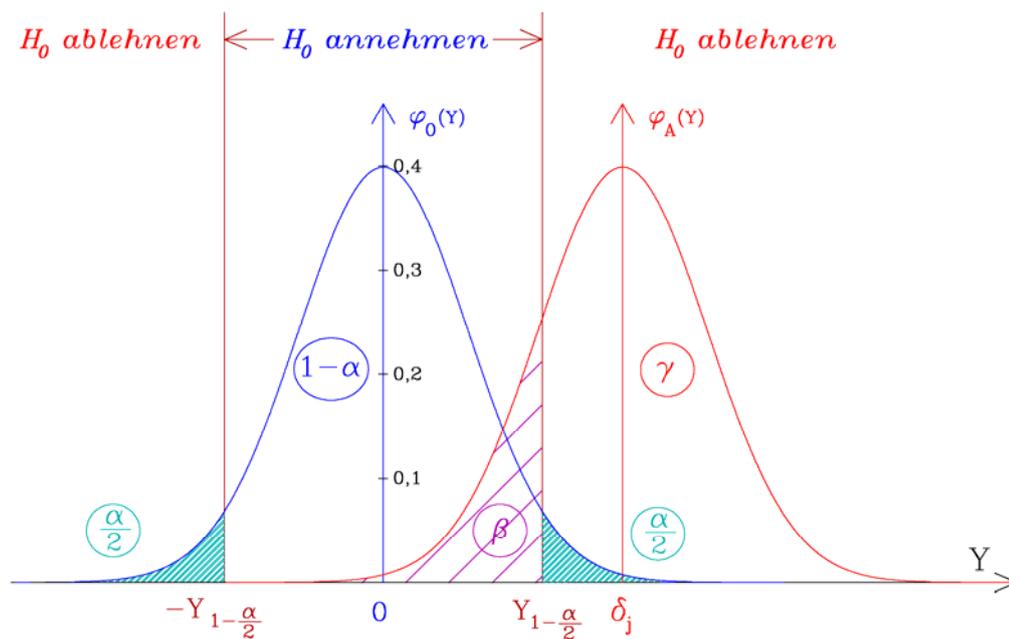
	theoretisch μ bekannt ($\sigma, f=\infty$)	empirisch μ unbekannt ($s, f=n-u$) ($\sigma, f=n$)
Skalare Größen, nicht quadratisch (z.B. Mittelwerte, Differenzen)	$Y_{1-\alpha}$ $Y_{1-\alpha/2}$	$t_{f,1-\alpha}$ $t_{f,1-\alpha/2}$
quadratische Größen (z.B. Varianzen und Vektoren)	$\chi^2_{1-\alpha}$ $\chi^2_{1-\alpha/2}$	$F_{f_1, f_2, 1-\alpha}$ $F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2}$

2.4.1 Annahme- und Verwerfungsbereich bei statistischen Tests

Einseitig:



Zweiseitig:



$S = (1-\alpha)$: **Sicherheitswahrscheinlichkeit**

$\gamma = (1-\beta)$: **Testgüte**

α : **Irrtumswahrscheinlichkeit für Fehlschluß 1. Art**
„falscher Alarm“

β : **Wahrscheinlichkeit für Fehlschluß 2. Art**
„verschlafener Alarm“

2.4.2 Unterschied zwischen Tests „gegen 0“ und „gegen μ_x “

Test eines Einzelwertes (Mittelwertes) — „theoretisch, einseitig gegen 0“

Theoretische Standardabweichung, „einseitige Fragestellung“ gegen Null

gegeben: \bar{x} mit $\sigma_{\bar{x}}$ ($f_{\bar{x}} = \infty$)

$$\text{Hypothesen: } \begin{aligned} H_0 &: E\{\bar{x}\} = 0 \\ H_A &: E\{\bar{x}\} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Testgröße: } \left| \hat{Y} \right| = \frac{|\bar{x}|}{\sigma_{\bar{x}}}$$

$\alpha = 0,05 \hat{=} \text{ "signifikant"}$

$\alpha = 0,01 \hat{=} \text{ "hochsignifikant"}$

Quantil: $Y_{1-\alpha}$ Wert der "Standard - Normalverteilung" (z.B. aus Tabelle)

$$\text{Entscheidung: } \begin{aligned} \left| \hat{Y} \right| \leq Y_{1-\alpha} &\Rightarrow H_0 \text{ annehmen (} H_A \text{ verwerfen)} \\ \left| \hat{Y} \right| > Y_{1-\alpha} &\Rightarrow H_0 \text{ verwerfen (} H_A \text{ annehmen)} \end{aligned}$$

Test eines Einzelwertes (Mittelwertes) — „theoretisch, einseitig gegen μ_x “

Theoretische Standardabweichung, „einseitige Fragestellung“, gegen Erwartungswert

gegeben: μ_x, \bar{x} mit $\sigma_{\bar{x}}$ ($f_{\bar{x}} = \infty$)

$$\text{Hypothesen: } \begin{aligned} H_0 &: E\{\bar{x}\} = \mu_x \quad \text{bzw.} \quad E\{\bar{x}\} - \mu_x = 0 \\ H_A &: E\{\bar{x}\} > \mu_x \quad \text{bzw.} \quad |E\{\bar{x}\} - \mu_x| > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Testgröße: } \left| \hat{Y} \right| = \frac{|\bar{x} - \mu_x|}{\sigma_{\bar{x}}}$$

$\alpha = 0,05 \hat{=} \text{ "signifikant"}$

$\alpha = 0,01 \hat{=} \text{ "hochsignifikant"}$

Quantil: $Y_{1-\alpha}$ Wert der "Standard - Normalverteilung" (z.B. aus Tabelle)

$$\text{Entscheidung: } \begin{aligned} \left| \hat{Y} \right| \leq Y_{1-\alpha} &\Rightarrow H_0 \text{ annehmen (} H_A \text{ verwerfen)} \\ \left| \hat{Y} \right| > Y_{1-\alpha} &\Rightarrow H_0 \text{ verwerfen (} H_A \text{ annehmen)} \end{aligned}$$

2.4.3 Unterschied zwischen Tests „theoretisch“ und „empirisch“

Test eines Einzelwertes — „theoretisch, zweiseitig gegen μ_x “

Theoretische Standardabweichung, „zweiseitige Fragestellung“, gegen Erwartungswert

gegeben: μ_x , \bar{x} mit $\sigma_{\bar{x}}$ ($f_{\bar{x}} = \infty$)

Hypothesen:	$H_0: E\{\bar{x}\} = \mu_x$ bzw. $E\{\bar{x}\} - \mu_x = 0$	
	$H_A: E\{\bar{x}\} \neq \mu_x$ bzw. $ E\{\bar{x}\} - \mu_x \neq 0$	
Testgröße:	$ \hat{Y} = \frac{ \bar{x} - \mu_x }{\sigma_{\bar{x}}}$	$\alpha = 0,05 \hat{=} \text{"signifikant"}$ $\alpha = 0,01 \hat{=} \text{"hochsignifikant"}$
Quantil:	$Y_{1-\frac{\alpha}{2}}$ Wert der "Standard - Normalverteilung" (z.B. aus Tabelle)	
Entscheidung:	$ \hat{Y} \leq Y_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ annehmen (H_A verwerfen)	
	$ \hat{Y} > Y_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ verwerfen (H_A annehmen)	

Test eines Einzelwertes — „empirisch, zweiseitig gegen μ_x “

Empirische Standardabweichung, „zweiseitige Fragestellung“, gegen Erwartungswert

gegeben: μ_x , \bar{x} mit $s_{\bar{x}}$ und $f_{\bar{x}}$

Hypothesen:	$H_0: E\{\bar{x}\} = \mu_x$ bzw. $E\{\bar{x}\} - \mu_x = 0$	
	$H_A: E\{\bar{x}\} \neq \mu_x$ bzw. $ E\{\bar{x}\} - \mu_x \neq 0$	
Testgröße:	$\hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu_x}{s_{\bar{x}}}$	$\alpha = 0,05 \hat{=} \text{"signifikant"}$ $\alpha = 0,01 \hat{=} \text{"hochsignifikant"}$
Quantil:	$t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}}$ Wert der "Student"-Verteilung (z.B. aus Tabelle)	
Entscheidung:	$\hat{t} \leq t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ annehmen (H_A verwerfen)	
	$\hat{t} > t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ verwerfen (H_A annehmen)	

2.4.4 Tests quadratischer Größen

Test zweier Varianzen (Standardabweichungen)

gegeben: s_1^2 mit f_1 sowie s_2^2 mit f_2

Hypothesen:	$H_0 : E\{s_1^2\} = E\{s_2^2\}$ $H_A : E\{s_1^2\} > E\{s_2^2\}$	Wenn $s_1^2 > s_2^2$
Testgröße:	$\hat{F} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	$\alpha = 0,05 \hat{=} \text{"signifikant"}$ $\alpha = 0,01 \hat{=} \text{"hochsignifikant"}$
Quantil:	$F_{f_1, f_2, 1-\alpha}$	Wert der "Fisher"-Verteilung (z.B. aus Tabelle)
Entscheidung:	$\hat{F} \leq F_{f_1, f_2, 1-\alpha} \Rightarrow H_0 \text{ annehmen (} H_A \text{ verwerfen)}$ $\hat{F} > F_{f_1, f_2, 1-\alpha} \Rightarrow H_0 \text{ verwerfen (} H_A \text{ annehmen)}$	

Test einer empirischen Varianz gegen eine theoretische

gegeben: s_0^2 mit f sowie σ_0^2 mit $f = \infty$

Hypothesen:	$H_0 : E\{s_0^2\} = \sigma_0^2$ $H_A : E\{s_0^2\} > \sigma_0^2$	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">bei $s_0 > \sigma_0$</div>
Testgröße:	$\hat{F} = \frac{s_0^2}{\sigma_0^2}$	$\alpha = 0,05 \hat{=} \text{"signifikant"}$ $\alpha = 0,01 \hat{=} \text{"hochsignifikant"}$
Quantil:	$F_{f_1, f_2, 1-\alpha} = F_{f_1, \infty, 0,95}$	
Entscheidung:	$\hat{F} \leq F_{f_1, f_2, 1-\alpha} \Rightarrow H_0 \text{ annehmen}$ $\hat{F} > F_{f_1, f_2, 1-\alpha} \Rightarrow H_A \text{ annehmen}$	

2.4.5 Tests quadratischer Größen (z.B. von Vektoren)

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\mathbf{X}}_1 \text{ mit } \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_1} \\ \phantom{\hat{\mathbf{X}}_1} \phantom{\text{mit}} \phantom{\mathbf{Q}}_{u,1} \phantom{\phantom{\hat{\mathbf{X}}_1}} \phantom{\phantom{\text{mit}}}} \phantom{\phantom{\mathbf{Q}}}_{u,u} \\ \hat{\mathbf{X}}_2 \text{ mit } \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_2} \\ \phantom{\hat{\mathbf{X}}_2} \phantom{\text{mit}} \phantom{\mathbf{Q}}_{u,1} \phantom{\phantom{\hat{\mathbf{X}}_2}} \phantom{\phantom{\text{mit}}}} \phantom{\phantom{\mathbf{Q}}}_{u,u} \end{array} \right\} \mathbf{d} = \hat{\mathbf{X}}_2 - \hat{\mathbf{X}}_1 \text{ mit } \mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d}} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_1} + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_2} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_1\hat{\mathbf{X}}_2} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}_2\hat{\mathbf{X}}_1}$$

Test quadratischer Form — theoretisch (bei σ_0^2)

Hypothesen: $H_0 : E\{\mathbf{d}\} = \mathbf{0}$
 $H_A : E\{\mathbf{d}\} \neq \mathbf{0}$

$\alpha = 0,05 \hat{=} \text{"signifikant"}$

$\alpha = 0,01 \hat{=} \text{"hochsignifikant"}$

Testgröße: $\hat{\chi}^2 = \frac{\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d}}^+ \cdot \mathbf{d}}{\sigma_0^2}$

Quantil: $\chi_{q,1-\alpha}^2$ Wert der "Chi - quadrat - Verteilung"
 mit $q = Rg(\mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d}}^+) = u-d$ (z.B. aus Tabelle)

Entscheidung: $\hat{\chi}^2 \leq \chi_{q,1-\alpha}^2 \Rightarrow H_0$ annehmen (H_A verwerfen)
 $\hat{\chi}^2 > \chi_{q,1-\alpha}^2 \Rightarrow H_0$ verwerfen (H_A annehmen)

Wenn $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d}}$ regulär ist, wird statt mit $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d}}^+$ direkt mit $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d}}^{-1}$ gerechnet

Test quadratischer Form — empirisch (bei s_0^2)

Hypothesen: $H_0 : E\{\mathbf{d}\} = \mathbf{0}$
 $H_A : E\{\mathbf{d}\} \neq \mathbf{0}$

$f = f_1 + f_2$ $s_0^2 = \frac{s_{0_1}^2 \cdot f_1 + s_{0_2}^2 \cdot f_2}{f}$

Testgröße: $\hat{F} = \frac{\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d}}^+ \cdot \mathbf{d}}{q \cdot s_0^2}$

$\alpha = 0,05 \hat{=} \text{"signifikant"}$

$\alpha = 0,01 \hat{=} \text{"hochsignifikant"}$

Quantil: $F_{q,f,1-\alpha}$ Wert der "Fisher - Verteilung"
 mit $q = Rg(\mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d}}^+) = u-d$ (z.B. aus Tabelle)

Entscheidung: $\hat{F} \leq F_{q,f,1-\alpha} \Rightarrow H_0$ annehmen (H_A verwerfen)
 $\hat{F} > F_{q,f,1-\alpha} \Rightarrow H_0$ verwerfen (H_A annehmen)

Wenn $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d}}$ regulär ist, wird statt mit $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d}}^+$ direkt mit $\mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d}}^{-1}$ gerechnet

3 Varianz-/Kovarianzfortpflanzung (früher „Fehlerfortpflanzung“)

Fall 1: unkorrelierte Beobachtungen, eine Zielgröße

Funktionaler Zusammenhang

$$X = \Phi(\mathbf{L}) = f(l_1, l_2, \dots, l_n)$$

Differentialquotienten („partielle Ableitungen“)

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{L})}{\partial l_i} = \frac{\partial f(l_1, l_2, \dots, l_n)}{\partial l_i} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n$$

Korrelationen werden vernachlässigt !!!!

Totales Differential

$$\sigma_X^2 = \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{L})}{\partial l_1} \right)^2 \cdot \sigma_{l_1}^2 + \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{L})}{\partial l_2} \right)^2 \cdot \sigma_{l_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{L})}{\partial l_n} \right)^2 \cdot \sigma_{l_n}^2$$

Fall 2: (korrelierte) Beobachtungen, (korrelierte) Zielgröße(n)

Funktionaler Zusammenhang

$$\begin{matrix} \mathbf{X} \\ X_{u,1} \end{matrix} = \begin{matrix} \Phi(\mathbf{L}) \\ \Phi_{u,1} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(l_1, l_2, \dots, l_n) \\ f_2(l_1, l_2, \dots, l_n) \\ \vdots \\ f_u(l_1, l_2, \dots, l_n) \end{bmatrix}$$

Differentialquotienten („partielle Ableitungen“)

$$\frac{\partial \Phi_k(\mathbf{L})}{\partial l_i} = \frac{\partial f_k(l_1, l_2, \dots, l_n)}{\partial l_i} \quad \text{für } \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ k = 1, 2, \dots, u \end{matrix}$$

Funktionalmatrix

$$\mathbf{F}_{u,n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L})}{\partial l_1} & \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L})}{\partial l_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L})}{\partial l_n} \\ \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{L})}{\partial l_1} & \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{L})}{\partial l_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{L})}{\partial l_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_u(\mathbf{L})}{\partial l_1} & \frac{\partial \Phi_u(\mathbf{L})}{\partial l_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_u(\mathbf{L})}{\partial l_n} \end{bmatrix}$$

Allgemeines Kovarianzfortpflanzungsgesetz („Allgemeines FFG“)

$$\Sigma_{\mathbf{XX}} = \mathbf{F} \cdot \Sigma_{\mathbf{LL}} \cdot \mathbf{F}^T$$

$u,u \quad u,n \quad n,n \quad n,u$

Berücksichtigung aller Korrelationen => strenge Fortpflanzung !!!

4 Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen (Gauß-Markov-Modell)

Ausgleichungsansatz

$$\Phi(\tilde{\mathbf{X}}) = \tilde{\mathbf{L}}$$

4.1 Funktionales Modell

Anzahl der Beobachtungen:	n
Anzahl der Unbekannten:	u
Genäherte Unbekannte:	$\mathbf{X}_0^T = [(X_1)_0 \quad (X_2)_0 \quad \cdots \quad (X_u)_0]$
Beobachtungsvektor:	$\mathbf{L}_{1,n}^T = [L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_n]$
Wahre Beobachtungen:	$\tilde{\mathbf{L}}_{1,n}^T = [\tilde{L}_1 \quad \tilde{L}_2 \quad \cdots \quad \tilde{L}_n]$
Genäherte Beobachtungen:	$\mathbf{L}_0 = \Phi(\mathbf{X}_0)$ <small style="margin-left: 20px;">$\begin{matrix} n,1 & n,1 & u,1 \end{matrix}$</small>
Gekürzte Beobachtungen:	$\mathbf{l} = \mathbf{L} - \mathbf{L}_0$ <small style="margin-left: 20px;">$\begin{matrix} n,1 & n,1 & n,1 \end{matrix}$</small>
Nichtlineare Verbesserungsgleichungen:	$\hat{L}_j = L_j + v_j = \Phi_j(\hat{\mathbf{X}}_{u,1})$
Konfigurations- bzw. Designmatrix:	$\mathbf{A}_{n,u} = \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right)_0 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{X})}{\partial X_1} \right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{X})}{\partial X_u} \right)_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial \Phi_n(\mathbf{X})}{\partial X_1} \right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial \Phi_n(\mathbf{X})}{\partial X_u} \right)_0 \end{bmatrix}$
Linearisierte Verbesserungsgleichungen:	$\hat{\mathbf{l}}_{n,1} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{n,u \ u,1}$

4.2 Stochastisches Modell

Kovarianzmatrix der Beobachtungen:	$\Sigma_{\mathbf{LL}} = E(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L}}^T) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \rho_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$
Abweichungsvektor:	$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L}} = \mathbf{L} - \tilde{\mathbf{L}}$ <small style="margin-left: 20px;">$\begin{matrix} n,1 & n,1 & n,1 \end{matrix}$</small>
Varianz der Gewichtseinheit (a priori):	σ_0^2
Kofaktormatrix der Beobachtungen:	$\mathbf{Q}_{\mathbf{LL}} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \Sigma_{\mathbf{LL}}$ <small style="margin-left: 20px;">$\begin{matrix} n,n & n,n \end{matrix}$</small>
Gewichtsmatrix:	$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\mathbf{LL}}^{-1}$ <small style="margin-left: 20px;">$\begin{matrix} n,n & n,n \end{matrix}$</small>

4.3 Ausgleichsalgorithmus

Normalgleichungen

$$\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

Normalgleichungsmatrix:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$$

$u,u \quad u,n \quad n,n \quad n,u$

Absolutgliedvektor:

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{l}$$

$u,1 \quad u,n \quad n,n \quad n,1$

Inversion der Normalgleichungsmatrix:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1}$$

$u,u \quad u,u$

Ausgeglichene gekürzte Unbekannte:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n}$$

$u,1 \quad u,u \quad u,1$

Vektor der Verbesserungen:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}$$

$n,1 \quad n,u \quad u,1 \quad n,1$

ist zu minimieren :

$$\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} \rightarrow \min$$

$1,n \quad n,n \quad n,1$

Ausgeglichene gekürzte Beobachtungen:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$$

$n,1 \quad n,1 \quad n,1$

Ausgeglichene Beobachtungen:

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{v}$$

$n,1 \quad n,1 \quad n,1$

Ausgeglichene Unbekannte:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_0 + \hat{\mathbf{x}}$$

$u,1 \quad u,1 \quad u,1$

Ausgleichungsprobe:

$$\hat{\mathbf{L}} \stackrel{!}{=} \Phi(\hat{\mathbf{X}})$$

$n,1 \quad n,1 \quad u,1$

Varianz der Gewichtseinheit (a posteriori):

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}}{n - u}$$

Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Unbekannten:

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = s_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$$

$u,u \quad u,u$

Kofaktormatrix der ausgeglichenen Beobachtungen:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{A}^T$$

$n,n \quad n,u \quad u,u \quad u,n$

Kofaktormatrix der Verbesserungen:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{L}\mathbf{L}} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}}$$

$n,n \quad n,n \quad n,n$

I Höhenbestimmung durch Nivellement

$$\hat{L}_j = L_j + v_j = \Phi_j(\hat{\mathbf{X}}_{u,1})$$

$$\Delta \hat{h}_{ik} = \Delta h_{ik} + v_{ik} = \hat{H}_k - \hat{H}_i$$

Differentialquotienten:

$$\left(\frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial H_i} \right)_0 = -1$$

$$\left(\frac{\partial \Delta h_{ik}}{\partial H_k} \right)_0 = +1$$

II Punktbestimmung durch Streckenmessung

$$\hat{L}_j = L_j + v_j = \Phi_j(\hat{\mathbf{X}}_{u,1})$$

$$\hat{s}_{ik} = s_{ik} + v_{ik} = \sqrt{(\hat{x}_i - \hat{x}_k)^2 + (\hat{y}_i - \hat{y}_k)^2}$$

Differentialquotienten:

$$\left(\frac{\partial s_{ik}}{\partial x_i} \right)_0 = -\cos t_{ik}^0 = +a_{ik}$$

$$\left(\frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} \right)_0 = +\cos t_{ik}^0 = +a_{ki} = -a_{ik}$$

$$\left(\frac{\partial s_{ik}}{\partial y_i} \right)_0 = -\sin t_{ik}^0 = +b_{ik}$$

$$\left(\frac{\partial s_{ik}}{\partial y_k} \right)_0 = +\sin t_{ik}^0 = +b_{ki} = -b_{ik}$$

III Punktbestimmung durch Richtungsmessung

$$\hat{L}_j = L_j + v_j = \Phi_j(\hat{\mathbf{X}}_{u,1})$$

$$\hat{r}_{ik} = r_{ik} + v_{ik} = \arctan \left(\frac{\hat{y}_k - \hat{y}_i}{\hat{x}_k - \hat{x}_i} \right) - \hat{o}_i$$

Differentialquotienten:

$$\left(\frac{\partial r_{ik}}{\partial x_i} \right)_0 = + \frac{\sin t_{ik}^0}{s_{ik}^0} \cdot \rho = +c_{ik}$$

$$\left(\frac{\partial r_{ik}}{\partial x_k} \right)_0 = - \frac{\sin t_{ik}^0}{s_{ik}^0} \cdot \rho = -c_{ik} = +c_{ki}$$

$$\left(\frac{\partial r_{ik}}{\partial y_i} \right)_0 = - \frac{\cos t_{ik}^0}{s_{ik}^0} \cdot \rho = +d_{ik}$$

$$\left(\frac{\partial r_{ik}}{\partial y_k} \right)_0 = + \frac{\cos t_{ik}^0}{s_{ik}^0} \cdot \rho = -d_{ik} = +d_{ki}$$

$$\left(\frac{\partial r_{ik}}{\partial o_i} \right)_0 = -1$$

$$\text{mit: } \rho = \frac{200 \text{ gon}}{\pi}$$

4.3.1 Nachträglich aus den Ausgleichungsergebnissen abgeleitete Größen

Ausgleichungsergebnisse gehen als korrelierte „Beobachtungen“ ins allgemeine Kovarianzfortpflanzungsgesetz ein \Rightarrow strenge Ableitung korrelierter Zielgrößen nach der Ausgleichung

Gegeben (aus der Ausgleichung) :
$$\hat{\mathbf{X}}_{u,1} = \mathbf{X}_0 + \hat{\mathbf{x}}_{u,1} \quad \text{mit} \quad \Sigma_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = s_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$$

Daraus abzuleiten: u^* neue Unbekannte:
$$\hat{\mathbf{X}}_{u^*,1}^* = \Phi(\hat{\mathbf{X}}_{u,1}) \quad \text{mit} \quad \Sigma_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^*}$$

Funktionaler Zusammenhang

$$\hat{\mathbf{X}}_{u^*,1}^* = \Phi_{u^*,1,u,1}(\hat{\mathbf{X}}_{u,1})$$

$$\begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ \vdots \\ X_{u^*}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_u) \\ f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_u) \\ \vdots \\ f_{u^*}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_u) \end{bmatrix}$$

Differentialquotienten („partielle Ableitungen“)

$$\frac{\partial \Phi_k(\hat{\mathbf{X}})}{\partial \hat{x}_i} = \frac{\partial f_k(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_u)}{\partial \hat{x}_i} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, u \\ k = 1, 2, \dots, u^* \end{matrix}$$

Funktionalmatrix

$$\mathbf{F}_{u^*,u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1(\hat{\mathbf{X}})}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \Phi_1(\hat{\mathbf{X}})}{\partial \hat{x}_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1(\hat{\mathbf{X}})}{\partial \hat{x}_u} \\ \frac{\partial \Phi_2(\hat{\mathbf{X}})}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \Phi_2(\hat{\mathbf{X}})}{\partial \hat{x}_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_2(\hat{\mathbf{X}})}{\partial \hat{x}_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{u^*}(\hat{\mathbf{X}})}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \Phi_{u^*}(\hat{\mathbf{X}})}{\partial \hat{x}_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_{u^*}(\hat{\mathbf{X}})}{\partial \hat{x}_u} \end{bmatrix}$$

Allgemeines Kovarianzfortpflanzungsgesetz („Allgemeines FFG“)

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^*} = \mathbf{F} \cdot \Sigma_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{F}^T$$

**Berücksichtigung aller Korrelationen
=> strenge Fortpflanzung !!!**

4.3.2 Freie Netzausgleichung (Vermittelnde Beobachtungen)

Normalgleichungsmatrix:
$$\mathbf{N}_{u,u} = \mathbf{A}_{u,n}^T \cdot \mathbf{P}_{n,n} \cdot \mathbf{A}_{u,n}$$

Absolutgliedvektor:
$$\mathbf{n}_{u,1} = \mathbf{A}_{u,n}^T \cdot \mathbf{P}_{n,n} \cdot \mathbf{l}_{n,1}$$

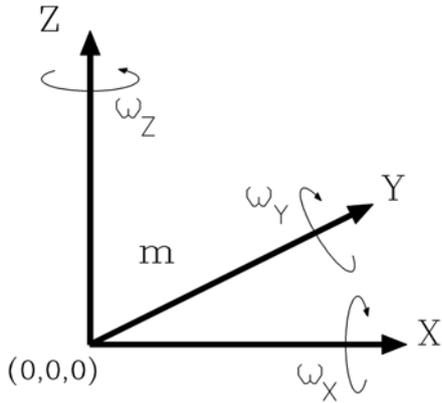
Inversion der Normalgleichungsmatrix:
$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}_{u,u}^{-1}$$
 **Für „freies Netz“ $\det(\mathbf{N}) = 0$
 \Rightarrow **N nicht invertierbar !!!****

Keine Festpunkte \Rightarrow Keine Lagerung des Netzes \Rightarrow Linear-abhängige Spalten in \mathbf{A} und \mathbf{N}



Datumsverfügung: Festlegen der Lagerung, der Orientierung und des Maßstabs des Netzes

Jeder nicht verfügte Datumparameter d führt zu einem Rangdefekt in A bzw. $N \Rightarrow \text{rg}(A)=\text{rg}(N)=u-d$



Maximale Anzahl Datumparameter d :	
3-D Netz:	- 3 Translationen (Verschiebungen in X,Y,Z) ($d=7$) - 3 Rotationen (Drehungen um X,Y,Z) - 1 Maßstab m
2-D Netz:	- 2 Translationen (Verschiebungen in X,Y) ($d=4$) - 1 Rotation (Drehung um Z) - 1 Maßstab m
1-D Netz:	- 1 Translation (Verschiebung in X,Y,Z) ($d=1$)

Gesucht: Alternative zu N^{-1} :

$$\bar{N}_{u,u} = N_{u,u} + B_{u,d}^T \cdot B_{d,u} \quad \text{mit } \det(\bar{N}) \neq 0 \Rightarrow \bar{N}_{u,u}^{-1} \text{ ist möglich!}$$

Pseudoinverse:

$$N_{u,u}^+ = \bar{N}_{u,u}^{-1} - B_{u,d}^T \cdot B_{d,u} = (N_{u,u} + B_{u,d}^T \cdot B_{d,u})^{-1} - B_{u,d}^T \cdot B_{d,u}$$

Inversion der Normalgleichungsmatrix:

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = N_{u,u}^+ \quad \text{Weiter im Algorithmus mit } N_{u,u}^+$$

Ausgeglichene gekürzte Unbekannte:

$$\hat{x}_{u,1} = Q_{\hat{x}\hat{x}} \cdot n_{u,1}$$

$$\vdots$$

Bei der Ausgleichung mit $N_{u,u}^+$ ergibt sich ein Vektor der gekürzten Unbekannten $\hat{x}_{u,1}$, der eine minimale Länge hat ($\|\hat{x}_{u,1}\| = \min$). Dies entspricht der Forderung nach „minimalen Restklaffen“ bei der Helmert-Transformation. Des weiteren gilt für $Q_{\hat{x}\hat{x}} = N_{u,u}^+$, dass diese Matrix eine minimale Spur aufweist ($Sp(Q_{\hat{x}\hat{x}}) \rightarrow \min$). Dies entspricht der Forderung nach minimalen Verbesserungsquadraten.

1-D Netz :	$B_{d,u} = \text{Translation } z \begin{bmatrix} 1/\sqrt{m} & 1/\sqrt{m} & 1/\sqrt{m} & \dots & 1/\sqrt{m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$
-------------------	--

2-D Netz:

$$B_{d,u} = \begin{matrix} \text{Translation } y \\ \text{Translation } x \\ \text{Rotation } z \\ \text{Maßstab } m \end{matrix} \begin{bmatrix} y_1 & x_1 & y_2 & x_2 & y_3 & x_3 & \dots & \dots & y_m & x_m \\ 1/\sqrt{m} & 0 & 1/\sqrt{m} & 0 & 1/\sqrt{m} & 0 & \dots & \dots & 1/\sqrt{m} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{m} & 0 & 1/\sqrt{m} & 0 & 1/\sqrt{m} & \dots & \dots & 0 & 1/\sqrt{m} \\ -q \cdot \eta_1 & q \cdot \zeta_1 & -q \cdot \eta_2 & q \cdot \zeta_2 & -q \cdot \eta_3 & q \cdot \zeta_3 & \dots & \dots & -q \cdot \eta_m & q \cdot \zeta_m \\ q \cdot \zeta_1 & q \cdot \eta_1 & q \cdot \zeta_2 & q \cdot \eta_2 & q \cdot \zeta_3 & q \cdot \eta_3 & \dots & \dots & q \cdot \zeta_m & q \cdot \eta_m \end{bmatrix}$$

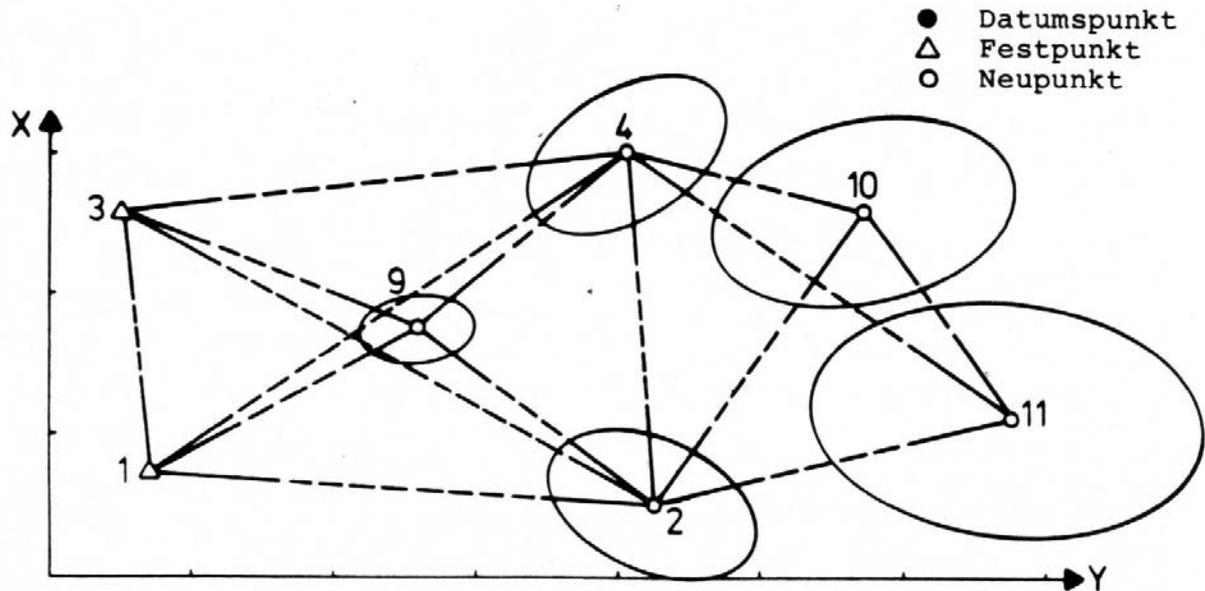
Schwerpunkt : $X_S = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m X_{i^0}$ $Y_S = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m Y_{i^0}$ Normierungsfaktor : $q = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (\zeta_i^2 + \eta_i^2)}}$

Koordinatendifferenzen : $\zeta_i = X_{i^0} - X_S$ $\eta_i = Y_{i^0} - Y_S$



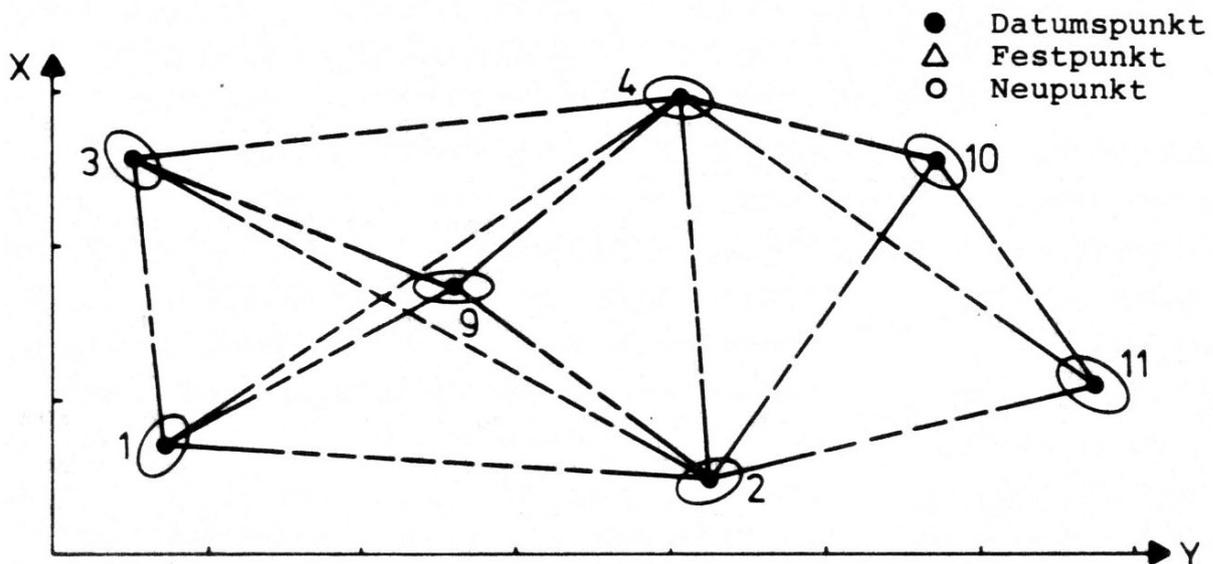
4.4 Unterschiedliche Datumsfestlegungen in einem Lagenetz

4.4.1 Zwangsfreie Netzausgleichung



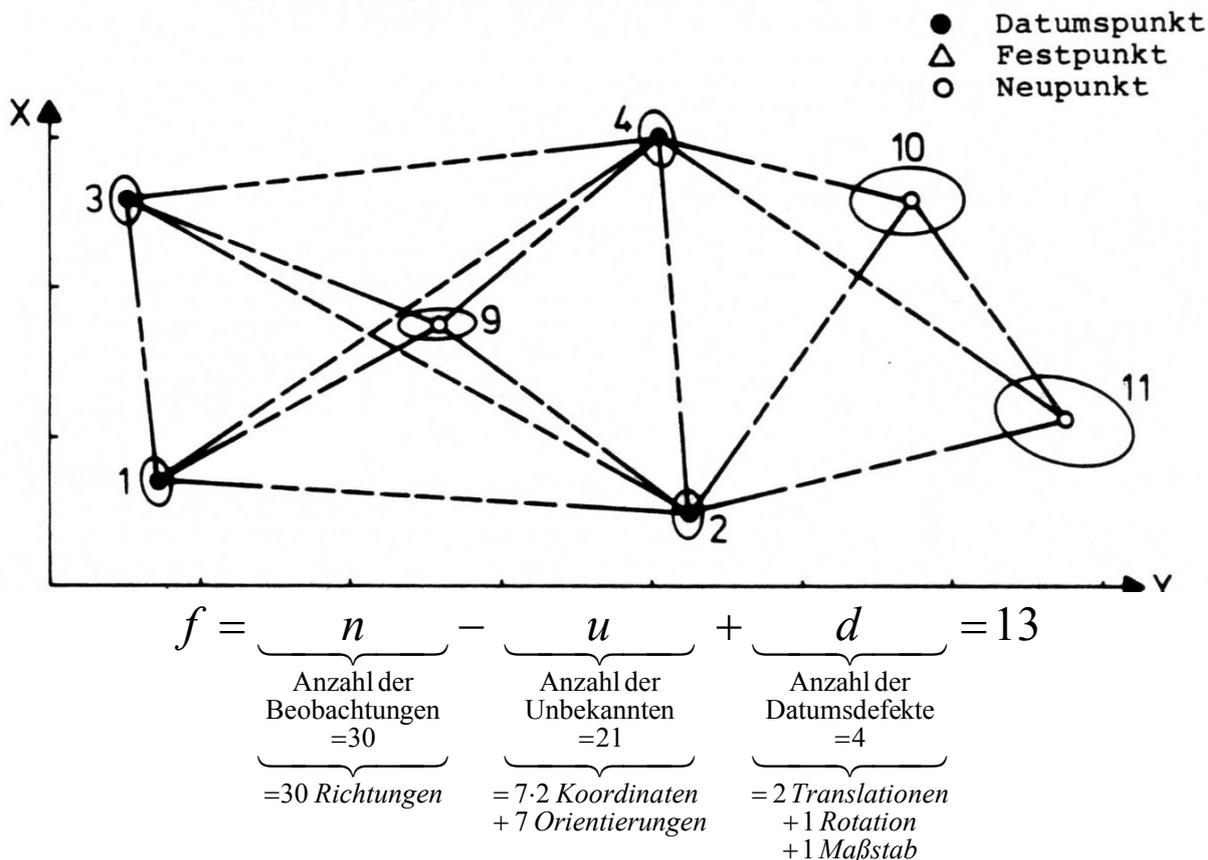
$$f = \underbrace{n}_{\substack{\text{Anzahl der} \\ \text{Beobachtungen} \\ = 30 \\ = 30 \text{ Richtungen}}} - \underbrace{u}_{\substack{\text{Anzahl der} \\ \text{Unbekannten} \\ = 17 \\ = 5 \cdot 2 \text{ Koordinaten} \\ + 7 \text{ Orientierungen}}} + \underbrace{d}_{\substack{\text{Anzahl der} \\ \text{Datumsdefekte} \\ = 0}} = 13$$

4.4.2 Freie Netzausgleichung - Gesamtpurminimierung

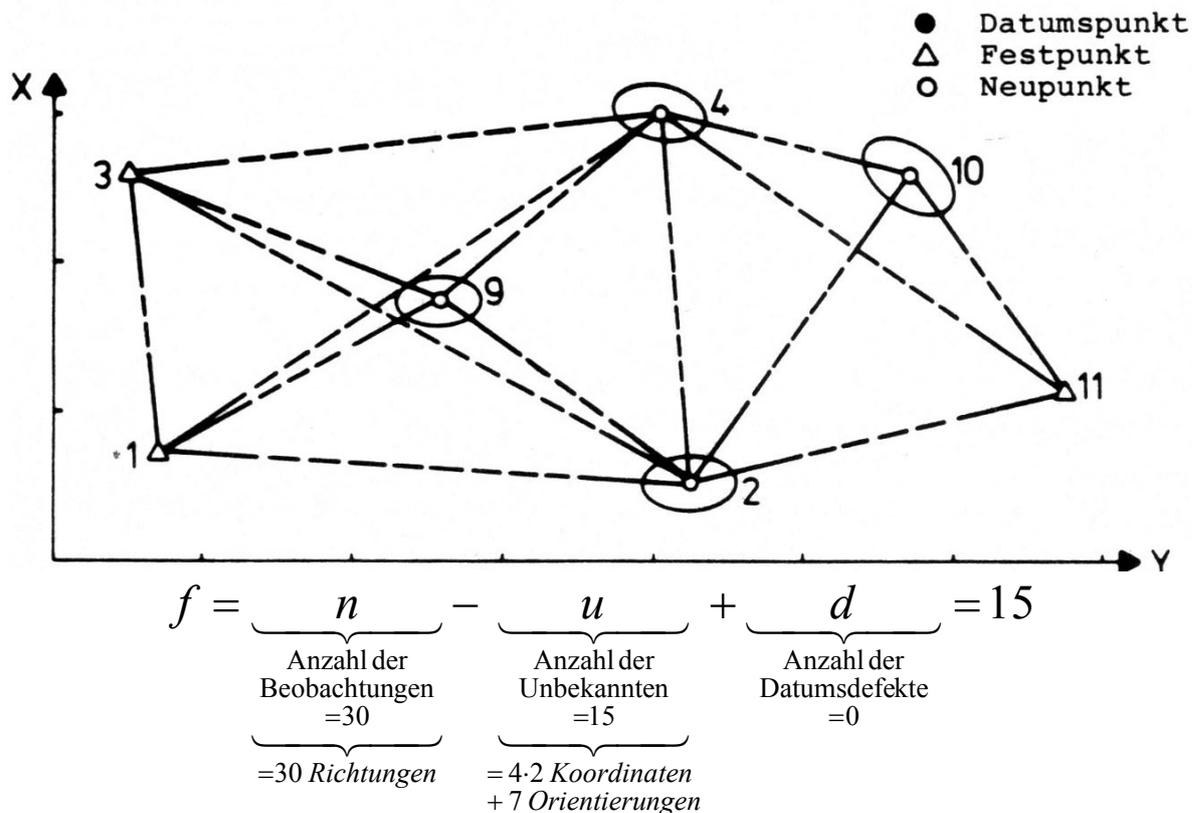


$$f = \underbrace{n}_{\substack{\text{Anzahl der} \\ \text{Beobachtungen} \\ = 30 \\ = 30 \text{ Richtungen}}} - \underbrace{u}_{\substack{\text{Anzahl der} \\ \text{Unbekannten} \\ = 21 \\ = 7 \cdot 2 \text{ Koordinaten} \\ + 7 \text{ Orientierungen}}} + \underbrace{d}_{\substack{\text{Anzahl der} \\ \text{Datumsdefekte} \\ = 4 \\ = 2 \text{ Translationen} \\ + 1 \text{ Rotation} \\ + 1 \text{ Maßstab}}} = 13$$

4.4.3 Freie Netzausgleichung - Teilpurminimierung



4.4.4 Netzausgleichung unter Zwang



(Abbildungen aus Pelzer: *Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung*, Hannover 1985)

5 Allgemeinfeld der Ausgleichsrechnung (Gauß-Helmert-Modell)

Ausgleichungsansatz

$$\Phi(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{X}}) = \mathbf{0}$$

5.1 Funktionales Modell

Anzahl der Beobachtungen:	n
Anzahl der Bedingungsgleichungen:	r
Anzahl der Unbekannten:	u
Genäherte Unbekannte:	$\mathbf{X}_0^T = [(X_1)_0 \quad (X_2)_0 \quad \dots \quad (X_u)_0]$
Beobachtungsvektor:	$\mathbf{L}_{1,n}^T = [L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_n]$
Wahre Beobachtungen:	$\tilde{\mathbf{L}}_{1,n}^T = [\tilde{L}_1 \quad \tilde{L}_2 \quad \dots \quad \tilde{L}_n]$
Widerspruchsvektor:	$\mathbf{w}_{r,1} = \Phi_{r,1}(\mathbf{L}_{n,1}, \mathbf{X}_{u,1})$

Konfigurations- bzw. Designmatrix:

$$\mathbf{A}_{r,u} = \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right)_0 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_1} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_u} \right)_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial \Phi_r(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_1} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \Phi_r(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_u} \right)_0 \end{bmatrix}$$

Modellmatrix:

$$\mathbf{B}_{r,n} = \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{L}} \right)_0 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_1} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_n} \right)_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial \Phi_r(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_1} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \Phi_r(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_n} \right)_0 \end{bmatrix}$$

Ausgleichsbedingung:

$$\Phi_{r,1}(\hat{\mathbf{L}}_{n,1}, \hat{\mathbf{X}}_{u,1}) = \mathbf{0}$$

Linearisiertes funktionales Modell:

$$\mathbf{B}_{r,n} \cdot \mathbf{v}_{n,1} + \mathbf{A}_{r,u} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{u,1} + \mathbf{w}_{r,1} = \mathbf{0}$$

$$\underbrace{\Phi_{r,1}(\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{X}})}_{\mathbf{B}_{r,n}} = \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{L}} \right)_0}_{\mathbf{B}_{r,n}} \cdot \underbrace{(\hat{\mathbf{L}} - \mathbf{L})}_{\mathbf{v}_{n,1}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right)_0}_{\mathbf{A}_{r,u}} \cdot \underbrace{(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}_0)}_{\hat{\mathbf{x}}_{u,1}} + \underbrace{\Phi(\mathbf{L}, \mathbf{X}_0)}_{\mathbf{w}_{r,1}} = \mathbf{0}$$

5.4 Stochastisches Modell

Kovarianzmatrix der Beobachtungen:

$$\Sigma_{LL} = E(\boldsymbol{\varepsilon}_L, \boldsymbol{\varepsilon}_L^T) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \rho_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Abweichungsvektor:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{L} - \tilde{\mathbf{L}}_{n,1}$$

Varianz der Gewichtseinheit (a priori):

$$\sigma_0^2$$

Kofaktormatrix der Beobachtungen:

$$\mathbf{Q}_{LL} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \Sigma_{LL}$$

5.3 Ausgleichsalgorithmus

Normalgleichungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{B}^T & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Auflösung der Normalgleichungen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Elemente der Blockmatrix:

$$\mathbf{Q}_{22} = \left[\mathbf{A}^T \cdot \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{B}^T \right)^{-1} \cdot \mathbf{A} \right]_{r,u}$$

$$\mathbf{Q}_{12} = - \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{B}^T \right)^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{22}$$

$$\mathbf{Q}_{21} = \mathbf{Q}_{12}$$

$$\mathbf{Q}_{11} = - \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{B}^T \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{E} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{21} \right)$$

Korrelatenvektor:

$$\mathbf{k}_{r,1} = -\mathbf{Q}_{11} \cdot \mathbf{w}_{r,r,1}$$

Vektor der Verbesserungen:

$$\mathbf{v}_{n,1} = \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{k}_{n,r,1}$$

Ausgegliche gekürzte Unbekannte:

$$\hat{\mathbf{x}}_{u,1} = \mathbf{Q}_{21} \cdot \mathbf{w}_{u,r,1}$$

Ausgegliche Unbekannte:

$$\hat{\mathbf{X}}_{u,1} = \mathbf{X}^o_{n,n} + \hat{\mathbf{x}}_{u,1}$$

Ausgegliche Beobachtungen:

$$\hat{\mathbf{L}}_{n,1} = \mathbf{L}_{n,1} + \mathbf{v}_{n,1}$$

Schlussprobe:

$$\Phi_{r,1}(\hat{\mathbf{L}}_{n,1}, \hat{\mathbf{X}}_{u,1}) \stackrel{!}{=} 0$$

Varianz der Gewichtseinheit (a posteriori):

$$s_0^2 = \frac{-\mathbf{k}_{1,r}^T \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{r,1} + \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{u,1} \end{pmatrix}}{r - u}$$

Kofaktormatrix der ausgeglichenen Unbekannten:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}_{u,u} = -\hat{\mathbf{Q}}_{22}_{u,u}$$

Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Unbekannten:

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}_{u,u} = s_0^2 \cdot \hat{\mathbf{Q}}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}_{u,u}$$

Kofaktormatrix der Verbesserungen:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}_{n,n} = \mathbf{Q}_{LL}_{n,n} \cdot \mathbf{B}^T_{n,r} \cdot \mathbf{Q}_{11}_{r,r} \cdot \mathbf{B}_{r,n} \cdot \mathbf{Q}_{LL}_{n,n}$$

Kofaktormatrix der ausgeglichenen Beobachtungen:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}}_{n,n} = \mathbf{Q}_{LL}_{n,n} - \mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}_{n,n}$$

Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Beobachtungen:

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}}_{n,n} = s_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}}_{n,n}$$

6 Ausgleichung bedingter Beobachtung

Ausgleichungsansatz

$$\Phi_i(\tilde{\mathbf{L}}) = 0$$

6.1 Funktionales Modell

Anzahl der Beobachtungen: n

Anzahl der Bedingungsgleichungen: r

Beobachtungsvektor: $\mathbf{L}_{1,n}^T = [L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_n]$

Wahre Beobachtungen: $\tilde{\mathbf{L}}_{1,n}^T = [\tilde{L}_1 \quad \tilde{L}_2 \quad \dots \quad \tilde{L}_n]$

Widerspruchsvektor: $\mathbf{w}_{r,1} = \Phi_{r,1}(\mathbf{L}_{u,1})$

Modellmatrix: $\mathbf{B}_{r,n} = \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{L})}{\partial \mathbf{L}} \right) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L})}{\partial L_1} \right) & \dots & \left(\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L})}{\partial L_n} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial \Phi_r(\mathbf{L})}{\partial L_1} \right) & \dots & \left(\frac{\partial \Phi_r(\mathbf{L})}{\partial L_n} \right) \end{bmatrix}$

Ausgleichungsbedingung: $\Phi_{r,1}(\hat{\mathbf{L}}_{n,1}) = 0$

Linearisiertes funktionales Modell: $\mathbf{B}_{r,n} \cdot \mathbf{v}_{n,1} + \mathbf{w}_{r,1} = 0$

$$\Phi(\hat{\mathbf{L}}) = \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{L})}{\partial \mathbf{L}} \right)}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{(\hat{\mathbf{L}} - \mathbf{L})}_{\mathbf{v}} + \underbrace{\Phi(\mathbf{L})}_{\mathbf{w}} = 0$$

6.2 Stochastisches Modell

Kovarianzmatrix der Beobachtungen: $\Sigma_{LL} = E(\boldsymbol{\varepsilon}_L, \boldsymbol{\varepsilon}_L^T) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \dots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \dots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \rho_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$

Abweichungsvektor: $\boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{L}_{n,1} - \tilde{\mathbf{L}}_{n,1}$

Varianz der Gewichtseinheit (a priori): σ_0^2

Kofaktormatrix der Beobachtungen: $\mathbf{Q}_{LL} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \Sigma_{LL}$

7 Informationen der Kovarianz bzw. der Kofaktormatrix

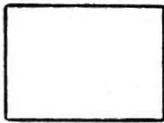
q_{x1x1}	q_{x1y1}	q_{x1x2}	q_{x1y2}	q_{x1x3}	q_{x1y3}	\dots	q_{x1xp}	q_{x1yp}
q_{y1x1}	q_{y1y1}	q_{y1x2}	q_{y1y2}	q_{y1x3}	q_{y1y3}	\dots	q_{y1xp}	q_{y1yp}
q_{x2x1}	q_{x2y1}	q_{x2x2}	q_{x2y2}	q_{x2x3}	q_{x2y3}	\dots	q_{x2xp}	q_{x2yp}
q_{y2x1}	q_{y2y1}	q_{y2x2}	q_{y2y2}	q_{y2x3}	q_{y2y3}	\dots	q_{y2xp}	q_{y2yp}
q_{x3x1}	q_{x3y1}	q_{x3x2}	q_{x3y2}	q_{x3x3}	q_{x3y3}	\dots	q_{x3xp}	q_{x3yp}
q_{y3x1}	q_{y3y1}	q_{y3x2}	q_{y3y2}	q_{y3x3}	q_{y3y3}	\dots	q_{y3xp}	q_{y3yp}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
q_{xpx1}	q_{xpy1}	q_{xpx2}	q_{xpy2}	q_{xpx3}	q_{xpy3}	\dots	q_{xpxp}	q_{xpyp}
q_{ypx1}	q_{ypy1}	q_{ypx2}	q_{ypy2}	q_{ypx3}	q_{ypy3}	\dots	q_{ypxp}	$q_{ypy p}$



- Standardabweichung einzelner Koordinaten
- mittlere Koordinatengenauigkeit

$$s_{x_i, x_i} = +\sqrt{s_{x_i, x_i}^2}$$

$$= +s_0 \cdot \sqrt{q_{x_i, x_i}}$$



- Fehlerellipsen
- Konfidenzellipsen
- Punktfehler

Helmertscher $s_{P_i}^H = +\sqrt{s_{x_i, x_i}^2 + s_{y_i, y_i}^2}$

Punktfehler $= +s_0 \cdot \sqrt{Sp(\mathbf{Q}_{ii})}$



- relative Fehlerellipsen
- relative Konfidenzellipsen
- o.B.d.A.: Funktionen der Unbekannten

Werkmeisterscher $s_{P_i}^W = +s_0 \cdot \sqrt{\lambda_{i_1} \cdot \lambda_{i_2}}$

Punktfehler $= +s_0 \cdot \sqrt{\det(\mathbf{Q}_{ii})}$



- Gesamte Kofaktormatrix:
- Konfidenzhyperellipsoid
 - Rayleigh-Relation
 - Eigenwertkriterien
 - Hauptkomponentenanalyse
 - Kriteriummatrizen

(aus Pelzer: *Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung*, Hannover 1985)

„Ausgleichungs-Rep“

Im WS 2008/2009

Karl Foppe



Inhalt

Grundlagen

- Matrizenalgebra
- Statische Grundbegriffe
- Varianz-/Kovarianzfortpflanzung
- Statistische Tests

Ausgleichungsmodelle (+Beispiele)

- Ausgleichung Vermittelnder Beobachtungen (Gauß-Markov-Modell)
- Allgemeinfall der Ausgleichsrechnung (Gauß-Helmert-Modell)
- Ausgleichung Bedingter Beobachtungen
- Netzausgleichung/Datumsverfügung

Anwendungen

- „Regressionsmodelle“
- „Homogenisierung von Flurkarten“

Zur Interpretation der Ausgleichungsergebnisse



Beispiel: Konfidenzbereich eines Mittelwertes

Strecke sei n mal beobachtet

$$L = [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_n]$$



$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 876,543 \\ 876,545 \\ 876,540 \\ 876,544 \end{bmatrix}_{[m]} \quad \text{mit } \bar{L} = \sum_{i=1}^n l_i = 876,543 \text{ m}$$

$$s_L = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}{n-1}} = 2,16 \text{ mm}$$

$$s_{\bar{L}} = \frac{s_L}{\sqrt{n}} = 1,08 \text{ mm}$$

$$\alpha = 0,05, \quad f = n - 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}} = t_{3, 0,975} = 3,18$$

Konfidenzbereich:

$$P\left(\bar{L} - t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_{\bar{L}} \leq \mu_{\bar{L}} \leq \bar{L} + t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_{\bar{L}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P(876,543 \text{ m} - 3,18 \cdot 1,08 \text{ mm} \leq \mu_{\bar{L}} \leq 876,543 \text{ m} + 3,18 \cdot 1,08 \text{ mm}) = 0,95$$

$$P(876,5419 \text{ m} \leq \mu_{\bar{L}} \leq 876,5441 \text{ m}) = 95\%$$

Beispiel: Konfidenzbereich einer Standardabweichung

$$s = 15,1 \text{ mm}$$

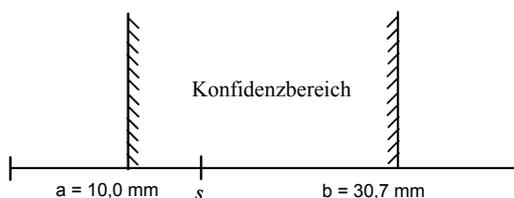
$$n = 8$$

$$f = n - 1 = 7$$

$$\alpha = 0,05$$

$$\chi_{7, 0,025}^2 = 1,690$$

$$\chi_{7, 0,975}^2 = 16,013$$



stark unsymmetrischer
Konfidenzbereich

$$E(s^2) = \sigma^2$$

$$E(s) < \sigma$$

Konfidenzbereich für σ :

gegeben: s mit f

$$P\left(s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f, 1-\frac{\alpha}{2}}^2}} \leq \sigma \leq s \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f, \frac{\alpha}{2}}^2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(15,1 \text{ mm} \cdot \sqrt{\frac{7}{16,031}} \leq \sigma \leq 15,1 \text{ mm} \cdot \sqrt{\frac{7}{1,690}}\right) = 0,95$$

$$P(10,0 \text{ mm} \leq \sigma \leq 30,7 \text{ mm}) = 95\%$$

Beispiel zur Kovarianzfortpflanzung (1)

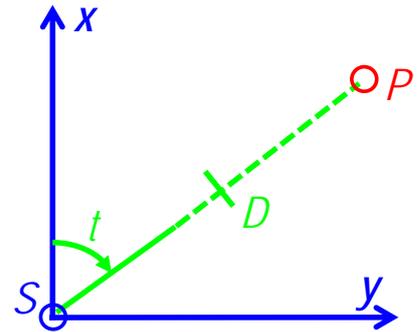
Polares Anhängen

$$t = 77,1234 \text{ gon} \quad \sigma_t = 3,0 \text{ mgon}$$

$$D = 987,654 \text{ m} \quad \sigma_s = 20,0 \text{ mm}$$

$$y_P = y_0 + D \cdot \sin t$$

$$x_P = x_0 + D \cdot \cos t$$



gegeben:

Beobachtungsvektor

$$\mathbf{L}_{n,1} = \begin{bmatrix} D \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 987,654 \text{ m} \\ 77,1234 \text{ gon} \end{bmatrix}$$

Kovarianzmatrix der Beobachtungen

$$\Sigma_{n,n}^{LL} = \begin{bmatrix} \sigma_D^2 & \sigma_{Dt} \\ \sigma_{tD} & \sigma_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400,0 \text{ mm}^2 & 0 \\ 0 & 9,0 \text{ mgon}^2 \end{bmatrix}$$

gesucht:

Unbekanntenvektor

$$\mathbf{X}_{u,1} = \begin{bmatrix} y_P \\ x_P \end{bmatrix}$$

Kovarianzmatrix der Beobachtungen

$$\Sigma_{u,u}^{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_P}^2 & \sigma_{y_P x_P} \\ \sigma_{x_P y_P} & \sigma_{x_P}^2 \end{bmatrix}$$

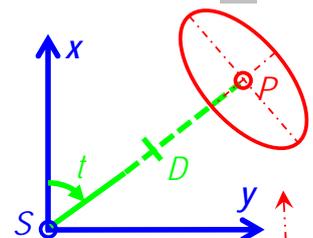


Beispiel zur Kovarianzfortpflanzung (2)

Funktionaler Zusammenhang:

$$\mathbf{X} = \Phi(\mathbf{L}) \quad \text{mit } \mathbf{L}_{n,1} = \begin{bmatrix} D \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_P \\ x_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(\mathbf{L}) \\ \Phi_2(\mathbf{L}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(D, t) \\ f_2(D, t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_P \\ x_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 + D \cdot \sin t \\ x_0 + D \cdot \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 924,5700 \\ 347,3193 \end{bmatrix}_{[m]}$$



Differentialquotienten („partielle Ableitungen“)

$$\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L})}{\partial l_1} = \frac{\partial y_P}{\partial D} = \sin t \quad \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L})}{\partial l_2} = \frac{\partial y_P}{\partial t} = D \cdot \cos t$$

$$\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{L})}{\partial l_1} = \frac{\partial x_P}{\partial D} = \cos t \quad \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{L})}{\partial l_2} = \frac{\partial x_P}{\partial t} = -D \cdot \sin t$$

Funktionalmatrix

$$\mathbf{F}_{u,n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L})}{\partial l_1} & \frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L})}{\partial l_2} \\ \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{L})}{\partial l_1} & \frac{\partial \Phi_2(\mathbf{L})}{\partial l_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t & D \cdot \cos t \cdot \frac{1}{\rho} \\ \cos t & -D \cdot \sin t \cdot \frac{1}{\rho} \end{bmatrix}$$

mit $\rho = \frac{200 \text{ gon}}{\pi}$

Allgemeines Kovarianzfortpflanzungsgesetz

$$\Sigma_{XX} = \mathbf{F} \cdot \Sigma_{LL} \cdot \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 0,936127 & 5,455680 \\ 0,351661 & -14,523112 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 400,0 \text{ mm}^2 & 0 \\ 0 & 9,0 \text{ mgon}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,936127 & 0,351661 \\ 5,455680 & -14,523112 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 618,4138 & -581,4212 \\ -581,4212 & 1947,7531 \end{bmatrix}_{[mm^2]}$$

$$\sigma_{y_P} = +\sqrt{\sigma_{y_P}^2} = \sqrt{618,4138} = 24,8679 \text{ mm}$$

$$\sigma_{x_P} = +\sqrt{\sigma_{x_P}^2} = \sqrt{1947,7531} = 44,1334 \text{ mm}$$

$$\rho_{y_P x_P} = \frac{\sigma_{y_P x_P}}{\sigma_{y_P} \sigma_{x_P}} = \frac{-581,4212}{24,8679 \cdot 44,1334} = -0,53$$

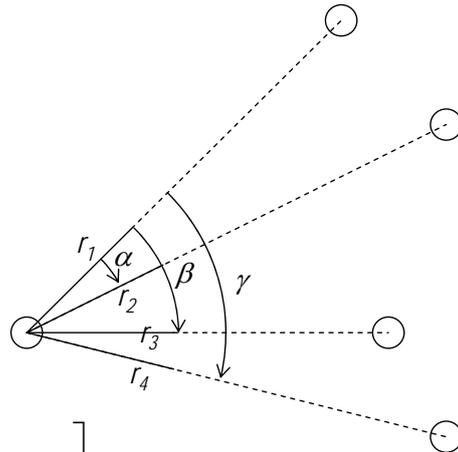


Beispiel Kovarianzfortpflanzung – „Richtungssatz → Winkel“

Beobachtungsvektor:
(Richtungen) $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}_{[gon]}$

$$\sigma_{r_1} = \sigma_{r_2} = \sigma_{r_3} = \sigma_{r_4} = 0,5 \text{ mgon}$$

$$\Sigma_{LL} = \begin{bmatrix} \sigma_{r_1}^2 & & & \\ & \sigma_{r_2}^2 & & \\ & & \sigma_{r_3}^2 & \\ & & & \sigma_{r_4}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 & & & \\ & 0,25 & & \\ & & 0,25 & \\ & & & 0,25 \end{bmatrix}_{[mgon^2]}$$



Frage: Wie groß sind α , β und γ sowie die dazugehörigen Genauigkeiten?

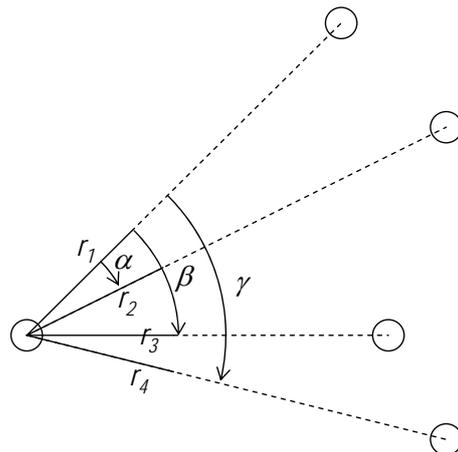
Beispiel Kovarianzfortpflanzung – „Richtungssatz → Winkel“

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_{3,1} = \begin{bmatrix} \Phi_1(\mathbf{L}) \\ \Phi_2(\mathbf{L}) \\ \Phi_3(\mathbf{L}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - r_1 \end{bmatrix}_{[gon]}$$

Allgemeines Kovarianzfortpflanzungsgesetz

$$\mathbf{F} = \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{L})}{\partial \mathbf{L}} \right)_{3,4} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_2} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_3} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_4} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial r_2} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial r_3} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial r_4} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial r_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial r_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial r_3} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial r_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{XX} = \mathbf{F} \cdot \Sigma_{LL} \cdot \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{bmatrix}_{[mgon^2]} = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & \sigma_{\alpha\beta} & \sigma_{\alpha\gamma} \\ \sigma_{\beta\alpha} & \sigma_\beta^2 & \sigma_{\beta\gamma} \\ \sigma_{\gamma\alpha} & \sigma_{\gamma\beta} & \sigma_\gamma^2 \end{bmatrix}$$



Beispiel Kovarianzfortpflanzung – „Richtungssatz → Winkel“

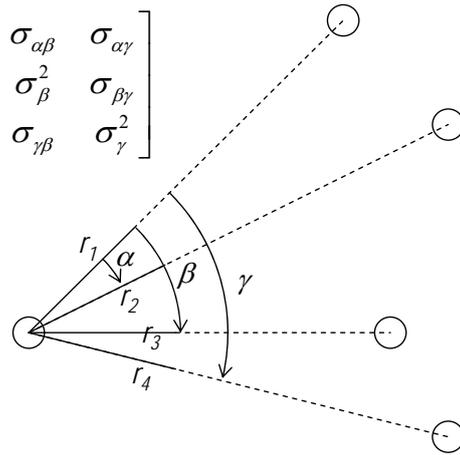
$$\Sigma_{\mathbf{XX}} = \mathbf{F} \cdot \Sigma_{\mathbf{LL}} \cdot \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{bmatrix} \underset{[mgon^2]}{=} \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & \sigma_{\alpha\beta} & \sigma_{\alpha\gamma} \\ \sigma_{\beta\alpha} & \sigma_\beta^2 & \sigma_{\beta\gamma} \\ \sigma_{\gamma\alpha} & \sigma_{\gamma\beta} & \sigma_\gamma^2 \end{bmatrix}$$

Standardabweichungen:

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sqrt{0,5} = 0,71 \text{ mgon}$$

Korrelationen:

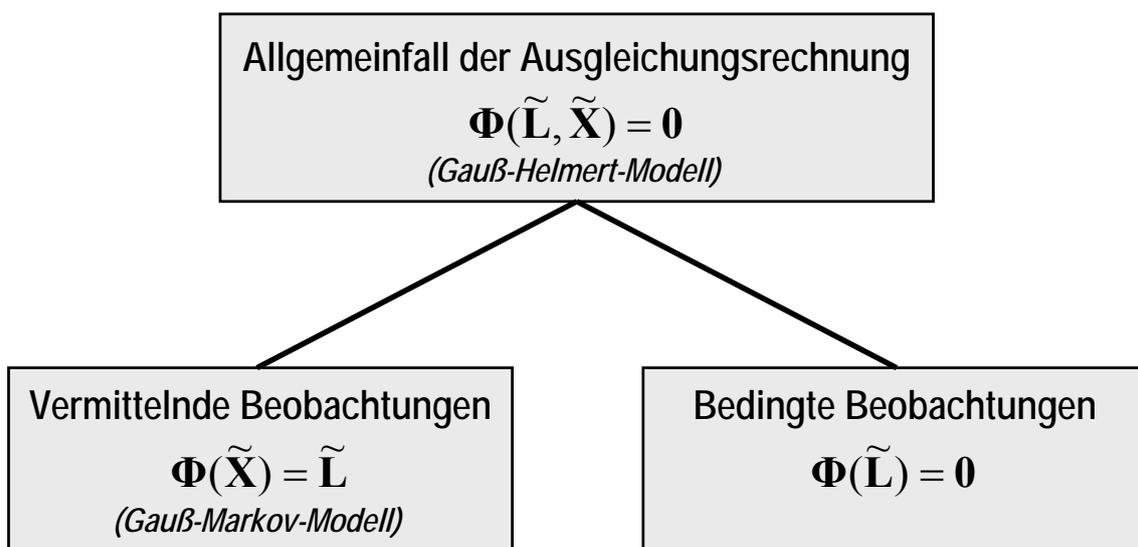
$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\sqrt{\sigma_\alpha^2 \cdot \sigma_\beta^2}} = 0,5 \quad \rho_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\gamma} = \rho_{\beta\gamma} = 0,5$$



Ergebnisse der Kovarianzfortpflanzung können als „abgeleitete Beobachtungen“ in weitere Berechnungen eingehen:

$$\mathbf{L}_{n^*,1}^* = \mathbf{X}_{u,1} \quad \text{und} \quad \Sigma_{n^*,n^*}^{\mathbf{LL}^*} = \Sigma_{u,u}^{\mathbf{XX}} \quad \text{mit} \quad n^* = u$$

Klassifizierung der Ausgleichsmodelle



Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen

Vermittelnde Beobachtungen

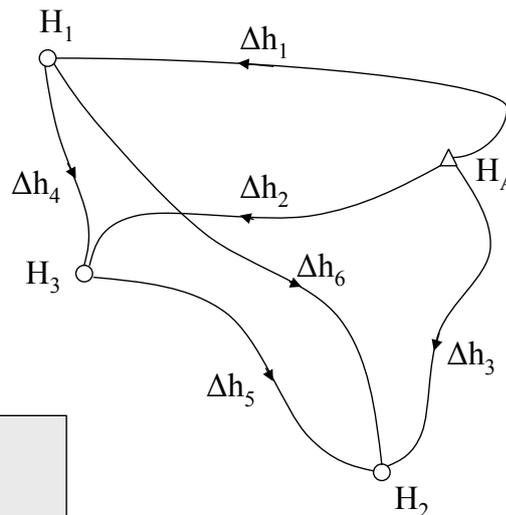
$$\Phi(\tilde{\mathbf{X}}) = \tilde{\mathbf{L}}$$

(Gauß-Markov-Modell)

Beispiel „Vermittelnde Beob.“ – Nivellementsnetz

Beobachtungsvektor

$$\mathbf{L}_{6,1} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4468 \\ 1,6049 \\ 1,9018 \\ 0,7561 \\ 0,2972 \\ 1,4546 \end{bmatrix} [m]$$



$$H_A = 102,1630m$$

Länge der Niv.-Linien

$$D_{\Delta h_i} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 3,1 \\ 2,4 \\ 1,9 \\ 0,7 \\ 2,8 \end{bmatrix} [km] \quad \sigma_{km} = 0,4 \frac{mm}{\sqrt{km}}$$

$$\sigma_i = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_i} [km]}$$

Unbekanntevektor

$$\hat{\mathbf{X}}_{3,1} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \\ \hat{H}_3 \end{bmatrix} [m] \quad \text{mit} \quad \Sigma_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{H}_1}^2 & \sigma_{\hat{H}_1\hat{H}_2} & \sigma_{\hat{H}_1\hat{H}_3} \\ \sigma_{\hat{H}_2\hat{H}_1} & \sigma_{\hat{H}_2}^2 & \sigma_{\hat{H}_2\hat{H}_3} \\ \sigma_{\hat{H}_3\hat{H}_1} & \sigma_{\hat{H}_3\hat{H}_2} & \sigma_{\hat{H}_3}^2 \end{bmatrix}$$

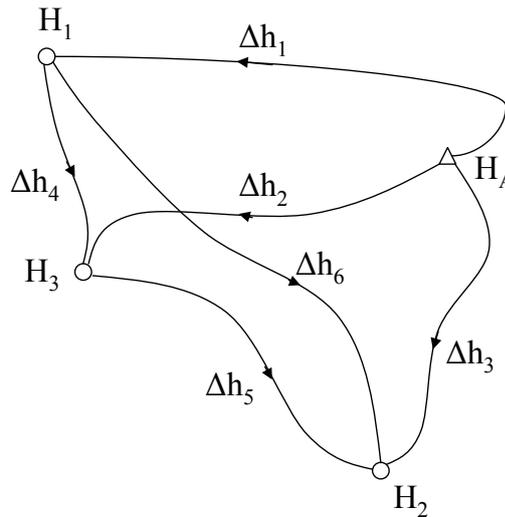
Beispiel „Vermittelnde Beob.“ – Freiheitsgrade

Beobachtungsvektor

$$\mathbf{L}_{6,1} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4468 \\ 1,6049 \\ 1,9018 \\ 0,7561 \\ 0,2972 \\ 1,4546 \end{bmatrix}_{[m]}$$

Unbekanntevektor

$$\hat{\mathbf{X}}_{3,1} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \\ \hat{H}_3 \end{bmatrix}_{[m]}$$



$$H_A = 102,1630m$$

$$f = \underbrace{6}_{n = \text{Anzahl der Beobachtungen}} - \underbrace{3}_{u = \text{Anzahl der Unbekannten}} + \underbrace{0}_{d = \text{Anzahl der Datumsdefekte}} = 3$$



Beispiel „Vermittelnde Beob.“ – Verbesserungsgleichungen

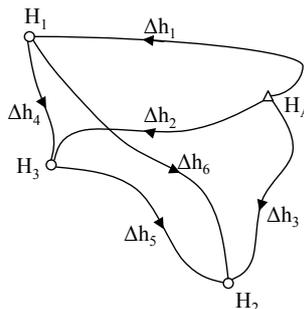
Beobachtungen

$$\mathbf{L}_{6,1} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix}_{[m]}$$

Unbekannte

$$\hat{\mathbf{X}}_{3,1} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \\ \hat{H}_3 \end{bmatrix}_{[m]}$$

$$H_A = 102,1630m$$



Funktionaler Zusammenhang

$$\tilde{\mathbf{L}}_{n,1} = \Phi_{n,1,u,1}(\tilde{\mathbf{X}})$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \\ \vdots \\ \tilde{L}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_u) \\ \Phi_2(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_u) \\ \vdots \\ \Phi_n(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_u) \end{bmatrix}$$

Verbesserungsgleichungen

$$\hat{\mathbf{L}}_{6,1} = \mathbf{L}_{6,1} + \mathbf{v}_{6,1} = \Phi_{n,1,u,1}(\hat{\mathbf{X}})$$

("nicht linear")

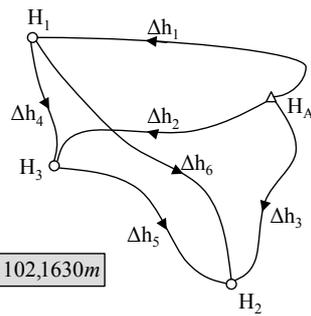


$$\begin{bmatrix} \hat{\Delta h}_1 \\ \hat{\Delta h}_2 \\ \hat{\Delta h}_3 \\ \hat{\Delta h}_4 \\ \hat{\Delta h}_5 \\ \hat{\Delta h}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 - H_A \\ \hat{H}_3 - H_A \\ \hat{H}_2 - H_A \\ \hat{H}_3 - \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 - \hat{H}_3 \\ \hat{H}_2 - \hat{H}_1 \end{bmatrix}$$



Beispiel „Vermittelnde Beob.“ – Näherungswerte

Beobachtungsvektor

$$\mathbf{L}_{6,1} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4468 \\ 1,6049 \\ 1,9018 \\ 1,1591 \\ 0,2972 \\ 1,4546 \end{bmatrix} [m]$$


$$H_A = 102,1630m$$

genäherte Unbekannte aus

- ... Kartenwerken
- ... vorhandenen Koordinaten
- ... Berechnung aus dem Beobachtungsmaterial in verschiedenen Kombinationen
- ...

genäherte Unbekannte

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} H_{1^0} \\ H_{2^0} \\ H_{3^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_A + \Delta h_1 \\ H_A + \Delta h_3 \\ H_A + \Delta h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102,6098 \\ 104,0648 \\ 103,7679 \end{bmatrix} [m]$$

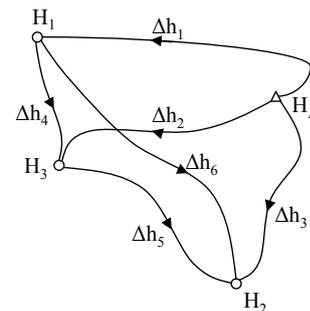
genäherte Beobachtungen

$$\mathbf{L}_0 = \Phi(\mathbf{X}_0) = \begin{bmatrix} \Delta h_{1^0} \\ \Delta h_{2^0} \\ \Delta h_{3^0} \\ \Delta h_{4^0} \\ \Delta h_{5^0} \\ \Delta h_{6^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1^0} - H_A \\ H_{3^0} - H_A \\ H_{2^0} - H_A \\ H_{3^0} - H_{1^0} \\ H_{2^0} - H_{3^0} \\ H_{2^0} - H_{1^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4468 \\ 1,6049 \\ 1,9018 \\ 1,1581 \\ 0,2969 \\ 1,4550 \end{bmatrix} [m]$$

Beispiel „Vermittelnde Beob.“ – Designmatrix

$$\mathbf{L}_0 = \Phi(\mathbf{X}_0) = \begin{bmatrix} \Delta h_{1^0} \\ \Delta h_{2^0} \\ \Delta h_{3^0} \\ \Delta h_{4^0} \\ \Delta h_{5^0} \\ \Delta h_{6^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1^0} - H_A \\ H_{3^0} - H_A \\ H_{2^0} - H_A \\ H_{3^0} - H_{1^0} \\ H_{2^0} - H_{3^0} \\ H_{2^0} - H_{1^0} \end{bmatrix} [m]$$

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} H_{1^0} \\ H_{2^0} \\ H_{3^0} \end{bmatrix} [m]$$



$$\mathbf{A}_{6,3} = \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right)_0 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \phi_1(\mathbf{X})}{\partial X_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_1(\mathbf{X})}{\partial X_2} \right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_1(\mathbf{X})}{\partial X_3} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial \phi_2(\mathbf{X})}{\partial X_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_2(\mathbf{X})}{\partial X_2} \right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_2(\mathbf{X})}{\partial X_3} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial \phi_3(\mathbf{X})}{\partial X_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_3(\mathbf{X})}{\partial X_2} \right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_3(\mathbf{X})}{\partial X_3} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial \phi_4(\mathbf{X})}{\partial X_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_4(\mathbf{X})}{\partial X_2} \right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_4(\mathbf{X})}{\partial X_3} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial \phi_5(\mathbf{X})}{\partial X_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_5(\mathbf{X})}{\partial X_2} \right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_5(\mathbf{X})}{\partial X_3} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial \phi_6(\mathbf{X})}{\partial X_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_6(\mathbf{X})}{\partial X_2} \right)_0 & \left(\frac{\partial \phi_6(\mathbf{X})}{\partial X_3} \right)_0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \partial \Delta h_1 \\ \partial \Delta h_2 \\ \partial \Delta h_3 \\ \partial \Delta h_4 \\ \partial \Delta h_5 \\ \partial \Delta h_6 \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial X_1} & \frac{\partial H_2}{\partial X_1} & \frac{\partial H_3}{\partial X_1} \\ \frac{\partial H_1}{\partial X_2} & \frac{\partial H_2}{\partial X_2} & \frac{\partial H_3}{\partial X_2} \\ \frac{\partial H_1}{\partial X_3} & \frac{\partial H_2}{\partial X_3} & \frac{\partial H_3}{\partial X_3} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

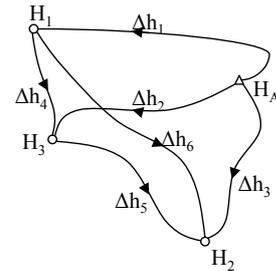
Beispiel „Vermittelnde Beob.“ – Verbesserungsgleichungen

Gekürzte Werte:

$$\hat{\mathbf{x}}_{u,1} = \hat{\mathbf{X}}_{u,1} - \mathbf{X}_{0,u,1}$$

$$\hat{\mathbf{l}}_{n,1} = \hat{\mathbf{L}}_{n,1} - \mathbf{L}_{0,n,1}$$

$$\tilde{\mathbf{l}}_{n,1} = \mathbf{A}_{n,u} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{u,1} \Rightarrow \hat{\mathbf{l}}_{n,1} = \mathbf{l}_{n,1} + \mathbf{v}_{n,1} = \mathbf{A}_{n,u} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{u,1}$$



Lineares funktionales Modell

bekannt:

$$\mathbf{l}_{n,1} = \mathbf{L}_{n,1} - \mathbf{L}_{0,n,1} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 1,00 \\ 0,30 \\ -0,40 \end{bmatrix}_{[mm]}$$

$$\mathbf{A}_{6,3} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta h_1}{\partial H_1} & \frac{\partial \Delta h_1}{\partial H_2} & \frac{\partial \Delta h_1}{\partial H_3} \\ \frac{\partial \Delta h_2}{\partial H_1} & \frac{\partial \Delta h_2}{\partial H_2} & \frac{\partial \Delta h_2}{\partial H_3} \\ \frac{\partial \Delta h_3}{\partial H_1} & \frac{\partial \Delta h_3}{\partial H_2} & \frac{\partial \Delta h_3}{\partial H_3} \\ \frac{\partial \Delta h_4}{\partial H_1} & \frac{\partial \Delta h_4}{\partial H_2} & \frac{\partial \Delta h_4}{\partial H_3} \\ \frac{\partial \Delta h_5}{\partial H_1} & \frac{\partial \Delta h_5}{\partial H_2} & \frac{\partial \Delta h_5}{\partial H_3} \\ \frac{\partial \Delta h_6}{\partial H_1} & \frac{\partial \Delta h_6}{\partial H_2} & \frac{\partial \Delta h_6}{\partial H_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

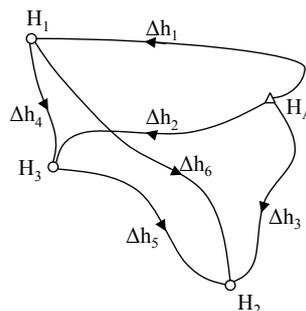
gesucht:

$$\hat{\mathbf{x}}_{u,1} = \hat{\mathbf{X}}_{u,1} - \mathbf{X}_{0,u,1}$$

$$\mathbf{v}_{n,1} = \mathbf{A}_{n,u} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{u,1} - \mathbf{l}_{n,1}$$

Beispiel „Vermittelnde Beob.“ – Stochastisches Modell

$$\mathbf{L}_{6,1} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix}_{[m]}$$



$$\Sigma_{LL} = ?$$

Länge der Nivellementslinien

⇒

Standardabweichungen

$$D_{\Delta h_i} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 3,1 \\ 2,4 \\ 1,9 \\ 0,7 \\ 2,8 \end{bmatrix}_{[km]}$$

$$\sigma_{km} = 0,4 \frac{mm}{\sqrt{km}}$$

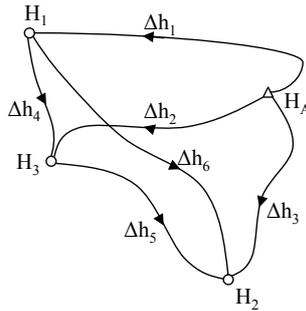
$$\sigma_i = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_i} [km]}$$

⇒

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\Delta h_1} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_1} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{1,3} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_2} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_2} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{3,1} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_3} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_3} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{2,4} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_4} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_4} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{1,9} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_5} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_5} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{0,7} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_6} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_6} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{2,8} \text{ mm} \end{array} \right.$$

Beispiel „Vermittelnde Beob.“ – Stochastisches Modell

$$\mathbf{L}_{6,1} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix}_{[m]}$$



$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta h_1} &= 0,4 \cdot \sqrt{1,3} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_2} &= 0,4 \cdot \sqrt{3,1} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_3} &= 0,4 \cdot \sqrt{2,4} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_4} &= 0,4 \cdot \sqrt{1,9} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_5} &= 0,4 \cdot \sqrt{0,7} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_6} &= 0,4 \cdot \sqrt{2,8} \text{ mm} \end{aligned}$$

Varianz-/Kovarianzmatrix der Beobachtungen:

$$\Sigma_{\mathbf{LL}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} & \dots & \sigma_1 \sigma_n \rho_{1n} \\ \sigma_2 \sigma_1 \rho_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_2 \sigma_n \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n \sigma_1 \rho_{n1} & \sigma_n \sigma_2 \rho_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4^2 \cdot 1,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4^2 \cdot 3,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 2,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 1,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 2,8 \end{bmatrix}_{[mm^2]}$$

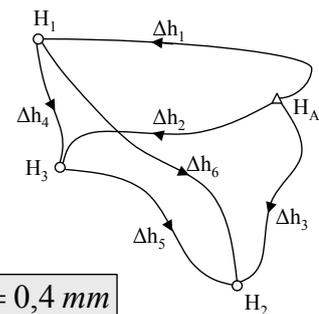


Beispiel „Vermittelnde Beob.“ – Stochastisches Modell

Varianz-/Kovarianzmatrix der Beobachtungen:

$$\Sigma_{\mathbf{LL}} = \begin{bmatrix} 0,4^2 \cdot 1,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4^2 \cdot 3,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 2,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 1,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 2,8 \end{bmatrix}_{[mm^2]}$$

gewählt: $\sigma_0 = 0,4 \text{ mm}$



Kofaktormatrix der Beobachtungen:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{LL}} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \Sigma_{\mathbf{LL}} = \begin{bmatrix} 1,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,8 \end{bmatrix}_{[-]}$$

Gewichtsmatrix der Beobachtungen:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\mathbf{LL}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2,4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1,9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{0,7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2,8} \end{bmatrix}_{[-]}$$



Beispiel „Vermittelnde Beob.“ – Auflösung der Normalgleichungen

$$\mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{n} = \mathbf{0} \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{n}$$

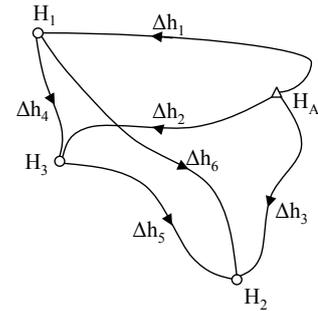
$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1,6527 & -0,3571 & -0,5263 \\ -0,3571 & 2,2024 & -1,4286 \\ -0,5263 & -1,4286 & 2,2775 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{l} = \begin{bmatrix} -0,3835 \\ 0,2857 \\ 0,0977 \end{bmatrix}_{[mm]}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,8551 & 0,4499 & 0,4798 \\ 0,4499 & 1,0022 & 0,7326 \\ 0,4798 & 0,7326 & 1,0095 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} -0,15 \\ 0,19 \\ 0,12 \end{bmatrix}_{[mm]}$$

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_0 + \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 102,6096 \\ 104,0650 \\ 103,7680 \end{bmatrix}_{[m]}$$

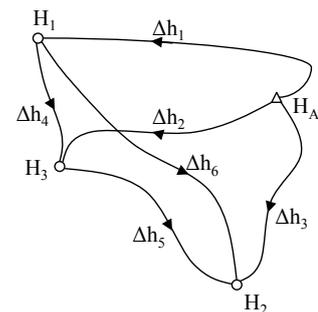


Beispiel „Vermittelnde Beob.“ – Ausgegliche GröÙen

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} = \begin{bmatrix} -0,15 \\ 0,12 \\ 0,19 \\ -0,72 \\ -0,24 \\ 0,74 \end{bmatrix}_{[mm]}$$

Ausgegliche Beobachtungen:

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0,4466 \\ 1,6050 \\ 1,9020 \\ 1,1584 \\ 0,2970 \\ 1,4553 \end{bmatrix}_{[m]}$$



Ausgegliche Unbekannte:

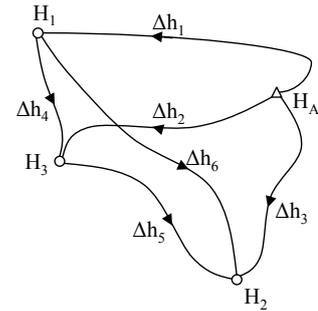
$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_0 + \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 102,6096 \\ 104,0650 \\ 103,7680 \end{bmatrix}_{[m]}$$

Schlußprobe:

$$\Phi(\hat{\mathbf{X}}) = \begin{bmatrix} 0,4466 \\ 1,6050 \\ 1,9020 \\ 1,1584 \\ 0,2970 \\ 1,4553 \end{bmatrix}_{[m]} \stackrel{!}{=} \hat{\mathbf{L}}_{n,1}$$



Beispiel „Vermittelnde Beob.“ – Varianz der Gewichtseinheit



Varianz der Gewichtseinheit („a posteriori“):

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}}{n - u} = 0,1961 \text{ mm}^2 \quad s_0 = +\sqrt{s_0^2} = 0,44 \text{ mm}$$

$$\sigma_0 = 0,4 \text{ mm} \Rightarrow \sigma_0^2 = 0,16 \text{ mm}^2$$

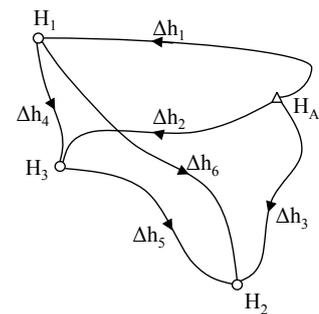
Vergleich mit der Varianz der Gewichtseinheit „a priori“ σ_0^2
über statischen Test oder Konfidenzbereich

Beispiel „Vermittelnde Beob.“ – Varianz der Gewichtseinheit (1)

Varianz der Gewichtseinheit („a posteriori“):

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}}{n - u} = 0,1961 \text{ mm}^2 \quad s_0 = +\sqrt{s_0^2} = 0,44 \text{ mm}$$

$$\sigma_0 = 0,4 \text{ mm} \Rightarrow \sigma_0^2 = 0,16 \text{ mm}^2$$



Konfidenzbereich:
$$P \left\{ s_0 \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f,1-\frac{\alpha}{2}}^2}} \leq \sigma_0 \leq s_0 \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f,\frac{\alpha}{2}}^2}} \right\} = 1 - \alpha$$

$$P \left\{ s_0 \cdot \sqrt{\frac{3}{\chi_{3,0,975}^2}} \leq \sigma_0 \leq s_0 \cdot \sqrt{\frac{3}{\chi_{3,0,025}^2}} \right\} = 0,95$$

$$P \left\{ 0,44 \cdot \sqrt{\frac{3}{9,348}} \leq \sigma_0 \leq 0,44 \cdot \sqrt{\frac{3}{0,216}} \right\} = 0,95$$

$$P \left\{ \begin{array}{c} 0,249 \leq \sigma_0 \leq 1,640 \\ \quad \quad \quad = 0,4 \end{array} \right\} = 0,95$$

$$f = n - u + d = 3$$

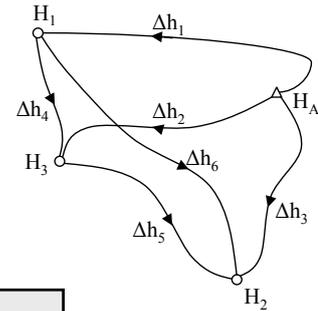
$$\alpha = 0,05$$

Beispiel „Vermittelnde Beob.“ – Varianz der Gewichtseinheit (2)

Varianz der Gewichtseinheit („a posteriori“):

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}}{n - u} = 0,1961 \text{ mm}^2 \quad s_0 = +\sqrt{s_0^2} = 0,44 \text{ mm}$$

$$\sigma_0 = 0,4 \text{ mm} \Rightarrow \sigma_0^2 = 0,16 \text{ mm}^2$$



$$f = n - u + d = 3$$

$$\alpha = 0,05$$

Hypothesen: $H_0 : E\{s_0^2\} = \sigma_0^2$
 $H_A : E\{s_0^2\} > \sigma_0^2$

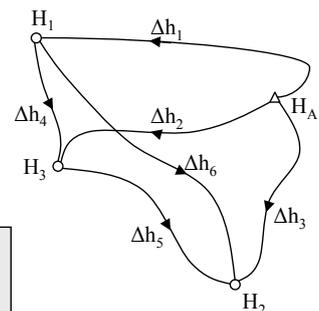
Testgröße: $\hat{F} = \frac{s_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{0,1961 \text{ mm}^2}{0,16 \text{ mm}^2} = 1,23$

Quantil: $F_{f_1, f_2, 1-\alpha} = F_{3, \infty, 0,95} = 2,6$

Entscheidung: $\hat{F} < F_{f_1, f_2, 1-\alpha} \Rightarrow H_0$ annehmen (H_A verwerfen)

Beispiel „Vermittelnde Beob.“ – Genauigkeiten der ausgegl. Größen

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}_{u,u} = \mathbf{N}_{u,u}^{-1}$$



Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Unbekannten:

$$\mathbf{\Sigma}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}_{u,u} = s_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}_{u,u} = \begin{bmatrix} s_{\hat{H}_1}^2 & s_{\hat{H}_1\hat{H}_2} & s_{\hat{H}_1\hat{H}_3} \\ s_{\hat{H}_2\hat{H}_1} & s_{\hat{H}_2}^2 & s_{\hat{H}_2\hat{H}_3} \\ s_{\hat{H}_3\hat{H}_1} & s_{\hat{H}_3\hat{H}_2} & s_{\hat{H}_3}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1677 & 0,0882 & 0,0941 \\ 0,0882 & 0,1966 & 0,1437 \\ 0,0941 & 0,1437 & 0,1980 \end{bmatrix} [\text{mm}^2]$$

Standardabweichungen der ausgeglichenen Unbekannten:

$$s_{\hat{H}_1} = +\sqrt{s_{\hat{H}_1}^2} = 0,41 \text{ mm}$$

$$s_{\hat{H}_2} = +\sqrt{s_{\hat{H}_2}^2} = 0,44 \text{ mm}$$

$$s_{\hat{H}_3} = +\sqrt{s_{\hat{H}_3}^2} = 0,45 \text{ mm}$$

$$\rho_{\hat{H}_1\hat{H}_2} = \frac{s_{\hat{H}_1\hat{H}_2}}{\sqrt{s_{\hat{H}_1}^2 \cdot s_{\hat{H}_2}^2}} = +0,49$$

$$\rho_{\hat{H}_2\hat{H}_3} = \frac{s_{\hat{H}_2\hat{H}_3}}{\sqrt{s_{\hat{H}_2}^2 \cdot s_{\hat{H}_3}^2}} = +0,73$$

$$\rho_{\hat{H}_1\hat{H}_3} = \frac{s_{\hat{H}_1\hat{H}_3}}{\sqrt{s_{\hat{H}_1}^2 \cdot s_{\hat{H}_3}^2}} = +0,53$$

Beispiel „Vermittelnde Beob.“ – Genauigkeiten der ausgegl. Größen

Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Beobachtungen:

$$\Sigma_{\hat{L}\hat{L}} = s_0^2 \cdot Q_{\hat{L}\hat{L}}$$

$$\begin{matrix} \begin{matrix} n,n \\ n,n \end{matrix} & \begin{matrix} n,n \\ n,n \end{matrix} \\ = & \begin{bmatrix} S_{\Delta\hat{h}_1}^2 & S_{\Delta\hat{h}_1\Delta\hat{h}_2} & S_{\Delta\hat{h}_1\Delta\hat{h}_3} & S_{\Delta\hat{h}_1\Delta\hat{h}_4} & S_{\Delta\hat{h}_1\Delta\hat{h}_5} & S_{\Delta\hat{h}_1\Delta\hat{h}_6} \\ S_{\Delta\hat{h}_2\Delta\hat{h}_1} & S_{\Delta\hat{h}_2}^2 & S_{\Delta\hat{h}_2\Delta\hat{h}_3} & S_{\Delta\hat{h}_2\Delta\hat{h}_4} & S_{\Delta\hat{h}_2\Delta\hat{h}_5} & S_{\Delta\hat{h}_2\Delta\hat{h}_6} \\ S_{\Delta\hat{h}_3\Delta\hat{h}_1} & S_{\Delta\hat{h}_3\Delta\hat{h}_2} & S_{\Delta\hat{h}_3}^2 & S_{\Delta\hat{h}_3\Delta\hat{h}_4} & S_{\Delta\hat{h}_3\Delta\hat{h}_5} & S_{\Delta\hat{h}_3\Delta\hat{h}_6} \\ S_{\Delta\hat{h}_4\Delta\hat{h}_1} & S_{\Delta\hat{h}_4\Delta\hat{h}_2} & S_{\Delta\hat{h}_4\Delta\hat{h}_3} & S_{\Delta\hat{h}_4}^2 & S_{\Delta\hat{h}_4\Delta\hat{h}_5} & S_{\Delta\hat{h}_4\Delta\hat{h}_6} \\ S_{\Delta\hat{h}_5\Delta\hat{h}_1} & S_{\Delta\hat{h}_5\Delta\hat{h}_2} & S_{\Delta\hat{h}_5\Delta\hat{h}_3} & S_{\Delta\hat{h}_5\Delta\hat{h}_4} & S_{\Delta\hat{h}_5}^2 & S_{\Delta\hat{h}_5\Delta\hat{h}_6} \\ S_{\Delta\hat{h}_6\Delta\hat{h}_1} & S_{\Delta\hat{h}_6\Delta\hat{h}_2} & S_{\Delta\hat{h}_6\Delta\hat{h}_3} & S_{\Delta\hat{h}_6\Delta\hat{h}_4} & S_{\Delta\hat{h}_6\Delta\hat{h}_5} & S_{\Delta\hat{h}_6}^2 \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} 0,1677 & 0,0941 & 0,0882 & -0,0736 & -0,0059 & -0,0795 \\ 0,0941 & 0,1980 & 0,1437 & 0,1039 & -0,0543 & 0,0496 \\ 0,0882 & 0,1437 & 0,1966 & 0,0555 & 0,0529 & 0,1083 \\ -0,0736 & 0,1039 & 0,0555 & 0,1775 & -0,0484 & 0,1291 \\ -0,0059 & -0,0543 & 0,0529 & -0,0484 & 0,1072 & 0,0588 \\ -0,0795 & 0,0496 & 0,1083 & 0,1291 & 0,0588 & 0,1878 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad [mm^2]$$

Kofaktormatrix der ausgeglichenen Beobachtungen:

$$Q_{\hat{L}\hat{L}} = A \cdot Q_{\hat{X}\hat{X}} \cdot A^T$$

$$\begin{matrix} n,n \\ n,u \\ u,u \\ u,n \end{matrix}$$

Standardabweichungen der ausgeglichenen Beobachtungen

$$s_{\Delta\hat{h}_1} = +\sqrt{s_{\Delta\hat{h}_1}^2} = 0,41 \text{ mm}$$

$$s_{\Delta\hat{h}_2} = +\sqrt{s_{\Delta\hat{h}_2}^2} = 0,45 \text{ mm}$$

$$s_{\Delta\hat{h}_3} = +\sqrt{s_{\Delta\hat{h}_3}^2} = 0,44 \text{ mm}$$

$$s_{\Delta\hat{h}_4} = +\sqrt{s_{\Delta\hat{h}_4}^2} = 0,42 \text{ mm}$$

$$s_{\Delta\hat{h}_5} = +\sqrt{s_{\Delta\hat{h}_5}^2} = 0,33 \text{ mm}$$

$$s_{\Delta\hat{h}_6} = +\sqrt{s_{\Delta\hat{h}_6}^2} = 0,43 \text{ mm}$$

Repetitorium zur Ausgleichsrechnung

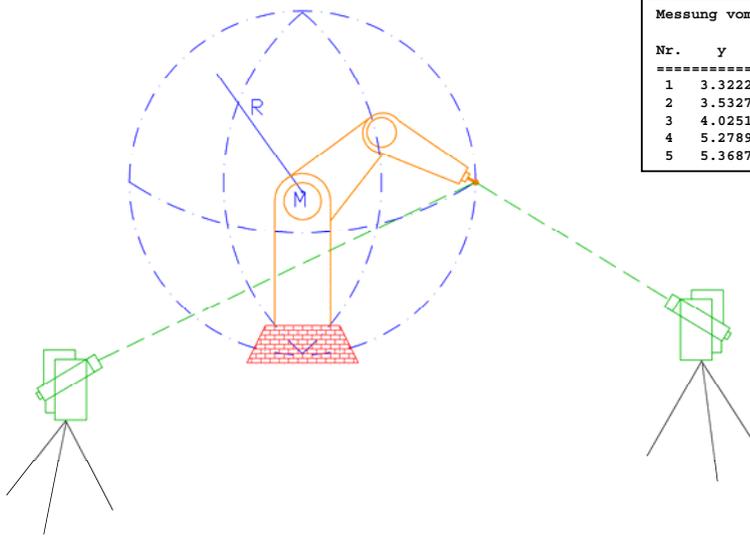
Allgemeinfall der Ausgleichsrechnung

Allgemeinfall der Ausgleichsrechnung

$$\Phi(\tilde{L}, \tilde{X}) = 0$$

(Gauß-Helmert-Modell)

Beispiel „Allgemeinfall“ – Roboterkalibrierung mit Theodolitmeßsystem



Messung vom 03.08.1994, Halle 9b, Pruefling: ROB121			
Nr.	y	x	z
1	3.3222	5.1527	2.8765
2	3.5327	4.8021	3.5085
3	4.0251	4.5551	4.1040
4	5.2789	5.9982	4.4751
5	5.3687	6.1475	4.4000
6	5.9871	7.1023	3.0063
7	4.5210	6.2174	0.9404
8	3.7527	4.2651	1.3573
9	5.2142	3.2741	1.1344
10	6.2412	6.2144	0.8072

$$\hat{\mathbf{X}}_{4,1} = \begin{bmatrix} \hat{X}_M \\ \hat{Y}_M \\ \hat{Z}_M \\ \hat{R} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{L}}_{30,1} = \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{Y}_1 \\ \hat{Z}_1 \\ \vdots \\ \hat{X}_{10} \\ \hat{Y}_{10} \\ \hat{Z}_{10} \end{bmatrix}$$

$$\hat{R} = \sqrt{(\hat{X}_i - \hat{X}_M)^2 - (\hat{Y}_i - \hat{Y}_M)^2 - (\hat{Z}_i - \hat{Z}_M)^2}$$

Problem: $\hat{\mathbf{L}} = \Phi(\hat{\mathbf{X}})$?
Variablentrennung nicht möglich!

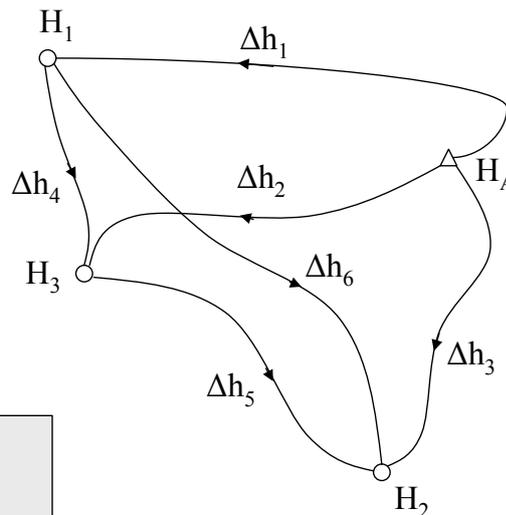
$\Rightarrow \Phi(\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{0}$ Allgemeinfall der Ausgleichsrechnung (*Gauß-Helmert-Modell*)



Beispiel „Allgemeinfall“ – Nivellementsnetz (= Beispiel „Vermittelnde Beob.“)

Beobachtungsvektor

$$\mathbf{L}_{6,1} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4468 \\ 1,6049 \\ 1,9018 \\ 0,7561 \\ 0,2972 \\ 1,4546 \end{bmatrix}_{[m]}$$



$$H_A = 102,1630m$$

Länge der Niv.-Linien

$$\begin{bmatrix} D_{\Delta h_1} \\ D_{\Delta h_2} \\ D_{\Delta h_3} \\ D_{\Delta h_4} \\ D_{\Delta h_5} \\ D_{\Delta h_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 3,1 \\ 2,4 \\ 1,9 \\ 0,7 \\ 2,8 \end{bmatrix}_{[km]}$$

$\sigma_0 = 0,4 \frac{mm}{\sqrt{km}}$
 $\sigma_i = \sigma_0 \cdot \sqrt{D_{\Delta h_i} [km]}$

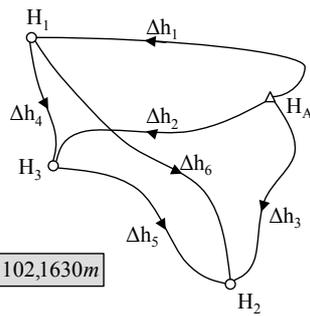
Unbekanntevektor

$$\hat{\mathbf{X}}_{3,1} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \\ \hat{H}_3 \end{bmatrix}_{[m]} \quad \text{mit} \quad \Sigma_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{H}_1}^2 & \sigma_{\hat{H}_1\hat{H}_2} & \sigma_{\hat{H}_1\hat{H}_3} \\ \sigma_{\hat{H}_2\hat{H}_1} & \sigma_{\hat{H}_2}^2 & \sigma_{\hat{H}_2\hat{H}_3} \\ \sigma_{\hat{H}_3\hat{H}_1} & \sigma_{\hat{H}_3\hat{H}_2} & \sigma_{\hat{H}_3}^2 \end{bmatrix}$$



Beispiel „Allgemeinfall“ – Näherungswerte (= Beispiel „Vermittelnde Beob.“)

Beobachtungsvektor

$$\mathbf{L}_{6,1} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4468 \\ 1,6049 \\ 1,9018 \\ 1,1591 \\ 0,2972 \\ 1,4546 \end{bmatrix}_{[m]}$$


$$H_A = 102,1630m$$

genäherte Unbekannte aus

- ... Kartenwerken
- ... vorhandenen Koordinaten
- ... Berechnung aus dem Beobachtungsmaterial in verschiedenen Kombinationen
- ...

genäherte Unbekannte

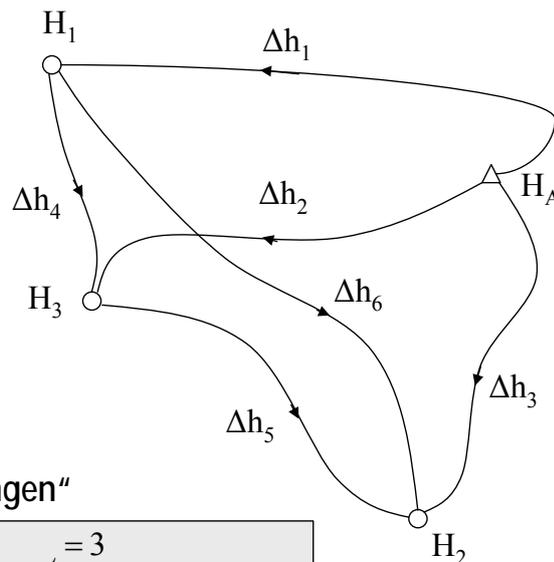
$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} H_{1^0} \\ H_{2^0} \\ H_{3^0} \end{bmatrix}_{3,1} = \begin{bmatrix} H_A + \Delta h_1 \\ H_A + \Delta h_3 \\ H_A + \Delta h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 102,6098 \\ 104,0648 \\ 103,7679 \end{bmatrix}_{[m]}$$

genäherte Beobachtungen

~~$$\mathbf{L}_0 = \Phi(\mathbf{X}_0) = \begin{bmatrix} \Delta h_{1^0} \\ \Delta h_{2^0} \\ \Delta h_{3^0} \\ \Delta h_{4^0} \\ \Delta h_{5^0} \\ \Delta h_{6^0} \end{bmatrix}_{6,1} = \begin{bmatrix} H_{1^0} - H_A \\ H_{3^0} - H_A \\ H_{2^0} - H_A \\ H_{3^0} - H_{1^0} \\ H_{2^0} - H_{3^0} \\ H_{2^0} - H_{1^0} \end{bmatrix}_{6,1} = \begin{bmatrix} 0,4468 \\ 1,6049 \\ 1,9018 \\ 1,1581 \\ 0,2969 \\ 1,4550 \end{bmatrix}_{[m]}$$~~

Beispiel „Allgemeinfall“ – Anzahl der Bedingungsgleichungen

Beobachtungsvektor	Unbekanntevektor
$\mathbf{L}_{6,1} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix}$	$\hat{\mathbf{X}}_{3,1} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \\ \hat{H}_3 \end{bmatrix}_{[m]}$
	$H_A = 102,1630m$



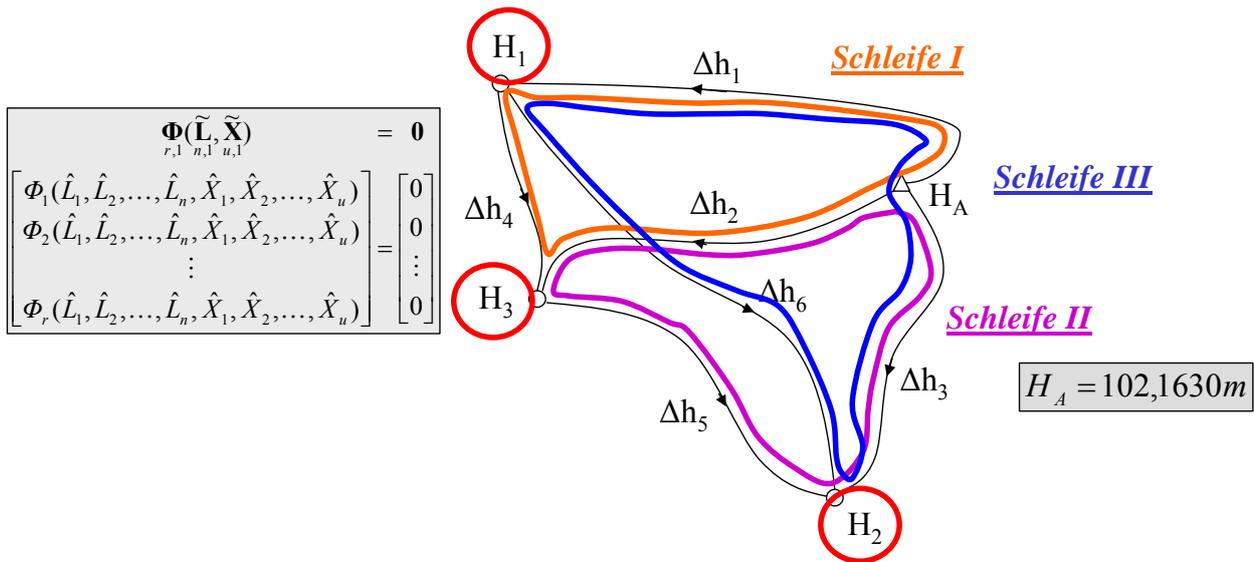
• „Ableiten aus vermittelnden Beobachtungen“

$$f = \underbrace{n}_{\text{Anzahl der Beobachtungen}} - \underbrace{u_{Verm}}_{\text{Anzahl der Unbekannten}} + \underbrace{d}_{\text{Anzahl der Datumsdefekte}} = 3$$

$$\Downarrow$$

$$f = \underbrace{r_{Allg}}_{\text{Anzahl der Bedingungen}} - \underbrace{u_{Allg}}_{\text{Anzahl der Unbekannten}} \Rightarrow \underbrace{r_{Allg}}_{=3} = \underbrace{f}_{=3} + \underbrace{u_{Allg}}_{=3} = 6$$

Beispiel „Allgemeinfall“ – Bedingungsgleichungen



„aus der Geometrie“

$$\text{Schleife I: } \Delta \hat{h}_1 + \Delta \hat{h}_4 - \Delta \hat{h}_2 = 0$$

$$\text{Schleife II: } \Delta \hat{h}_2 + \Delta \hat{h}_5 - \Delta \hat{h}_3 = 0$$

$$\text{Schleife III: } \Delta \hat{h}_1 + \Delta \hat{h}_6 - \Delta \hat{h}_3 = 0$$

für jede Unbekannte „1 Bedingung dazu“

$$\text{Unbekannte I: } \hat{H}_1 - (H_A + \Delta \hat{h}_1) = 0$$

$$\text{Unbekannte II: } \hat{H}_2 - (H_A + \Delta \hat{h}_3) = 0$$

$$\text{Unbekannte III: } \hat{H}_3 - (H_A + \Delta \hat{h}_2) = 0$$

Beispiel „Allgemeinfall“ – Vektor der Widersprüche

$$\Phi(\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{0}$$

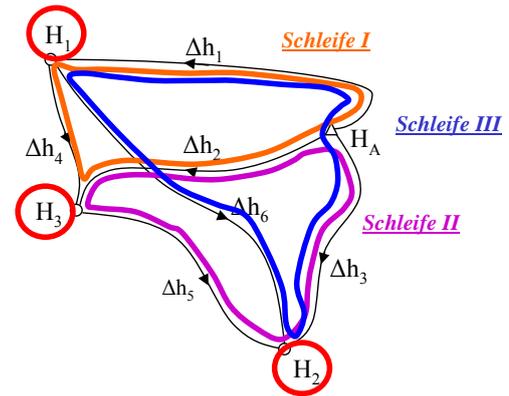
$$\begin{bmatrix} \Phi_1(\Delta \hat{h}_1, \Delta \hat{h}_2, \Delta \hat{h}_3, \Delta \hat{h}_4, \Delta \hat{h}_5, \Delta \hat{h}_6, \hat{H}_1, \hat{H}_2, \hat{H}_3) \\ \Phi_2(\Delta \hat{h}_1, \Delta \hat{h}_2, \Delta \hat{h}_3, \Delta \hat{h}_4, \Delta \hat{h}_5, \Delta \hat{h}_6, \hat{H}_1, \hat{H}_2, \hat{H}_3) \\ \Phi_3(\Delta \hat{h}_1, \Delta \hat{h}_2, \Delta \hat{h}_3, \Delta \hat{h}_4, \Delta \hat{h}_5, \Delta \hat{h}_6, \hat{H}_1, \hat{H}_2, \hat{H}_3) \\ \Phi_4(\Delta \hat{h}_1, \Delta \hat{h}_2, \Delta \hat{h}_3, \Delta \hat{h}_4, \Delta \hat{h}_5, \Delta \hat{h}_6, \hat{H}_1, \hat{H}_2, \hat{H}_3) \\ \Phi_5(\Delta \hat{h}_1, \Delta \hat{h}_2, \Delta \hat{h}_3, \Delta \hat{h}_4, \Delta \hat{h}_5, \Delta \hat{h}_6, \hat{H}_1, \hat{H}_2, \hat{H}_3) \\ \Phi_6(\Delta \hat{h}_1, \Delta \hat{h}_2, \Delta \hat{h}_3, \Delta \hat{h}_4, \Delta \hat{h}_5, \Delta \hat{h}_6, \hat{H}_1, \hat{H}_2, \hat{H}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \hat{h}_1 + \Delta \hat{h}_4 - \Delta \hat{h}_2 \\ \Delta \hat{h}_2 + \Delta \hat{h}_5 - \Delta \hat{h}_3 \\ \Delta \hat{h}_1 + \Delta \hat{h}_6 - \Delta \hat{h}_3 \\ \hat{H}_1 - (H_A + \Delta \hat{h}_1) \\ \hat{H}_2 - (H_A + \Delta \hat{h}_3) \\ \hat{H}_3 - (H_A + \Delta \hat{h}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Widerspruchsvektor

$$\mathbf{w} = \Phi(\mathbf{L}, \mathbf{X}_0) = \begin{bmatrix} \Delta h_1 + \Delta h_4 - \Delta h_2 \\ \Delta h_2 + \Delta h_5 - \Delta h_3 \\ \Delta h_1 + \Delta h_6 - \Delta h_3 \\ H_{1^0} - (H_A + \Delta h_1) \\ H_{2^0} - (H_A + \Delta h_3) \\ H_{3^0} - (H_A + \Delta h_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,00 \\ 0,30 \\ -0,40 \\ 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix} [mm]$$

Beispiel „Allgemeinfall“ – Designmatrix A

$$\begin{aligned} \Phi_1 : \Delta \hat{h}_1 + \Delta \hat{h}_4 - \Delta \hat{h}_2 &= 0 \\ \Phi_2 : \Delta \hat{h}_2 + \Delta \hat{h}_5 - \Delta \hat{h}_3 &= 0 \\ \Phi_3 : \Delta \hat{h}_1 + \Delta \hat{h}_6 - \Delta \hat{h}_3 &= 0 \\ \Phi_4 : \hat{H}_1 - (H_A + \Delta \hat{h}_1) &= 0 \\ \Phi_5 : \hat{H}_2 - (H_A + \Delta \hat{h}_3) &= 0 \\ \Phi_6 : \hat{H}_3 - (H_A + \Delta \hat{h}_2) &= 0 \end{aligned}$$

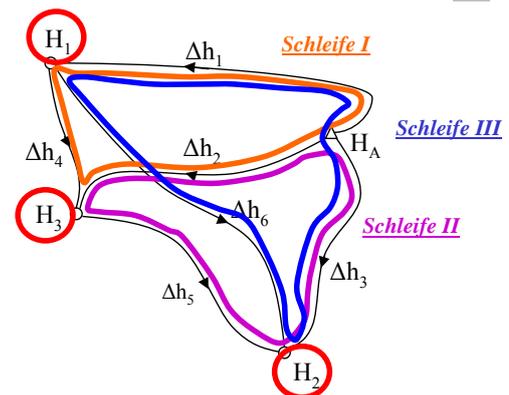


Ableiten aller Φ_i nach allen Unbekannten X_j

$$\mathbf{A}_{6,3} = \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right)_0 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_2} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_3} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_2} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_3} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial \Phi_3(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_3(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_2} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_3(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_3} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial \Phi_4(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_4(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_2} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_4(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_3} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial \Phi_5(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_5(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_2} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_5(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_3} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial \Phi_6(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_6(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_2} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_6(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial X_3} \right)_0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \partial \Phi_1 \\ \partial \Phi_2 \\ \partial \Phi_3 \\ \partial \Phi_4 \\ \partial \Phi_5 \\ \partial \Phi_6 \end{matrix} \begin{bmatrix} \partial H_1 & \partial H_2 & \partial H_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel „Allgemeinfall“ – Modellmatrix B

$$\begin{aligned} \Phi_1 : \Delta \hat{h}_1 + \Delta \hat{h}_4 - \Delta \hat{h}_2 &= 0 \\ \Phi_2 : \Delta \hat{h}_2 + \Delta \hat{h}_5 - \Delta \hat{h}_3 &= 0 \\ \Phi_3 : \Delta \hat{h}_1 + \Delta \hat{h}_6 - \Delta \hat{h}_3 &= 0 \\ \Phi_4 : \hat{H}_1 - (H_A + \Delta \hat{h}_1) &= 0 \\ \Phi_5 : \hat{H}_2 - (H_A + \Delta \hat{h}_3) &= 0 \\ \Phi_6 : \hat{H}_3 - (H_A + \Delta \hat{h}_2) &= 0 \end{aligned}$$

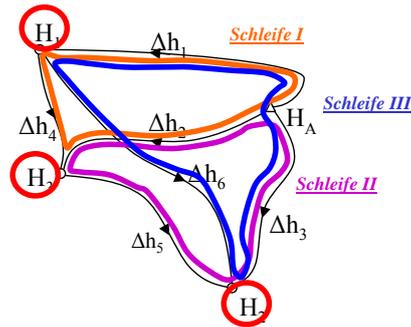


Ableiten aller Φ_i nach allen Beobachtungen L_j

$$\mathbf{B}_{6,6} = \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{L}} \right)_0 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_n} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_n} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial \Phi_3(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_3(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \Phi_3(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_n} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial \Phi_4(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_4(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \Phi_4(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_n} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial \Phi_5(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_5(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \Phi_5(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_n} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial \Phi_6(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_6(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \Phi_6(\mathbf{L}, \mathbf{X})}{\partial L_n} \right)_0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \partial \Phi_1 \\ \partial \Phi_2 \\ \partial \Phi_3 \\ \partial \Phi_4 \\ \partial \Phi_5 \\ \partial \Phi_6 \end{matrix} \begin{bmatrix} \partial \Delta h_1 & \partial \Delta h_2 & \partial \Delta h_3 & \partial \Delta h_4 & \partial \Delta h_5 & \partial \Delta h_6 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Beispiel „Allgemeinfall“ – Stochastisches Modell

$$\mathbf{L}_{6,1} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix} [m]$$



keine Änderungen gegenüber den „vermittelnden Beobachtungen“, da \underline{L} nicht geändert wurde!

Länge der Nivellementslinien \Rightarrow

Standardabweichungen

$$\begin{bmatrix} D_{\Delta h_1} \\ D_{\Delta h_2} \\ D_{\Delta h_3} \\ D_{\Delta h_4} \\ D_{\Delta h_5} \\ D_{\Delta h_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 3,1 \\ 2,4 \\ 1,9 \\ 0,7 \\ 2,8 \end{bmatrix} [km]$$

$$\sigma_{km} = 0,4 \frac{mm}{\sqrt{km}}$$

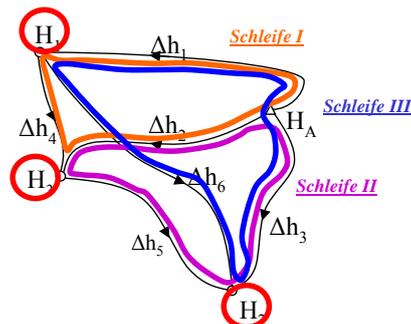
$$\sigma_i = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_i} [km]}$$

$$\begin{cases} \sigma_{\Delta h_1} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_1} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{1,3} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_2} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_2} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{3,1} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_3} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_3} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{2,4} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_4} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_4} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{1,9} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_5} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_5} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{0,7} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_6} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_6} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{2,8} \text{ mm} \end{cases}$$



Beispiel „Allgemeinfall“ – Stochastisches Modell

$$\mathbf{L}_{6,1} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix} [m]$$



$$\begin{cases} \sigma_{\Delta h_1} = 0,4 \cdot \sqrt{1,3} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_2} = 0,4 \cdot \sqrt{3,1} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_3} = 0,4 \cdot \sqrt{2,4} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_4} = 0,4 \cdot \sqrt{1,9} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_5} = 0,4 \cdot \sqrt{0,7} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_6} = 0,4 \cdot \sqrt{2,8} \text{ mm} \end{cases}$$

Varianz-/Kovarianzmatrix der Beobachtungen:

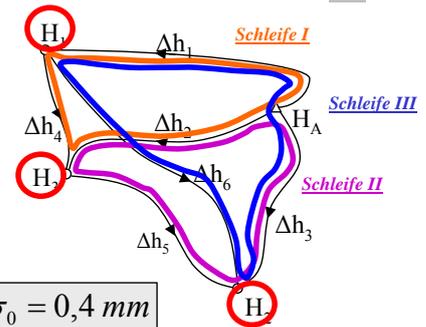
$$\Sigma_{\mathbf{LL}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} & \dots & \sigma_1 \sigma_n \rho_{1n} \\ \sigma_2 \sigma_1 \rho_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_2 \sigma_n \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n \sigma_1 \rho_{n1} & \sigma_n \sigma_2 \rho_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4^2 \cdot 1,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4^2 \cdot 3,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 2,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 1,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 2,8 \end{bmatrix} [mm^2]$$



Beispiel „Allgemeinfall“ – Stochastisches Modell

Varianz-/Kovarianzmatrix der Beobachtungen:

$$\Sigma_{LL} = \begin{bmatrix} 0,4^2 \cdot 1,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4^2 \cdot 3,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 2,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 1,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 2,8 \end{bmatrix} [mm^2]$$



gewählt : $\sigma_0 = 0,4 \text{ mm}$

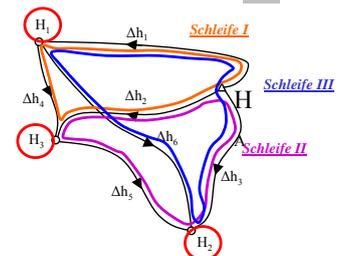
$\sigma_0^2 =$ Varianz der Gewichtseinheit vor der Ausgleichung („a priori“)

Kofaktormatrix der Beobachtungen:

$$Q_{LL} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \Sigma_{LL} = \begin{bmatrix} 1,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,8 \end{bmatrix} [-]$$

Beispiel „Allgemeinfall“ – Auflösung der Normalgleichungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{B}^T & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{Q}_{22} = \left[\mathbf{A}^T \cdot \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{B}^T \right)^{-1} \cdot \mathbf{A} \right]_{r,u} = \begin{bmatrix} -0,8551 & -0,4499 & -0,4798 \\ -0,4499 & -1,0022 & -0,7326 \\ -0,4798 & -0,7326 & -1,0095 \end{bmatrix}$$

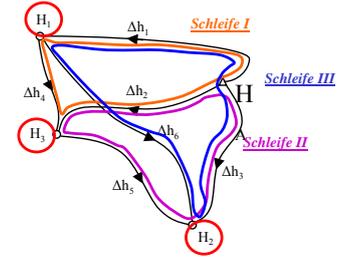
$$\mathbf{Q}_{12} = - \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{B}^T \right)^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{22} = \begin{bmatrix} 0,1975 & -0,1488 & -0,2788 \\ 0,0427 & -0,3851 & 0,3956 \\ 0,1447 & -0,1973 & -0,0903 \\ 1,0000 & -0,0000 & -0,0000 \\ -0,0000 & 1,0000 & -0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{21} = \mathbf{Q}_{12}^T$$

$$\mathbf{Q}_{11} = - \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{B}^T \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{E} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{21} \right) = \begin{bmatrix} 0,2756 & 0,1857 & -0,1237 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 \\ 0,1857 & 0,3133 & -0,1528 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0000 \\ -0,1237 & -0,1528 & 0,2350 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 \\ -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0000 \end{bmatrix}$$

Beispiel „Allgemeinfall“ – Ausgegliche Beobachtungen

$$\text{Korrelatenvektor: } \mathbf{k} = -\mathbf{Q}_{11} \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -0,3808 \\ -0,3408 \\ 0,2635 \\ 0,0000 \\ -0,0000 \\ 0,0000 \end{bmatrix}$$

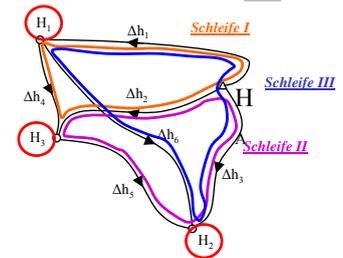


$$\text{Vektor der Verbesserungen: } \mathbf{v} = \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{k} = \begin{bmatrix} -0,15 \\ 0,12 \\ 0,19 \\ -0,72 \\ -0,24 \\ 0,74 \end{bmatrix}_{[mm]}$$

$$\text{Ausgegliche Beobachtungen: } \hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0,4466 \\ 1,6050 \\ 1,9020 \\ 1,1584 \\ 0,2970 \\ 1,4553 \end{bmatrix}_{[m]}$$

Beispiel „Allgemeinfall“ – Ausgegliche Unbekannte

$$\text{Ausgegliche gekürzte Unbekannte: } \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_{21} \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -0,15 \\ 0,19 \\ 0,12 \end{bmatrix}_{[mm]}$$



$$\text{Ausgegliche Unbekannte: } \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_0 + \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 102,6096 \\ 104,0650 \\ 103,7680 \end{bmatrix}_{[m]}$$

$$\text{Ausgleichungsprobe: } \Phi \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{L}} \\ \hat{\mathbf{X}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,0022 \\ 0,0022 \\ -0,1421 \\ -0,1421 \\ 0,0000 \end{bmatrix} \cdot 10^{-13} = \mathbf{0}$$

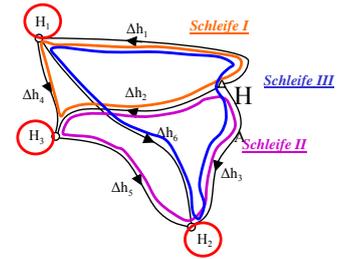
**Gehört zu jeder
Ausgleichung !!!**

Beispiel „Allgemeinfall“ – Genauigkeitsangaben

Varianz der Gewichtseinheit („a posteriori“):

$$s_0^2 = \frac{-\mathbf{k}^T \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}})}{r - u} = 0,1962 \text{ mm}^2$$

Vergleich mit der Varianz der Gewichtseinheit „a priori“ $\sigma_0^2 = 0,16 \text{ mm}^2$



Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Unbekannten:

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}_{u,u} = s_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}_{u,u} = \begin{bmatrix} S_{\hat{H}_1}^2 & S_{\hat{H}_1\hat{H}_2} & S_{\hat{H}_1\hat{H}_3} \\ S_{\hat{H}_2\hat{H}_1} & S_{\hat{H}_2}^2 & S_{\hat{H}_2\hat{H}_3} \\ S_{\hat{H}_3\hat{H}_1} & S_{\hat{H}_3\hat{H}_2} & S_{\hat{H}_3}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1677 & 0,0882 & 0,0941 \\ 0,0882 & 0,1966 & 0,1437 \\ 0,0941 & 0,1437 & 0,1980 \end{bmatrix} \text{ [mm}^2\text{]} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}_{u,u} = -\hat{\mathbf{Q}}_{u,u,22}$$

Standardabweichungen der ausgeglichenen Unbekannten:

$$s_{\hat{H}_1} = +\sqrt{S_{\hat{H}_1}^2} = 0,41 \text{ mm} \quad s_{\hat{H}_2} = +\sqrt{S_{\hat{H}_2}^2} = 0,44 \text{ mm} \quad s_{\hat{H}_3} = +\sqrt{S_{\hat{H}_3}^2} = 0,45 \text{ mm}$$

$$\rho_{\hat{H}_1\hat{H}_2} = \frac{S_{\hat{H}_1\hat{H}_2}}{\sqrt{S_{\hat{H}_1}^2 \cdot S_{\hat{H}_2}^2}} = +0,49 \quad \rho_{\hat{H}_2\hat{H}_3} = \frac{S_{\hat{H}_2\hat{H}_3}}{\sqrt{S_{\hat{H}_2}^2 \cdot S_{\hat{H}_3}^2}} = +0,73 \quad \rho_{\hat{H}_1\hat{H}_3} = \frac{S_{\hat{H}_1\hat{H}_3}}{\sqrt{S_{\hat{H}_1}^2 \cdot S_{\hat{H}_3}^2}} = +0,53$$

Beispiel „Allgemeinfall“ – Genauigkeitsangaben

Kofaktormatrix der Verbesserungen:

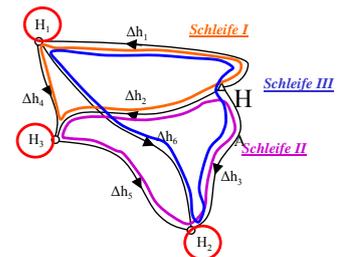
$$\mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{L}\mathbf{L}} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{1}\mathbf{1}} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{L}\mathbf{L}} \Rightarrow \Sigma_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = s_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$$

Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Beobachtungen:

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} = s_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{L}\mathbf{L}} - \mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$$

$$= \begin{bmatrix} S_{\Delta\hat{h}_1}^2 & S_{\Delta\hat{h}_1\Delta\hat{h}_2} & S_{\Delta\hat{h}_1\Delta\hat{h}_3} & S_{\Delta\hat{h}_1\Delta\hat{h}_4} & S_{\Delta\hat{h}_1\Delta\hat{h}_5} & S_{\Delta\hat{h}_1\Delta\hat{h}_6} \\ S_{\Delta\hat{h}_2\Delta\hat{h}_1} & S_{\Delta\hat{h}_2}^2 & S_{\Delta\hat{h}_2\Delta\hat{h}_3} & S_{\Delta\hat{h}_2\Delta\hat{h}_4} & S_{\Delta\hat{h}_2\Delta\hat{h}_5} & S_{\Delta\hat{h}_2\Delta\hat{h}_6} \\ S_{\Delta\hat{h}_3\Delta\hat{h}_1} & S_{\Delta\hat{h}_3\Delta\hat{h}_2} & S_{\Delta\hat{h}_3}^2 & S_{\Delta\hat{h}_3\Delta\hat{h}_4} & S_{\Delta\hat{h}_3\Delta\hat{h}_5} & S_{\Delta\hat{h}_3\Delta\hat{h}_6} \\ S_{\Delta\hat{h}_4\Delta\hat{h}_1} & S_{\Delta\hat{h}_4\Delta\hat{h}_2} & S_{\Delta\hat{h}_4\Delta\hat{h}_3} & S_{\Delta\hat{h}_4}^2 & S_{\Delta\hat{h}_4\Delta\hat{h}_5} & S_{\Delta\hat{h}_4\Delta\hat{h}_6} \\ S_{\Delta\hat{h}_5\Delta\hat{h}_1} & S_{\Delta\hat{h}_5\Delta\hat{h}_2} & S_{\Delta\hat{h}_5\Delta\hat{h}_3} & S_{\Delta\hat{h}_5\Delta\hat{h}_4} & S_{\Delta\hat{h}_5}^2 & S_{\Delta\hat{h}_5\Delta\hat{h}_6} \\ S_{\Delta\hat{h}_6\Delta\hat{h}_1} & S_{\Delta\hat{h}_6\Delta\hat{h}_2} & S_{\Delta\hat{h}_6\Delta\hat{h}_3} & S_{\Delta\hat{h}_6\Delta\hat{h}_4} & S_{\Delta\hat{h}_6\Delta\hat{h}_5} & S_{\Delta\hat{h}_6}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,1677 & 0,0941 & 0,0882 & -0,0736 & -0,0059 & -0,0795 \\ 0,0941 & 0,1980 & 0,1437 & 0,1039 & -0,0543 & 0,0496 \\ 0,0882 & 0,1437 & 0,1966 & 0,0555 & 0,0529 & 0,1083 \\ -0,0736 & 0,1039 & 0,0555 & 0,1775 & -0,0484 & 0,1291 \\ -0,0059 & -0,0543 & 0,0529 & -0,0484 & 0,1072 & 0,0588 \\ -0,0795 & 0,0496 & 0,1083 & 0,1291 & 0,0588 & 0,1878 \end{bmatrix} \text{ [mm}^2\text{]}$$



Standardabweichungen der ausgeglichenen Beobachtungen

$$s_{\Delta\hat{h}_1} = +\sqrt{S_{\Delta\hat{h}_1}^2} = 0,41 \text{ mm}$$

$$s_{\Delta\hat{h}_2} = +\sqrt{S_{\Delta\hat{h}_2}^2} = 0,45 \text{ mm}$$

$$s_{\Delta\hat{h}_3} = +\sqrt{S_{\Delta\hat{h}_3}^2} = 0,44 \text{ mm}$$

$$s_{\Delta\hat{h}_4} = +\sqrt{S_{\Delta\hat{h}_4}^2} = 0,42 \text{ mm}$$

$$s_{\Delta\hat{h}_5} = +\sqrt{S_{\Delta\hat{h}_5}^2} = 0,33 \text{ mm}$$

$$s_{\Delta\hat{h}_6} = +\sqrt{S_{\Delta\hat{h}_6}^2} = 0,43 \text{ mm}$$

Ausgleichung Bedingter Beobachtungen

Bedingte Beobachtungen

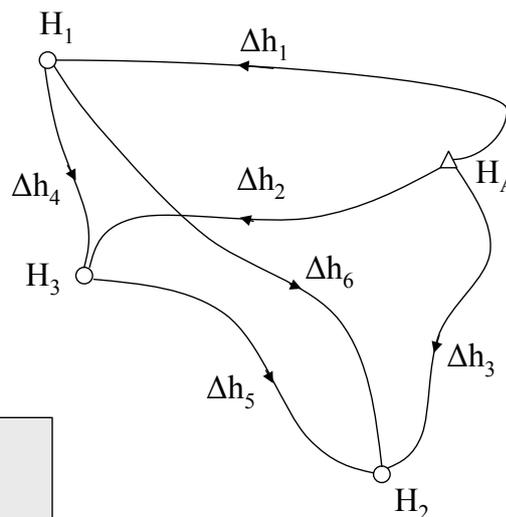
$$\Phi(\tilde{\mathbf{L}}) = \mathbf{0}$$

Beispiel „Bedingte Beob.“ – Nivellementsnetz

(= Beispiel „Vermittelnde Beob.“ bzw. „Allgemeinfall“)

Beobachtungsvektor

$$\mathbf{L}_{6,1} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4468 \\ 1,6049 \\ 1,9018 \\ 0,7561 \\ 0,2972 \\ 1,4546 \end{bmatrix} [m]$$



$$H_A = 102,1630m$$

Wird für die
Ausgleichung
nicht benötigt

Länge der Niv.-Linien

$$\begin{bmatrix} D_{\Delta h_1} \\ D_{\Delta h_2} \\ D_{\Delta h_3} \\ D_{\Delta h_4} \\ D_{\Delta h_5} \\ D_{\Delta h_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 3,1 \\ 2,4 \\ 1,9 \\ 0,7 \\ 2,8 \end{bmatrix} [km]$$

$$\sigma_0 = 0,4 \frac{mm}{\sqrt{km}}$$

$$\sigma_i = \sigma_0 \cdot \sqrt{D_{\Delta h_i} [km]}$$

Kein Unbekanntenvektor \underline{X} !

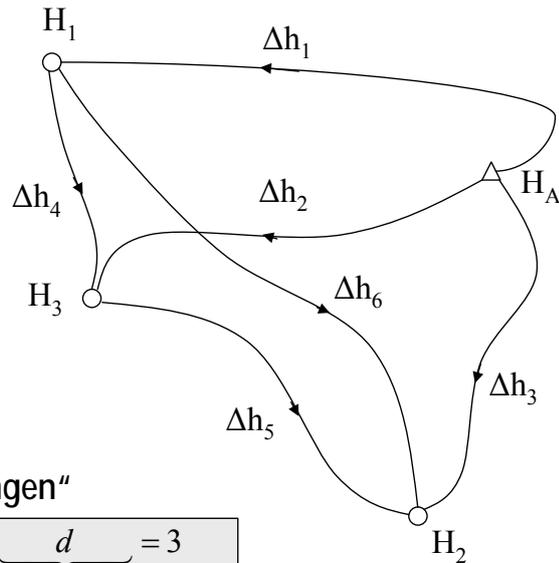
Keine Näherungswerte \underline{X}^0 bzw. \underline{L}^0 !

=> Ausgleichung nur der inneren Geometrie

Beispiel „Bedingte Beob.“ – Anzahl der Bedingungsgleichungen

Beobachtungsvektor

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix}_{6,1}$$



„Ableiten aus vermittelnden Beobachtungen“

$$f = \underbrace{n}_{\text{Anzahl der Beobachtungen}} - \underbrace{u_{\text{Verm}}}_{\text{Anzahl der Unbekannten}} + \underbrace{d}_{\text{Anzahl der Datumsdefekte}} = 3$$

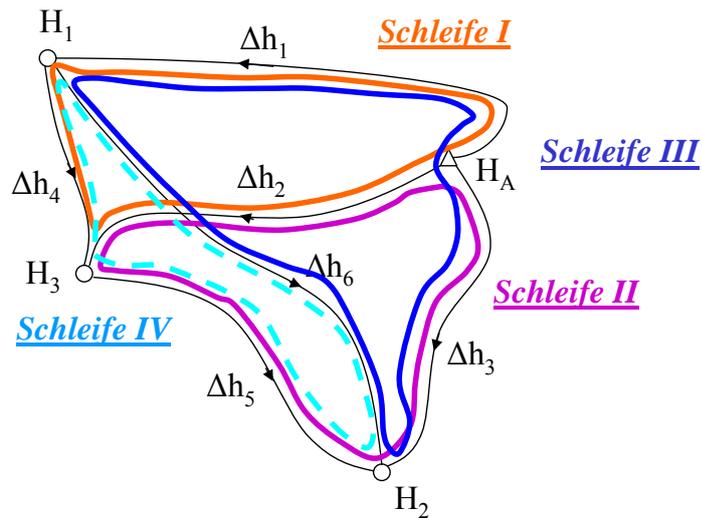
$$\Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow$$

$$f = \underbrace{r_{\text{Bedingt}}}_{\text{Anzahl der Bedingungen}} \Rightarrow \underline{\underline{r_{\text{Bedingt}} = f = 3}}$$

Beispiel „Bedingte Beob.“ – Bedingungsgleichungen

$$\Phi(\tilde{\mathbf{L}}) = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(\hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots, \hat{L}_n) \\ \Phi_2(\hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots, \hat{L}_n) \\ \vdots \\ \Phi_r(\hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots, \hat{L}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$



„aus der Geometrie“

$$\left. \begin{aligned} \text{Schleife I: } \Delta \hat{h}_1 + \Delta \hat{h}_4 - \Delta \hat{h}_2 &= 0 \\ \text{Schleife II: } \Delta \hat{h}_2 + \Delta \hat{h}_5 - \Delta \hat{h}_3 &= 0 \\ \text{Schleife III: } \Delta \hat{h}_1 + \Delta \hat{h}_6 - \Delta \hat{h}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} = 3 \text{ linear unabhängige Bedingungen}$$

$$\text{Schleife IV: } \Delta \hat{h}_4 + \Delta \hat{h}_5 - \Delta \hat{h}_6 = 0 \quad (= \text{Schleife I} + \text{Schleife II} - \text{Schleife III})$$

Beispiel „Bedingte Beob.“ – Vektor der Widersprüche

$$\Phi(\hat{\mathbf{L}})_{3,1 \quad 6,1} = \mathbf{0}_{3,1}$$

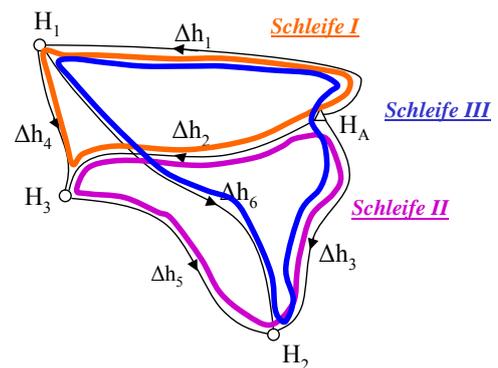
$$\begin{bmatrix} \Phi_1(\Delta\hat{h}_1, \Delta\hat{h}_2, \Delta\hat{h}_3, \Delta\hat{h}_4, \Delta\hat{h}_5, \Delta\hat{h}_6) \\ \Phi_2(\Delta\hat{h}_1, \Delta\hat{h}_2, \Delta\hat{h}_3, \Delta\hat{h}_4, \Delta\hat{h}_5, \Delta\hat{h}_6) \\ \Phi_3(\Delta\hat{h}_1, \Delta\hat{h}_2, \Delta\hat{h}_3, \Delta\hat{h}_4, \Delta\hat{h}_5, \Delta\hat{h}_6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\hat{h}_1 + \Delta\hat{h}_4 - \Delta\hat{h}_2 \\ \Delta\hat{h}_2 + \Delta\hat{h}_5 - \Delta\hat{h}_3 \\ \Delta\hat{h}_1 + \Delta\hat{h}_6 - \Delta\hat{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Widerspruchsvektor

$$\mathbf{w}_{3,1} = \Phi(\hat{\mathbf{L}})_{3,1 \quad 6,1} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 + \Delta h_4 - \Delta h_2 \\ \Delta h_2 + \Delta h_5 - \Delta h_3 \\ \Delta h_1 + \Delta h_6 - \Delta h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,00 \\ 0,30 \\ -0,40 \end{bmatrix}_{[mm]}$$

Beispiel „Bedingte Beob.“ – Modellmatrix B

$$\begin{aligned} \Phi_1: \Delta\hat{h}_1 + \Delta\hat{h}_4 - \Delta\hat{h}_2 &= 0 \\ \Phi_2: \Delta\hat{h}_2 + \Delta\hat{h}_5 - \Delta\hat{h}_3 &= 0 \\ \Phi_3: \Delta\hat{h}_1 + \Delta\hat{h}_6 - \Delta\hat{h}_3 &= 0 \end{aligned}$$

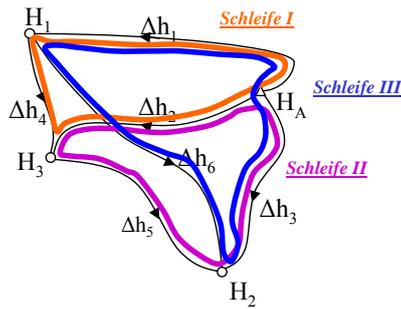


Ableiten aller Φ_i nach allen Beobachtungen L_i

$$\mathbf{B}_{3,6} = \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{L})}{\partial \mathbf{L}} \right)_0 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L})}{\partial L_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L})}{\partial L_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \Phi_1(\mathbf{L})}{\partial L_n} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{L})}{\partial L_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{L})}{\partial L_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \Phi_2(\mathbf{L})}{\partial L_n} \right)_0 \\ \left(\frac{\partial \Phi_3(\mathbf{L})}{\partial L_1} \right)_0 & \left(\frac{\partial \Phi_3(\mathbf{L})}{\partial L_2} \right)_0 & \dots & \left(\frac{\partial \Phi_3(\mathbf{L})}{\partial L_n} \right)_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \Phi_1 \\ \partial \Phi_2 \\ \partial \Phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \Delta h_1 & \partial \Delta h_2 & \partial \Delta h_3 & \partial \Delta h_4 & \partial \Delta h_5 & \partial \Delta h_6 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel „Bedingte Beob.“ – Stochastisches Modell

$$\underline{L}_{6,1} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix} [m]$$



keine Änderungen gegenüber den „vermittelnden Beobachtungen“ oder dem „Allgemeinfall“, da der Vektor \underline{L} nicht geändert wurde!

Länge der Nivellementslinien \Rightarrow

Standardabweichungen

$$\begin{bmatrix} D_{\Delta h_1} \\ D_{\Delta h_2} \\ D_{\Delta h_3} \\ D_{\Delta h_4} \\ D_{\Delta h_5} \\ D_{\Delta h_6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 3,1 \\ 2,4 \\ 1,9 \\ 0,7 \\ 2,8 \end{bmatrix} [km]$$

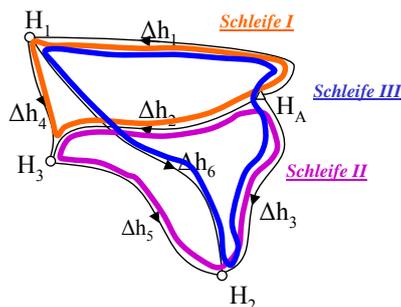
$$\sigma_{km} = 0,4 \frac{mm}{\sqrt{km}}$$

$$\sigma_i = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_i} [km]}$$

$$\begin{cases} \sigma_{\Delta h_1} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_1} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{1,3} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_2} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_2} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{3,1} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_3} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_3} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{2,4} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_4} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_4} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{1,9} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_5} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_5} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{0,7} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_6} = \sigma_{km} \cdot \sqrt{D_{\Delta h_6} [km]} = 0,4 \cdot \sqrt{2,8} \text{ mm} \end{cases}$$

Beispiel „Bedingte Beob.“ – Stochastisches Modell

$$\underline{L}_{6,1} = \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \\ \Delta h_5 \\ \Delta h_6 \end{bmatrix} [m]$$



$$\begin{cases} \sigma_{\Delta h_1} = 0,4 \cdot \sqrt{1,3} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_2} = 0,4 \cdot \sqrt{3,1} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_3} = 0,4 \cdot \sqrt{2,4} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_4} = 0,4 \cdot \sqrt{1,9} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_5} = 0,4 \cdot \sqrt{0,7} \text{ mm} \\ \sigma_{\Delta h_6} = 0,4 \cdot \sqrt{2,8} \text{ mm} \end{cases}$$

Varianz-/Kovarianzmatrix der Beobachtungen:

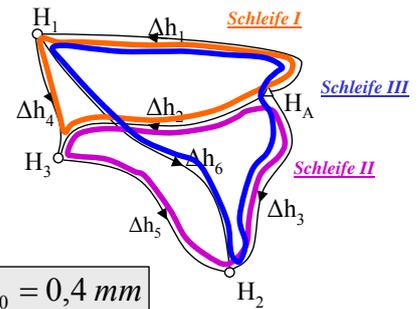
$$\Sigma_{\underline{LL}} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} & \dots & \sigma_1 \sigma_n \rho_{1n} \\ \sigma_2 \sigma_1 \rho_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_2 \sigma_n \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n \sigma_1 \rho_{n1} & \sigma_n \sigma_2 \rho_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4^2 \cdot 1,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4^2 \cdot 3,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 2,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 1,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 2,8 \end{bmatrix} [mm^2]$$

Beispiel „Bedingte Beob.“ – Stochastisches Modell

Varianz-/Kovarianzmatrix der Beobachtungen:

$$\Sigma_{LL} = \begin{bmatrix} 0,4^2 \cdot 1,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4^2 \cdot 3,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 2,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 1,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4^2 \cdot 2,8 \end{bmatrix} [mm^2]$$

gewählt : $\sigma_0 = 0,4 \text{ mm}$



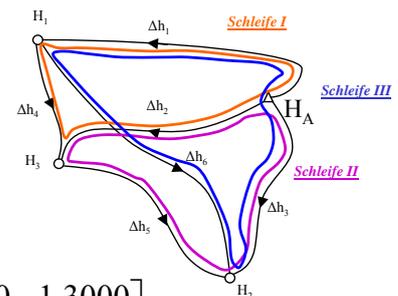
Kofaktormatrix der Beobachtungen:

$$Q_{LL} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \Sigma_{LL} = \begin{bmatrix} 1,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,8 \end{bmatrix} [-]$$

σ_0^2 = Varianz der Gewichtseinheit vor der Ausgleichung („a priori“)

Beispiel „Bedingte Beob.“ – Auflösung der Normalgleichungen

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{k} + \mathbf{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{k} = -(\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{B}^T)^{-1} \cdot \mathbf{w}$$



$$\text{Normalgleichungsmatrix : } \mathbf{N} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 6,3000 & -3,1000 & 1,3000 \\ -3,1000 & 6,2000 & 2,4000 \\ 1,3000 & 2,4000 & 6,5000 \end{bmatrix}$$

$$\text{Inversion : } \mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2756 & 0,1857 & -0,1237 \\ 0,1857 & 0,3133 & -0,1528 \\ -0,1237 & -0,1528 & 0,2350 \end{bmatrix}$$

$$\text{Korrelatenvektor : } \mathbf{k} = -\mathbf{Q} \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -0,3808 \\ -0,3408 \\ 0,2635 \end{bmatrix} [mm]$$

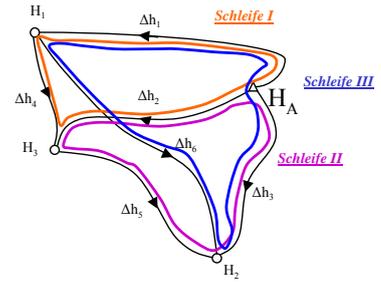
Beispiel „Bedingte Beob.“ – Ausgegliche Beobachtungen

Vektor der Verbesserungen : $\mathbf{v} = \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{k} =$

$$\begin{bmatrix} -0,15 \\ 0,12 \\ 0,19 \\ -0,72 \\ -0,24 \\ 0,74 \end{bmatrix}_{[mm]}$$

Ausgegliche Beobachtungen : $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{v} =$

$$\begin{bmatrix} 0,4466 \\ 1,6050 \\ 1,9020 \\ 1,1584 \\ 0,2970 \\ 1,4553 \end{bmatrix}_{[m]}$$



Ausgleichungsprobe : $\Phi(\hat{\mathbf{L}}) = \begin{bmatrix} 0,0000 \\ 0,2220 \\ 0,2220 \end{bmatrix} \cdot 10^{-15} = 0$

Gehört zu jeder Ausgleichung !!!

Beispiel „Bedingte Beob.“ – Genauigkeitsangaben

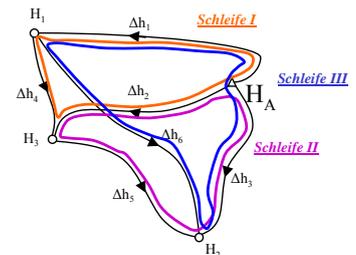
Varianz der Gewichtseinheit („a posteriori“):

$$s_0^2 = \frac{-\mathbf{k}^T \cdot \mathbf{w}}{3} = 0,1962 \text{ mm}^2$$

Vergleich mit „a priori“
 $\sigma_0^2 = 0,16 \text{ mm}^2$

Kofaktormatrix der Verbesserungen :

$$\mathbf{Q}_{vv} = \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{Q}_{11} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_{LL} \Rightarrow \Sigma_{vv} = s_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{vv}$$



Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Beobachtungen:

$$\Sigma_{\hat{L}\hat{L}} = s_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{L}\hat{L}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q}_{\hat{L}\hat{L}} = \mathbf{Q}_{LL} - \mathbf{Q}_{vv}$$

$$= \begin{bmatrix} s_{\Delta\hat{h}_1}^2 & s_{\Delta\hat{h}_1\Delta\hat{h}_2} & s_{\Delta\hat{h}_1\Delta\hat{h}_3} & s_{\Delta\hat{h}_1\Delta\hat{h}_4} & s_{\Delta\hat{h}_1\Delta\hat{h}_5} & s_{\Delta\hat{h}_1\Delta\hat{h}_6} \\ s_{\Delta\hat{h}_2\Delta\hat{h}_1} & s_{\Delta\hat{h}_2}^2 & s_{\Delta\hat{h}_2\Delta\hat{h}_3} & s_{\Delta\hat{h}_2\Delta\hat{h}_4} & s_{\Delta\hat{h}_2\Delta\hat{h}_5} & s_{\Delta\hat{h}_2\Delta\hat{h}_6} \\ s_{\Delta\hat{h}_3\Delta\hat{h}_1} & s_{\Delta\hat{h}_3\Delta\hat{h}_2} & s_{\Delta\hat{h}_3}^2 & s_{\Delta\hat{h}_3\Delta\hat{h}_4} & s_{\Delta\hat{h}_3\Delta\hat{h}_5} & s_{\Delta\hat{h}_3\Delta\hat{h}_6} \\ s_{\Delta\hat{h}_4\Delta\hat{h}_1} & s_{\Delta\hat{h}_4\Delta\hat{h}_2} & s_{\Delta\hat{h}_4\Delta\hat{h}_3} & s_{\Delta\hat{h}_4}^2 & s_{\Delta\hat{h}_4\Delta\hat{h}_5} & s_{\Delta\hat{h}_4\Delta\hat{h}_6} \\ s_{\Delta\hat{h}_5\Delta\hat{h}_1} & s_{\Delta\hat{h}_5\Delta\hat{h}_2} & s_{\Delta\hat{h}_5\Delta\hat{h}_3} & s_{\Delta\hat{h}_5\Delta\hat{h}_4} & s_{\Delta\hat{h}_5}^2 & s_{\Delta\hat{h}_5\Delta\hat{h}_6} \\ s_{\Delta\hat{h}_6\Delta\hat{h}_1} & s_{\Delta\hat{h}_6\Delta\hat{h}_2} & s_{\Delta\hat{h}_6\Delta\hat{h}_3} & s_{\Delta\hat{h}_6\Delta\hat{h}_4} & s_{\Delta\hat{h}_6\Delta\hat{h}_5} & s_{\Delta\hat{h}_6}^2 \end{bmatrix}$$

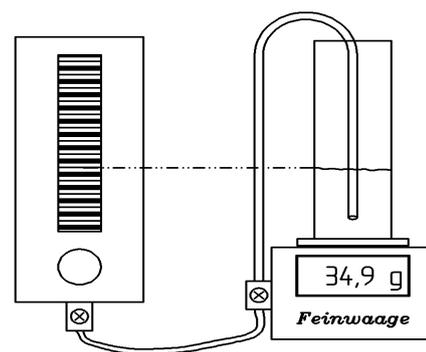
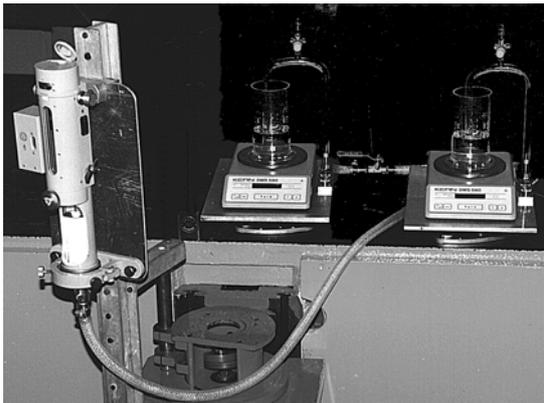
$$= \begin{bmatrix} 0,1677 & 0,0941 & 0,0882 & -0,0736 & -0,0059 & -0,0795 \\ 0,0941 & 0,1980 & 0,1437 & 0,1039 & -0,0543 & 0,0496 \\ 0,0882 & 0,1437 & 0,1966 & 0,0555 & 0,0529 & 0,1083 \\ -0,0736 & 0,1039 & 0,0555 & 0,1775 & -0,0484 & 0,1291 \\ -0,0059 & -0,0543 & 0,0529 & -0,0484 & 0,1072 & 0,0588 \\ -0,0795 & 0,0496 & 0,1083 & 0,1291 & 0,0588 & 0,1878 \end{bmatrix}_{[mm^2]}$$

Standardabweichungen der ausgeglichenen Beobachtungen

$$\begin{aligned} S_{\Delta\hat{h}_1} &= +\sqrt{s_{\Delta\hat{h}_1}^2} = 0,41 \text{ mm} \\ S_{\Delta\hat{h}_2} &= +\sqrt{s_{\Delta\hat{h}_2}^2} = 0,45 \text{ mm} \\ S_{\Delta\hat{h}_3} &= +\sqrt{s_{\Delta\hat{h}_3}^2} = 0,44 \text{ mm} \\ S_{\Delta\hat{h}_4} &= +\sqrt{s_{\Delta\hat{h}_4}^2} = 0,42 \text{ mm} \\ S_{\Delta\hat{h}_5} &= +\sqrt{s_{\Delta\hat{h}_5}^2} = 0,33 \text{ mm} \\ S_{\Delta\hat{h}_6} &= +\sqrt{s_{\Delta\hat{h}_6}^2} = 0,43 \text{ mm} \end{aligned}$$

Anwendung „Regressionsmodelle“

Beispiel Regression – Kalibrierung einer Schlauchwaage



Ableseung Feinwaage X [g]	10,2	22,7	34,9	47,1	58,3	69,2	82,0	91,4
Ableseung MEISSER Y [mm]	3,7675	7,1158	14,4216	25,7164	39,5972	56,3342	80,0536	100,2689

$$\text{Geradengleichung} \quad f(x) = b_0 + b_1 \cdot x$$
$$Y_{[mm]} = b_0 + b_1 \cdot X_{[g]}$$

Lineare Regression als vermittelnde Beobachtungen

Geradengleichung $f(x) = b_0 + b_1 \cdot x$
 $Y_{[mm]_i} = b_0 + b_1 \cdot X_{[g]_i}$

$$\underbrace{\hat{\mathbf{Y}}_{[mm]}_{n,1}}_{\hat{\mathbf{L}}_{n,1}} = \underbrace{\mathbf{Y}_{[mm]}_{n,1}}_{\mathbf{L}_{n,1}} + \mathbf{v}_{n,1} = \underbrace{\hat{b}_0 \cdot \mathbf{e}_{n,1} + \hat{b}_1 \cdot \mathbf{X}_{[g]}_{n,1}}_{\underbrace{\hat{\mathbf{X}}_{u,1} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix}}_{\text{unbekannt}}} \cdot \underbrace{\mathbf{X}_{[g]}_{n,1}}_{\text{fehlerfrei}}$$

$$\hat{l}_i = l_i + v_i = \Phi_i(\hat{\mathbf{X}}_{u,1})$$

$$\hat{\mathbf{L}}_{n,1} = \mathbf{L}_{n,1} + \mathbf{v}_{n,1} = \Phi(\hat{\mathbf{X}}_{u,1})$$

Lineare Regression als vermittelnde Beobachtungen

Verbesserungsgleichung: $Y_{[mm]_i} + v_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot X_{[g]_i} = \Phi_i(\hat{\mathbf{X}}_{u,1})$

Designmatrix: $\mathbf{A}_{n,u} = \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right)_0 = \begin{matrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{X}} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{X}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial \mathbf{X}} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & X_{[g]_1} \\ 1 & X_{[g]_2} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_{[g]_n} \end{bmatrix}$

linearisiert:

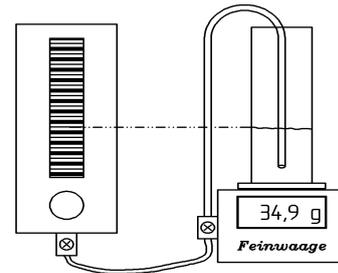
$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{[mm]_1} \\ Y_{[mm]_2} \\ \vdots \\ Y_{[mm]_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{[g]_1} \\ 1 & X_{[g]_2} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_{[g]_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix}$$

Beispiel „lineare Regression“ – Stochastisches Modell

Kovarianzmatrix der Beobachtungen:

$$\Sigma_{LL} = \begin{bmatrix} 0,01^2 \cdot 1,3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0,01^2 \cdot 3,1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0,01^2 \cdot 1,9 \end{bmatrix} [mm^2]$$



gewählt : $\sigma_0 = 0,01 \text{ mm}$

Kofaktormatrix der Beobachtungen:

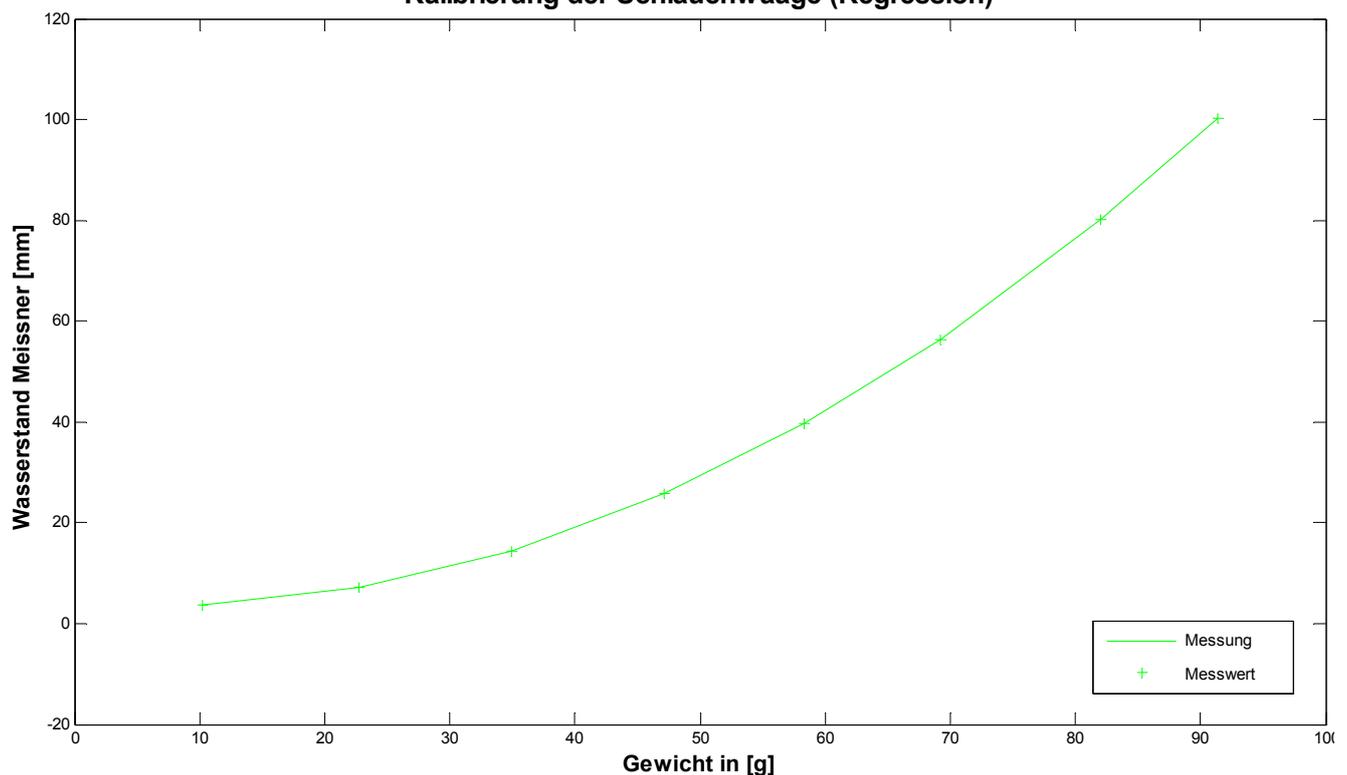
$$Q_{LL} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \Sigma_{LL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} [-]$$

Gewichtsmatrix der Beobachtungen:

$$P_{n,n} = Q_{LL}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} [-]$$

Vermittelnde Beobachtungen — Regression (Stützstellen)

Kalibrierung der Schlauchwaage (Regression)



Vermittelnde Beobachtungen – Lineare Regression

[g] → [mm]

$$L = \begin{matrix} 3.7675 \\ 7.1158 \\ 14.4216 \\ 25.7164 \\ 39.5972 \\ 56.3342 \\ 80.0536 \\ 100.2689 \end{matrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \end{pmatrix}_{n,u} = \begin{matrix} \mathbf{A} = & \begin{matrix} 1.0000 & 10.2000 \\ 1.0000 & 22.7000 \\ 1.0000 & 34.9000 \\ 1.0000 & 47.1000 \\ 1.0000 & 58.3000 \\ 1.0000 & 69.2000 \\ 1.0000 & 82.0000 \\ 1.0000 & 91.4000 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^{-1}_{u,u}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}d\mathbf{x}d} = \begin{matrix} 0.5981 & -0.0091 \\ -0.0091 & 0.0002 \end{matrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{u,l} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}_{u,u} \cdot \mathbf{n}_{u,l}$$

$$\mathbf{x}d = \begin{matrix} -21.3528 \\ 1.1979 \end{matrix}$$

$$\hat{\mathbf{L}}_{n,l} = \mathbf{L}_{n,l} + \mathbf{v}_{n,l}$$

$$\mathbf{L}d = \begin{matrix} -9.1340 \\ 5.8401 \\ 20.4548 \\ 35.0695 \\ 48.4863 \\ 61.5437 \\ 76.8771 \\ 88.1376 \end{matrix}$$

$$\mathbf{v}_{n,l} = \mathbf{A}_{n,u} \cdot \hat{\mathbf{x}}_{u,l} - \mathbf{l}_{n,l}$$

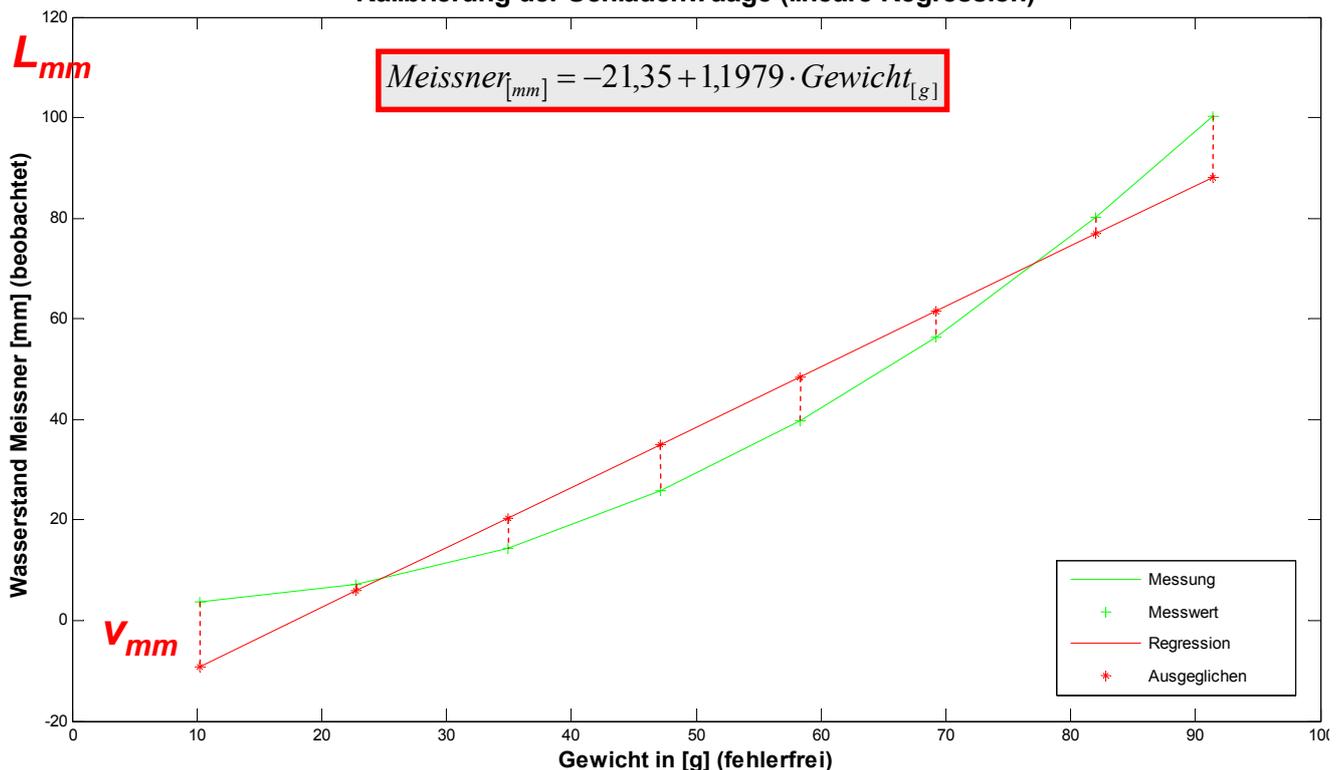
$$\mathbf{v} = \begin{matrix} -12.9015 \\ -1.2757 \\ 6.0332 \\ 9.3531 \\ 8.8891 \\ 5.2095 \\ -3.1765 \\ -12.1313 \end{matrix}$$



Vermittelnde Beobachtungen – Lineare Regression

[g] → [mm]

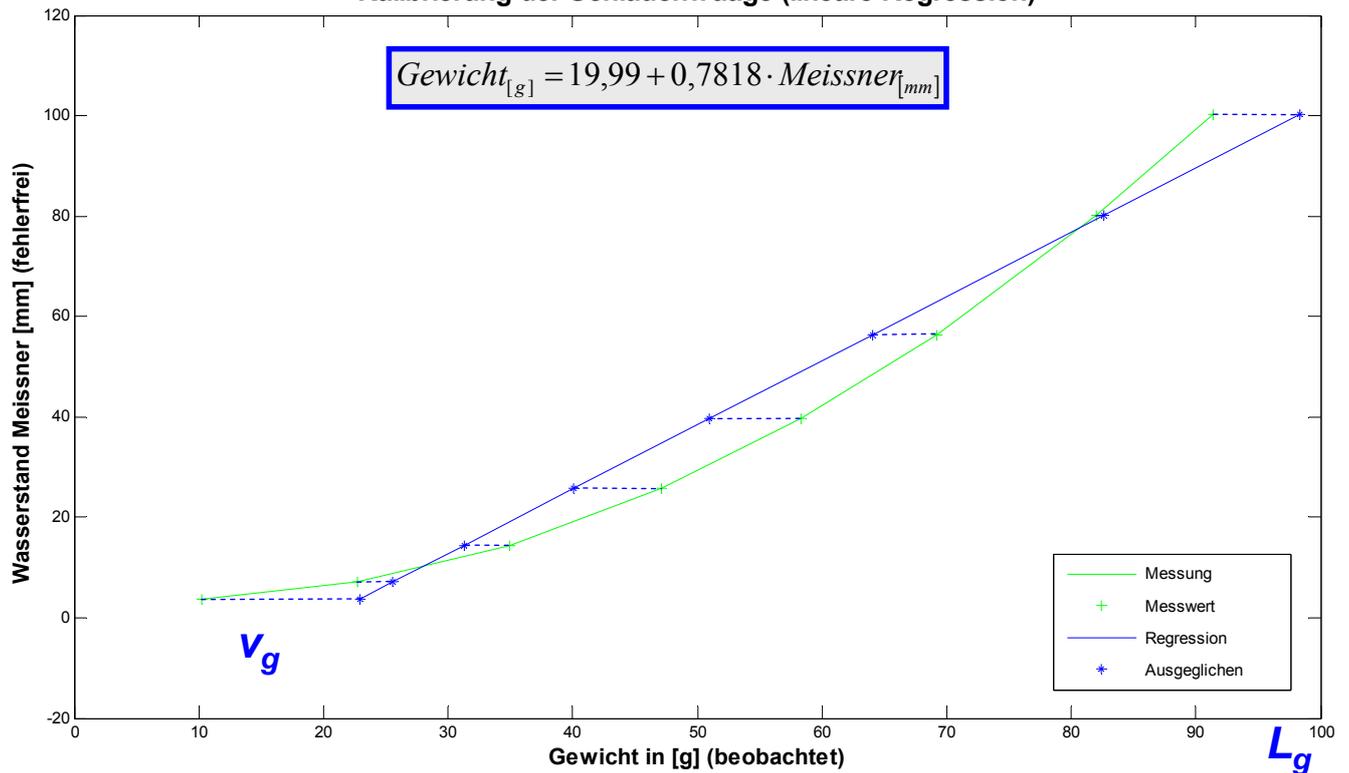
Kalibrierung der Schlauchwaage (lineare Regression)



Vermittelnde Beobachtungen — Lineare Regression

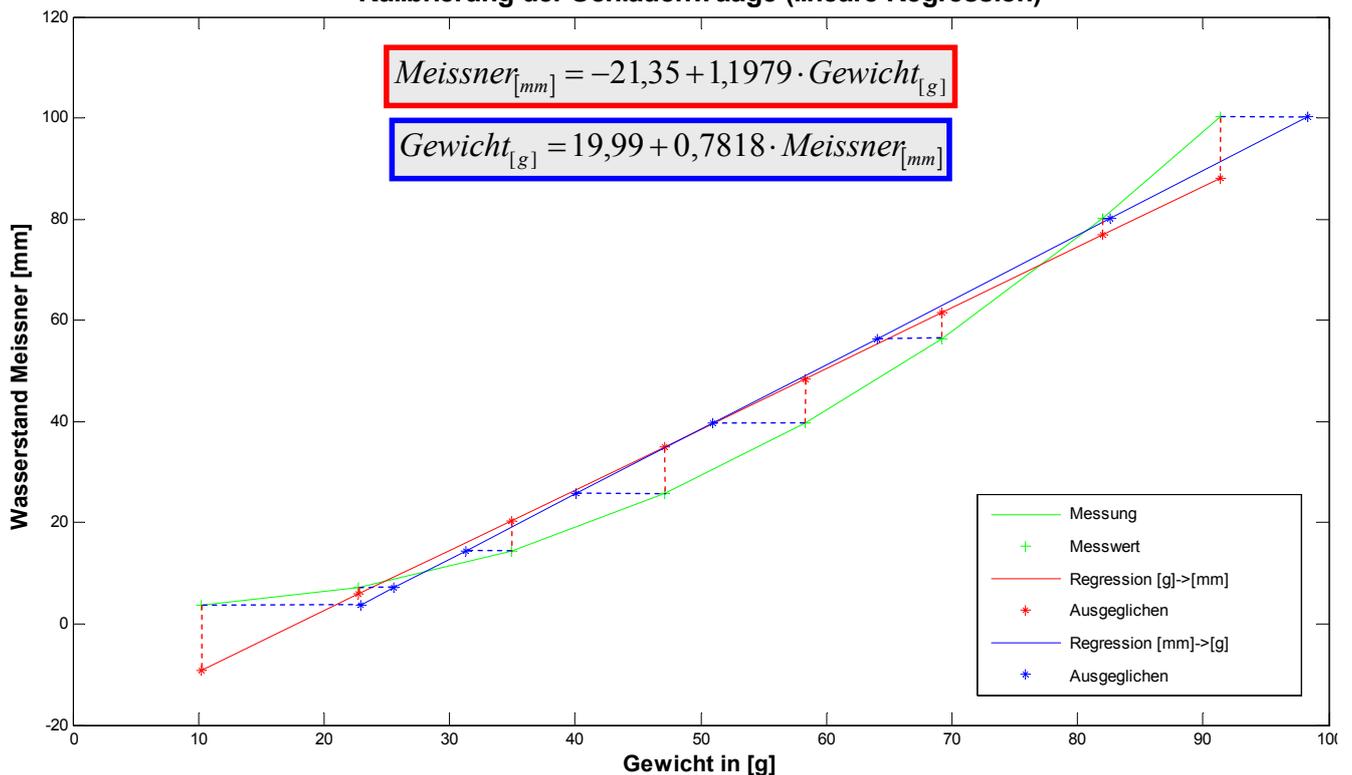
[mm]→[g]

Kalibrierung der Schlauchwaage (lineare Regression)

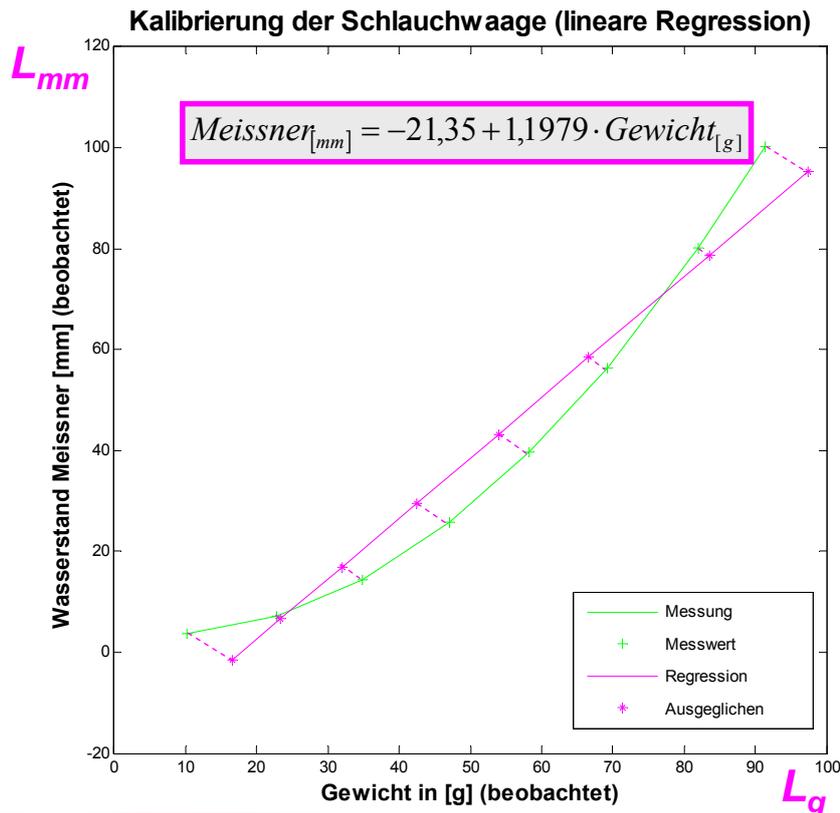


Vermittelnde Beobachtungen — Lineare Regression

Kalibrierung der Schlauchwaage (lineare Regression)



Allgemeinfall — Lineare Regression



$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_g \\ 8,1 \\ \bar{\mathbf{L}}_{mm} \\ 8,1 \end{bmatrix}$$

16,1



Polynom-Regression als vermittelnde Beobachtungen

Verbesserungsgleichung: $Y_{[mm]_i} + v_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot X_{[g]_i} + \hat{b}_2 \cdot X_{[g]_i}^2 + \dots = \Phi_i(\hat{\mathbf{X}}_{u,1})$

Designmatrix: $\mathbf{A}_{n,u} = \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right)_0 = \begin{matrix} \partial \Phi_1 \\ \partial \Phi_2 \\ \vdots \\ \partial \Phi_n \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & X_{[g]_1} & X_{[g]_1}^2 & \dots \\ 1 & X_{[g]_2} & X_{[g]_2}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{[g]_n} & X_{[g]_n}^2 & \dots \end{bmatrix}$

linearisiert: $\mathbf{I} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$

$$\begin{bmatrix} Y_{[mm]_1} \\ Y_{[mm]_2} \\ \vdots \\ Y_{[mm]_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{[g]_1} & X_{[g]_1}^2 & \dots \\ 1 & X_{[g]_2} & X_{[g]_2}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{[g]_n} & X_{[g]_n}^2 & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$



Multiple Regression als vermittelnde Beobachtungen

$$\text{Verbesserungsgleichung: } Y_{[mm]_i} + v_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot X_{[g]_i} + \hat{b}_2 \cdot T_{[^\circ C]_i} + \dots = \Phi_i(\hat{\mathbf{X}}_{u,1})$$

$$\text{Designmatrix: } \mathbf{A}_{n,u} = \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right)_0 = \begin{matrix} \partial \Phi_1 & \begin{bmatrix} 1 & X_{[g]_1} & T_{[^\circ C]_1} & \dots \\ \partial \Phi_2 & 1 & X_{[g]_2} & T_{[^\circ C]_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial \Phi_n & 1 & X_{[g]_n} & T_{[^\circ C]_n} & \dots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\text{linearisiert: } \mathbf{1} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{[mm]_1} \\ Y_{[mm]_2} \\ \vdots \\ Y_{[mm]_n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{[g]_1} & T_{[^\circ C]_1} & \dots \\ 1 & X_{[g]_2} & T_{[^\circ C]_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{[g]_n} & T_{[^\circ C]_n} & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Ergebnis der Regression

$$\text{Verbesserungsgleichung: } Y_{[mm]_i} + v_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \cdot X_{[g]_i} + \hat{b}_2 \cdot T_{[^\circ C]_i} + \dots = \Phi_i(\hat{\mathbf{X}}_{u,1})$$

$$\text{Vermittelnd: } \hat{\mathbf{1}}_{n,1} = \mathbf{1}_{n,1} + \mathbf{v}_{n,1} = b_0 + b_1 \cdot x$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{u,1} = \hat{\mathbf{X}}_{u,1} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_m \end{bmatrix} \text{ mit } \Sigma_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}}} = \Sigma_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{b}_0}^2 & \sigma_{\hat{b}_0\hat{b}_1} & \dots & \sigma_{\hat{b}_0\hat{b}_m} \\ \sigma_{\hat{b}_1\hat{b}_0} & \sigma_{\hat{b}_1}^2 & \dots & \sigma_{\hat{b}_1\hat{b}_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\hat{b}_m\hat{b}_0} & \sigma_{\hat{b}_m\hat{b}_1} & \dots & \sigma_{\hat{b}_m}^2 \end{bmatrix}, u = m + 1$$

$$\hat{\mathbf{L}}_{n,1} = \begin{bmatrix} \hat{l}_1 \\ \hat{l}_2 \\ \vdots \\ \hat{l}_n \end{bmatrix} \text{ mit } \Sigma_{\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{l}_1}^2 & \sigma_{\hat{l}_1\hat{l}_2} & \dots & \sigma_{\hat{l}_1\hat{l}_n} \\ \sigma_{\hat{l}_2\hat{l}_1} & \sigma_{\hat{l}_2}^2 & \dots & \sigma_{\hat{l}_2\hat{l}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\hat{l}_n\hat{l}_1} & \sigma_{\hat{l}_n\hat{l}_2} & \dots & \sigma_{\hat{l}_n}^2 \end{bmatrix}$$

Regression — Überprüfung der Varianz der Gewichtseinheit

Varianz der Gewichtseinheit a priori

frei gewählt : $\sigma_0 \Rightarrow \sigma_0^2$



Varianz der Gewichtseinheit a posteriori

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}}{n - u} \quad s_0 = +\sqrt{s_0^2}$$

$$f = n - u + d \quad \alpha = 0,05$$

bei $s_0 > \sigma_0$

Hypothesen : $H_0 : E\{s_0^2\} = \sigma_0^2$
 $H_A : E\{s_0^2\} > \sigma_0^2$

Testgröße : $\hat{F} = \frac{s_0^2}{\sigma_0^2}$

Quantil : $F_{f_1, f_2, 1-\alpha} = F_{f_1, \infty, 0,95}$

Entscheidung : $\hat{F} \leq F_{f_1, f_2, 1-\alpha} \Rightarrow H_0$ annehmen
 $\hat{F} > F_{f_1, f_2, 1-\alpha} \Rightarrow H_A$ annehmen

Globaltest der Regressionsparameter

$$\hat{\mathbf{b}}_{u,1} = \hat{\mathbf{X}}_{u,1} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_m \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \Sigma_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}}} = \Sigma_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{b}_0}^2 & \sigma_{\hat{b}_0\hat{b}_1} & \cdots & \sigma_{\hat{b}_0\hat{b}_m} \\ \sigma_{\hat{b}_1\hat{b}_0} & \sigma_{\hat{b}_1}^2 & \cdots & \sigma_{\hat{b}_1\hat{b}_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\hat{b}_m\hat{b}_0} & \sigma_{\hat{b}_m\hat{b}_1} & \cdots & \sigma_{\hat{b}_m}^2 \end{bmatrix}, \quad u = m + 1$$

Hypothesen : $H_0 : E\{\hat{\mathbf{b}}\} = \mathbf{0}$ $\alpha = 0,05 \hat{=} \text{"signifikant"}$
 $H_A : E\{\hat{\mathbf{b}}\} \neq \mathbf{0}$ $\alpha = 0,01 \hat{=} \text{"hochsignifikant"}$

Testgröße : $\hat{F} = \frac{\hat{\mathbf{b}}^T \cdot \Sigma_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{b}}}{q} = \frac{\hat{\mathbf{b}}^T \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{b}}}{q \cdot s_0^2}$

Quantil : $F_{q, f, 1-\alpha}$ Wert der "Fisher - Verteilung"
 mit $q = Rg(\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}}}^{-1}) = u$ (z.B. aus Tabelle)

Entscheidung : $\hat{F} \leq F_{q, f, 1-\alpha} \Rightarrow H_0$ annehmen (H_A verwerfen)
 $\hat{F} > F_{q, f, 1-\alpha} \Rightarrow H_0$ verwerfen (H_A annehmen)

Individualtest der Regressionsparameter (multipler Test)

$$\hat{\mathbf{b}}_{u,1} = \hat{\mathbf{X}}_{u,1}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_m \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \Sigma_{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{b}}} = \Sigma_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{b}_0}^2 & \sigma_{\hat{b}_0\hat{b}_1} & \cdots & \sigma_{\hat{b}_0\hat{b}_m} \\ \sigma_{\hat{b}_1\hat{b}_0} & \sigma_{\hat{b}_1}^2 & \cdots & \sigma_{\hat{b}_1\hat{b}_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\hat{b}_m\hat{b}_0} & \sigma_{\hat{b}_m\hat{b}_1} & \cdots & \sigma_{\hat{b}_m}^2 \end{bmatrix}, \quad u = m + 1$$

Hypothesen: $H_0 : E\{\hat{b}_i\} = 0$ für $i = 1, 2, \dots, (m + 1)$
 $H_A : E\{\hat{b}_i\} \neq 0$

Testgröße: $\hat{t}_i = \frac{\hat{b}_i}{s_{\hat{b}_i}}$ $\alpha = 0,05 \hat{=} \text{"signifikant"}$
 $\alpha = 0,01 \hat{=} \text{"hochsignifikant"}$

Quantil: $t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}}$ Wert der "Student"-Verteilung (z.B. aus Tabelle) $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{(m+1)}$

Entscheidung: $\hat{t} \leq t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ annehmen (H_A verwerfen)
 $\hat{t} > t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$ verwerfen (H_A annehmen)

Repetitorium zur Ausgleichsrechnung

Anwendung „Homogenisierung von Flurkarten“

Homogenisierung von Flurkarten – Definition

Unter Homogenisierung wird die (schrittweise) Verbesserung der Metrik einer digitalisierten Grundrissituation durch Einbringen von Zusatzinformation in den graphischen Datenbestand verstanden. Dadurch kann ein einheitlicher Raumbezug hergestellt werden.

(Gläbel/Fritsch 1991)

Homogenisierung von Flurkarten – Aufgaben

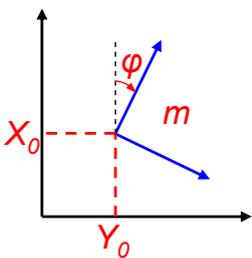
1. Digitale Erfassung analoger Flurkarten durch Scan- oder Digitalisierverfahren
2. Numerische Nachbehandlung durch
 - Transformation ins Landeskoordinatensystem (Georeferenzierung)
 - Verknüpfung benachbarter Kartenmodelle
 - Austausch der Sollpunktkoordinaten
 - Nachbarschaftstreue Interpolation von Neupunkten in das Festpunktfeld
 - Berücksichtigung kartenimmanenter geometrischer Bedingungen
 - Integration neuer Beobachtungen

Lösung:

- sequentiell ablaufende Ausgleichungsverfahren im hierarchischen Modell
- simultane Homogenisierung durch Ausgleichung im hybriden Modell

- ALK (Automatisierte Liegenschaftskarte)
- + ALB (Automatisiertes Liegenschaftsbuch)
- = ALKIS: Amtliches LiegenschaftskatasterInformationssystem (Modell zur Beschreibung aller im Liegenschaftskataster zu führenden Objekte sowie aller Geschäftsprozesse zur Führung und Benutzung der geführten Objekte)

4-Parameter – Helmert-Transformation



Identische Punkte :
 $P_{Alkis}(Y_i, X_i)$ und $P_{digi}(y_i, x_i)$
 Zielsystem Ausgangssystem

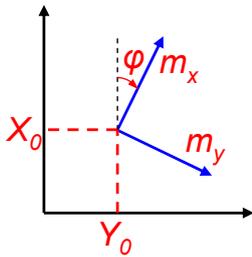
$$\Rightarrow \mathbf{L} = \begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ y_P \\ x_P \end{bmatrix} \quad \text{mit } \Sigma_{LL} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2 & & & & \\ & \sigma_{x_1}^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{y_P}^2 & \\ & & & & \sigma_{x_P}^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{v} = \Phi(\hat{\mathbf{X}})$$

$$\begin{aligned} x_i + v_{x_i} &= \hat{a} \cdot (X_i - \hat{X}_0) - \hat{o} \cdot (Y_i - \hat{Y}_0) \\ y_i + v_{y_i} &= \hat{o} \cdot (X_i - \hat{X}_0) + \hat{a} \cdot (Y_i - \hat{Y}_0) \end{aligned} \Rightarrow \hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_0 \\ \hat{X}_0 \\ \hat{a} \\ \hat{o} \end{bmatrix} \quad \text{mit } \Sigma_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{Y}_0}^2 & \sigma_{\hat{Y}_0\hat{X}_0} & \sigma_{\hat{Y}_0\hat{a}} & \sigma_{\hat{Y}_0\hat{o}} \\ \sigma_{\hat{X}_0\hat{Y}_0} & \sigma_{\hat{X}_0}^2 & \sigma_{\hat{X}_0\hat{a}} & \sigma_{\hat{X}_0\hat{o}} \\ \sigma_{\hat{a}\hat{Y}_0} & \sigma_{\hat{a}\hat{X}_0} & \sigma_{\hat{a}}^2 & \sigma_{\hat{a}\hat{o}} \\ \sigma_{\hat{o}\hat{Y}_0} & \sigma_{\hat{o}\hat{X}_0} & \sigma_{\hat{o}\hat{a}} & \sigma_{\hat{o}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{bzw. } x_i + v_{x_i} &= \hat{m} \cdot \cos \hat{\phi} \cdot (X_i - \hat{X}_0) - \hat{m} \cdot \sin \hat{\phi} \cdot (Y_i - \hat{Y}_0) \\ \text{bzw. } y_i + v_{y_i} &= \hat{m} \cdot \sin \hat{\phi} \cdot (X_i - \hat{X}_0) + \hat{m} \cdot \cos \hat{\phi} \cdot (Y_i - \hat{Y}_0) \end{aligned} \Rightarrow \hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_0 \\ \hat{X}_0 \\ \hat{\phi} \\ \hat{m} \end{bmatrix} \quad \text{mit } \Sigma_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{Y}_0}^2 & \sigma_{\hat{Y}_0\hat{X}_0} & \sigma_{\hat{Y}_0\hat{\phi}} & \sigma_{\hat{Y}_0\hat{m}} \\ \sigma_{\hat{X}_0\hat{Y}_0} & \sigma_{\hat{X}_0}^2 & \sigma_{\hat{X}_0\hat{\phi}} & \sigma_{\hat{X}_0\hat{m}} \\ \sigma_{\hat{\phi}\hat{Y}_0} & \sigma_{\hat{\phi}\hat{X}_0} & \sigma_{\hat{\phi}}^2 & \sigma_{\hat{\phi}\hat{m}} \\ \sigma_{\hat{m}\hat{Y}_0} & \sigma_{\hat{m}\hat{X}_0} & \sigma_{\hat{m}\hat{\phi}} & \sigma_{\hat{m}}^2 \end{bmatrix}$$

5-Parameter – Transformation



Identische Punkte :

$P_{Alkis}(Y_i, X_i)$ und $P_{digi}(y_i, x_i)$
Zielsystem Ausgangssystem

$$\Rightarrow \mathbf{L} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ Y_P \\ x_P \end{bmatrix} \quad \text{mit } \Sigma_{\mathbf{L}\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2 & & & & \\ & \sigma_{x_1}^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{y_P}^2 & \\ & & & & \sigma_{x_P}^2 \end{bmatrix}$$

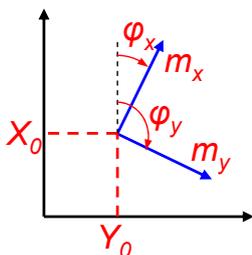
$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{v} = \Phi(\hat{\mathbf{X}})$$

$$x_i + v_{x_i} = \hat{m}_x \cdot \cos \hat{\varphi} \cdot (X_i - \hat{X}_0) - \hat{m}_x \cdot \sin \hat{\varphi} \cdot (Y_i - \hat{Y}_0)$$

$$y_i + v_{y_i} = \hat{m}_y \cdot \sin \hat{\varphi} \cdot (X_i - \hat{X}_0) + \hat{m}_y \cdot \cos \hat{\varphi} \cdot (Y_i - \hat{Y}_0)$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_0 \\ \hat{X}_0 \\ \hat{\varphi} \\ \hat{m}_y \\ \hat{m}_x \end{bmatrix} \quad \text{mit } \Sigma_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{Y}_0}^2 & \sigma_{\hat{Y}_0\hat{X}_0} & \sigma_{\hat{Y}_0\hat{\varphi}} & \sigma_{\hat{Y}_0\hat{m}_y} & \sigma_{\hat{Y}_0\hat{m}_x} \\ \sigma_{\hat{X}_0\hat{Y}_0} & \sigma_{\hat{X}_0}^2 & \sigma_{\hat{X}_0\hat{\varphi}} & \sigma_{\hat{X}_0\hat{m}_y} & \sigma_{\hat{X}_0\hat{m}_x} \\ \sigma_{\hat{\varphi}\hat{Y}_0} & \sigma_{\hat{\varphi}\hat{X}_0} & \sigma_{\hat{\varphi}}^2 & \sigma_{\hat{\varphi}\hat{m}_y} & \sigma_{\hat{\varphi}\hat{m}_x} \\ \sigma_{\hat{m}_y\hat{Y}_0} & \sigma_{\hat{m}_y\hat{X}_0} & \sigma_{\hat{m}_y\hat{\varphi}} & \sigma_{\hat{m}_y}^2 & \sigma_{\hat{m}_y\hat{m}_x} \\ \sigma_{\hat{m}_x\hat{Y}_0} & \sigma_{\hat{m}_x\hat{X}_0} & \sigma_{\hat{m}_x\hat{\varphi}} & \sigma_{\hat{m}_x\hat{m}_y} & \sigma_{\hat{m}_x}^2 \end{bmatrix}$$

6-Parameter – Affin-Transformation



Identische Punkte :

$P_{Alkis}(Y_i, X_i)$ und $P_{digi}(y_i, x_i)$
Zielsystem Ausgangssystem

$$\Rightarrow \mathbf{L} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ Y_P \\ x_P \end{bmatrix} \quad \text{mit } \Sigma_{\mathbf{L}\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2 & & & & \\ & \sigma_{x_1}^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_{y_P}^2 & \\ & & & & \sigma_{x_P}^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{v} = \Phi(\hat{\mathbf{X}})$$

$$x_i + v_{x_i} = \hat{m}_x \cdot \cos \hat{\varphi}_x \cdot (X_i - \hat{X}_0) - \hat{m}_x \cdot \sin \hat{\varphi}_x \cdot (Y_i - \hat{Y}_0)$$

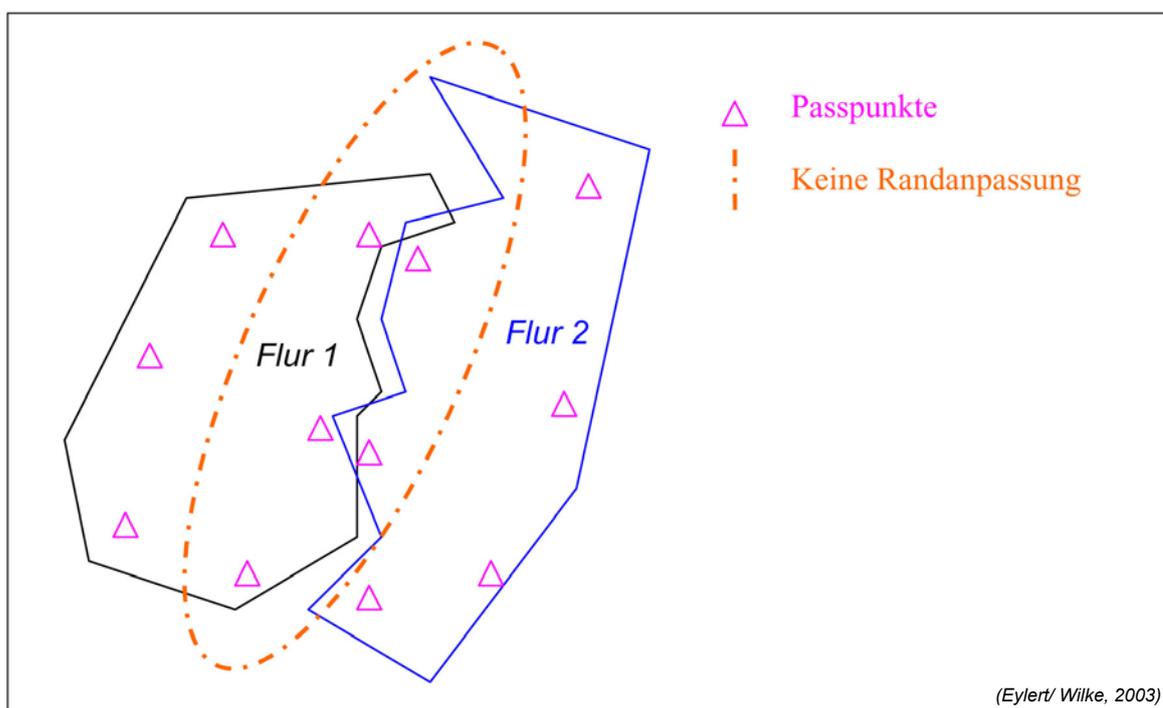
$$y_i + v_{y_i} = \hat{m}_y \cdot \sin \hat{\varphi}_y \cdot (X_i - \hat{X}_0) + \hat{m}_y \cdot \cos \hat{\varphi}_y \cdot (Y_i - \hat{Y}_0)$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_0 \\ \hat{X}_0 \\ \hat{\varphi}_y \\ \hat{\varphi}_x \\ \hat{m}_y \\ \hat{m}_x \end{bmatrix} \quad \text{mit } \Sigma_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{Y}_0}^2 & \sigma_{\hat{Y}_0\hat{X}_0} & \sigma_{\hat{Y}_0\hat{\varphi}_y} & \sigma_{\hat{Y}_0\hat{\varphi}_x} & \sigma_{\hat{Y}_0\hat{m}_y} & \sigma_{\hat{Y}_0\hat{m}_x} \\ \sigma_{\hat{X}_0\hat{Y}_0} & \sigma_{\hat{X}_0}^2 & \sigma_{\hat{X}_0\hat{\varphi}_y} & \sigma_{\hat{X}_0\hat{\varphi}_x} & \sigma_{\hat{X}_0\hat{m}_y} & \sigma_{\hat{X}_0\hat{m}_x} \\ \sigma_{\hat{\varphi}_y\hat{Y}_0} & \sigma_{\hat{\varphi}_y\hat{X}_0} & \sigma_{\hat{\varphi}_y}^2 & \sigma_{\hat{\varphi}_y\hat{\varphi}_x} & \sigma_{\hat{\varphi}_y\hat{m}_y} & \sigma_{\hat{\varphi}_y\hat{m}_x} \\ \sigma_{\hat{\varphi}_x\hat{Y}_0} & \sigma_{\hat{\varphi}_x\hat{X}_0} & \sigma_{\hat{\varphi}_x\hat{\varphi}_y} & \sigma_{\hat{\varphi}_x}^2 & \sigma_{\hat{\varphi}_x\hat{m}_y} & \sigma_{\hat{\varphi}_x\hat{m}_x} \\ \sigma_{\hat{m}_y\hat{Y}_0} & \sigma_{\hat{m}_y\hat{X}_0} & \sigma_{\hat{m}_y\hat{\varphi}_y} & \sigma_{\hat{m}_y\hat{\varphi}_x} & \sigma_{\hat{m}_y}^2 & \sigma_{\hat{m}_y\hat{m}_x} \\ \sigma_{\hat{m}_x\hat{Y}_0} & \sigma_{\hat{m}_x\hat{X}_0} & \sigma_{\hat{m}_x\hat{\varphi}_y} & \sigma_{\hat{m}_x\hat{\varphi}_x} & \sigma_{\hat{m}_x\hat{m}_y} & \sigma_{\hat{m}_x}^2 \end{bmatrix}$$

Transformationsansätze

Transf	Name	Parameter	Zu schätzende Unbekannte
3-P-T	kongruent	3	Translationen X_0, Y_0 , Rotation φ
4-P-T	„Helmert“	4	Translationen X_0, Y_0 , Rotation φ , Maßstab m
5-P-T		5	Translationen X_0, Y_0 , Rotation φ , Maßstäbe m_x, m_y
6-P-T	affin	6	Translationen X_0, Y_0 , Rotationen φ_x, φ_y , Maßstäbe m_x, m_y

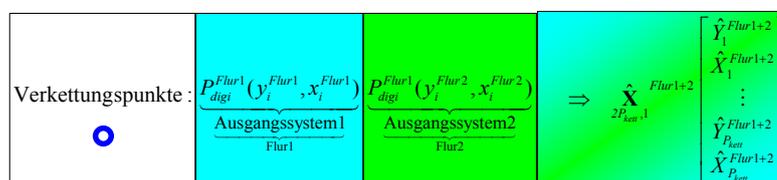
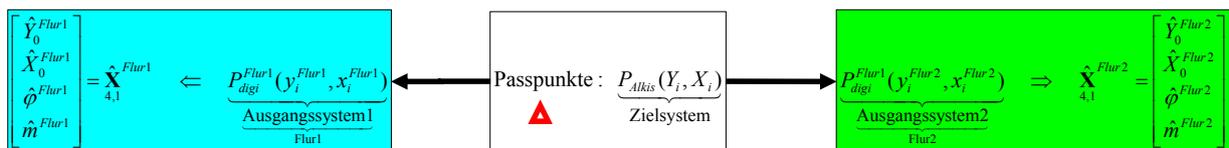
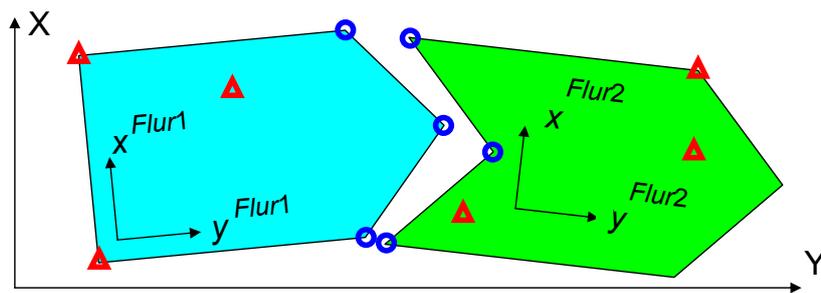
Transformation ohne Randanpassung



Grundlagen zur Liegenschaftskarte in digitaler Form

- Grundlage zur Umstellung von der analogen zur digitalen Liegenschaftskarte sind Passpunkte zur Georeferenzierung der Flurkarten
- Frühere ALK-Erfassungsmethoden basierten auf 6 Passpunkten je Flur
- Problem: In vielen Gebieten (früher insbesondere in den fünf neuen Bundesländern) sind nicht genügend Passpunkte vorhanden und lassen sich auch nicht in kurzer Zeit bereitstellen
- Lösung: „Verkettete Transformation“ als Standardverfahren im Umfeld von Geo-Informationssystemen

Verkettete 4-Parameter – Helmert-Transformation



Verkettung über „topologische Modellierung“

Digitalisierung:
$$\mathbf{L}_{n_1,1}^{T Flur1} = \begin{bmatrix} y_{11}^{Flur1} & x_{11}^{Flur1} & y_{12}^{Flur1} & x_{12}^{Flur1} & \dots & y_k^{Flur1} & x_k^{Flur1} & \dots & y_{k+j}^{Flur1} & x_{k+j}^{Flur1} & \dots & y_{n_1}^{Flur1} & x_{n_1}^{Flur1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{n_2,1}^{T Flur2} = \begin{bmatrix} y_{21}^{Flur2} & x_{21}^{Flur2} & y_{22}^{Flur2} & x_{22}^{Flur2} & \dots & y_k^{Flur2} & x_k^{Flur2} & \dots & y_{k+j}^{Flur2} & x_{k+j}^{Flur2} & \dots & y_{n_2}^{Flur2} & x_{n_2}^{Flur2} \end{bmatrix}$$

identische Punktnummern
in beiden Flurkarten

Beobachtungen:
$$\mathbf{L}_{n_1+n_2,1}^{gesamt} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{n_1,1}^{Flur1} \\ \mathbf{L}_{n_2,1}^{Flur2} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \Sigma_{n,n}^{gesamt} = \begin{bmatrix} \Sigma_{n_1,n_1}^{Flur1} & \\ & \Sigma_{n_2,n_2}^{Flur2} \end{bmatrix}$$

Unbekannte:
$$\hat{\mathbf{X}}_{1,2,4+2j}^T = \left[\underbrace{\hat{Y}_0^{Flur1} \quad \hat{X}_0^{Flur1} \quad \hat{\phi}^{Flur1} \quad \hat{m}^{Flur1}}_{4 \text{ Transformationsparameter "Flurkarte 1"}} \underbrace{\hat{Y}_0^{Flur2} \quad \hat{X}_0^{Flur2} \quad \hat{\phi}^{Flur2} \quad \hat{m}^{Flur2}}_{4 \text{ Transformationsparameter "Flurkarte 2"}} \underbrace{\hat{Y}_k \quad \hat{X}_k \quad \dots \quad \hat{Y}_{k+j} \quad \hat{X}_{k+j}}_{2j \text{ Koordinaten der Verkettungspunkte}} \right]$$

Verkettung über „Pseudobeobachtungen“

Digitalisierung:
$$\mathbf{L}_{n_1,1}^{T Flur1} = \begin{bmatrix} y_{11}^{Flur1} & x_{11}^{Flur1} & y_{12}^{Flur1} & x_{12}^{Flur1} & \dots & y_{1k}^{Flur1} & x_{1k}^{Flur1} & \dots & y_{1k+j}^{Flur1} & x_{1k+j}^{Flur1} & \dots & y_{n_1}^{Flur1} & x_{n_1}^{Flur1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{n_2,1}^{T Flur2} = \begin{bmatrix} y_{21}^{Flur2} & x_{21}^{Flur2} & y_{22}^{Flur2} & x_{22}^{Flur2} & \dots & y_{2k}^{Flur2} & x_{2k}^{Flur2} & \dots & y_{2k+j}^{Flur2} & x_{2k+j}^{Flur2} & \dots & y_{n_2}^{Flur2} & x_{n_2}^{Flur2} \end{bmatrix}$$

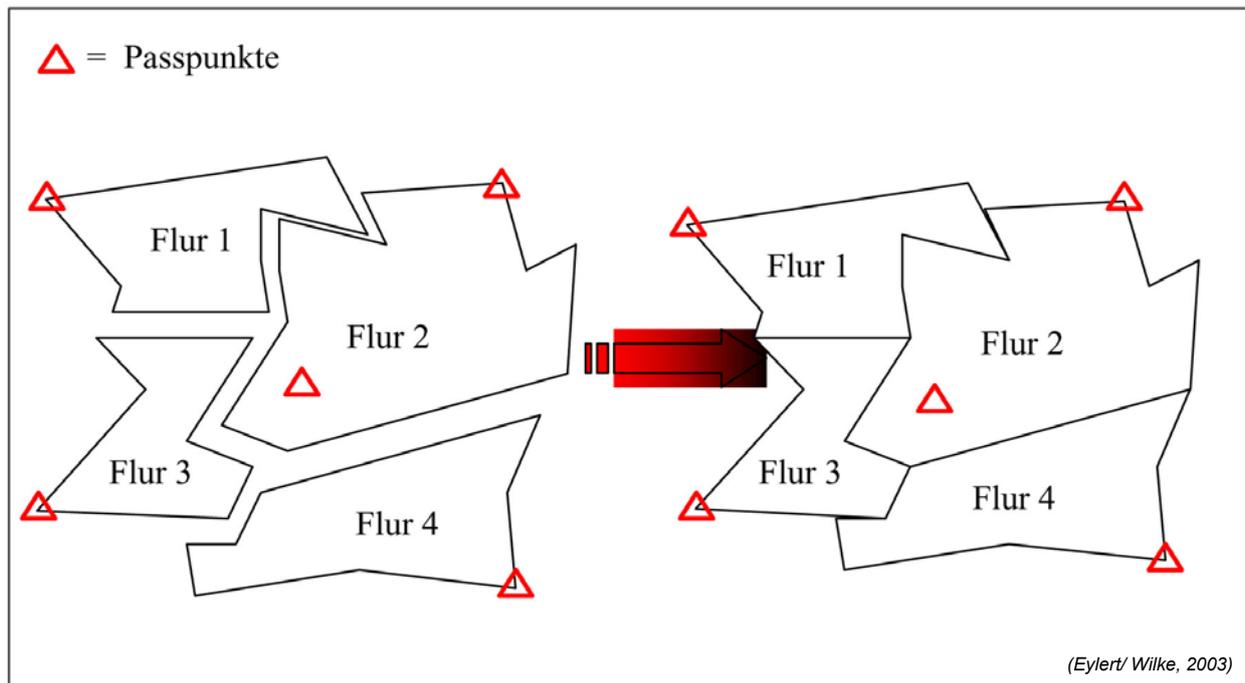
unterschiedliche Punktnummern
in beiden Flurkarten

Pseudobeob.:
$$\mathbf{L}_{j,1}^{T Pseudo} = \begin{bmatrix} D_{1k}^{2k} & D_{1k+1}^{2k+1} & \dots & D_{1k+j}^{2k+j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Beobachtungen:
$$\mathbf{L}_{n_1+n_2+j,1}^{gesamt} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{n_1,1}^{Flur1} \\ \mathbf{L}_{n_2,1}^{Flur2} \\ \mathbf{L}_{j,1}^{Pseudo} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \Sigma_{n,n}^{gesamt} = \begin{bmatrix} \Sigma_{n_1,n_1}^{Flur1} & & \\ & \Sigma_{n_2,n_2}^{Flur2} & \\ & & \Sigma_{j,j}^{Pseudo} \end{bmatrix}$$

Unbekannte:
$$\hat{\mathbf{X}}_{1,2,4+2j}^T = \left[\underbrace{\hat{Y}_0^{Flur1} \quad \hat{X}_0^{Flur1} \quad \hat{\phi}^{Flur1} \quad \hat{m}^{Flur1}}_{4 \text{ Transformationsparameter "Flurkarte 1"}} \underbrace{\hat{Y}_0^{Flur2} \quad \hat{X}_0^{Flur2} \quad \hat{\phi}^{Flur2} \quad \hat{m}^{Flur2}}_{4 \text{ Transformationsparameter "Flurkarte 2"}} \underbrace{\hat{Y}_{1k}^{Flur1} \quad \hat{X}_{1k}^{Flur1} \quad \dots \quad \hat{Y}_{1k+j}^{Flur1} \quad \hat{X}_{1k+j}^{Flur1}}_{2j \text{ Koordinaten der Verkettungspunkte "Flurkarte 1"}} \underbrace{\hat{Y}_{2k}^{Flur2} \quad \hat{X}_{2k}^{Flur2} \quad \dots \quad \hat{Y}_{2k+j}^{Flur2} \quad \hat{X}_{2k+j}^{Flur2}}_{2j \text{ Koordinaten der Verkettungspunkte "Flurkarte 2"}} \right]$$

Ergebnis der verketteten Transformation



Restklaffenverteilung

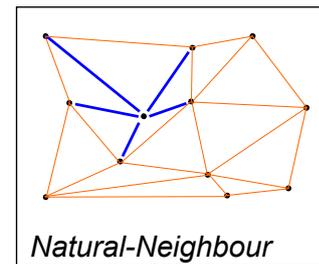
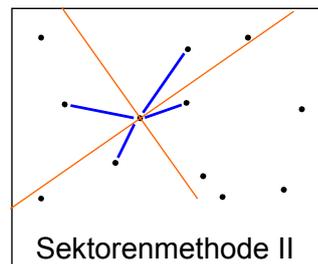
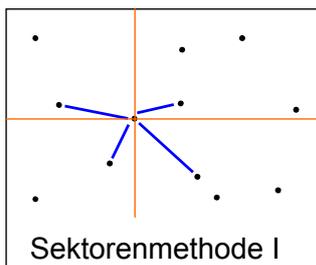
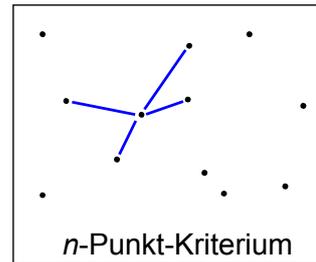
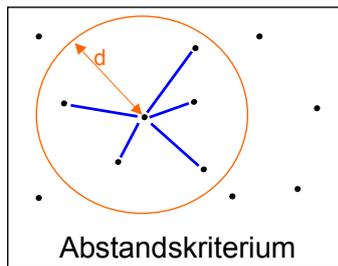
Restklaffenverteilung mittels Interpolationsverfahren

- grafische Verfahren (für numerische Behandlung ungeeignet)
- Interpolationsfunktionen können beliebige *Funktionen* $z(x)$ sein, die in der *Stützstelle* x_i den *Stützwert* z_i liefern

Häufig zur Restklaffenverteilung genutzt:

- Abstandsgewichteter Ansatz
- Multiquadratische Interpolation
- Membranmethode

Restklaffenverteilung – Ermittlung von Nachbarschaften



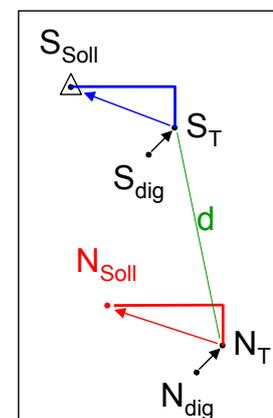
Restklaffenverteilung mittels abstandsgewichteter Interpolation

$$z(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^s w(d_i) \cdot z_i}{\sum_{i=1}^s w(d_i)} \xrightarrow{\text{normierte Gewichtungsfunktion}} p_i = \frac{w_i(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^s w_j(\mathbf{x})}$$

nicht lineare Verbesserungsgleichung

$$\mathbf{v}_{Y_N} = \overbrace{\left(Y_{S_{\text{soll}}} - Y_{S_T} \right) - \left(\hat{Y}_{N_{\text{soll}}} - Y_{N_T} \right)}^{\Phi(\hat{\mathbf{x}})} - \underbrace{0}_l$$

$$\mathbf{v}_{X_N} = \left(X_{S_{\text{soll}}} - X_{S_T} \right) - \left(\hat{X}_{N_{\text{soll}}} - X_{N_T} \right) - 0$$



Geometrische Bedingungen

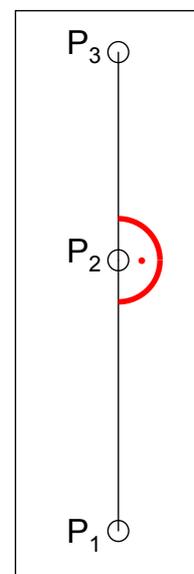
- Geradenbedingung
- Rechtwinkelbedingung
- Parallelenbedingung (mit/ohne Abstand)
- Abstände: Punkt-Punkt oder Punkt-Gerade (\perp)
- Kreisbedingungen
- Splines
- ...

Geradenbedingung

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{a}} \quad \xrightarrow{\mathbf{b}} \quad \text{Vektorprodukt} \\ \hline |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0 \end{array}$$

Widerspruchsgleichung

$$w_i = \overbrace{\left(t_2^1 - t_2^3 \right) - 200 \text{ gon}}^{\Phi(\mathbf{L}, \mathbf{X}_0)}$$
$$w_i = \arctan \left(\frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2} \right) - \arctan \left(\frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2} \right) - \pi$$



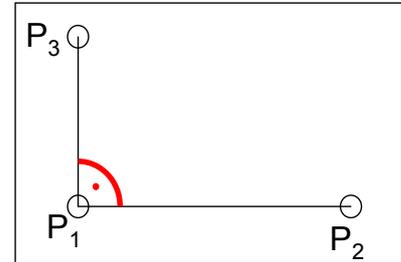
Rechtwinkelbedingung



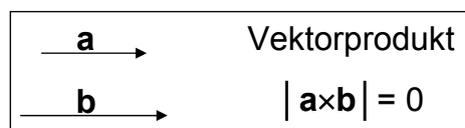
Widerspruchsgleichung

$$w_i = \overbrace{\left(t_1^2 - t_1^3 \right)}^{\Phi(\mathbf{L}, \mathbf{X}_0)} - 100 \text{ gon}$$

$$w_i = \arctan\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right) - \arctan\left(\frac{Y_3 - Y_1}{X_3 - X_1}\right) - \frac{\pi}{2}$$



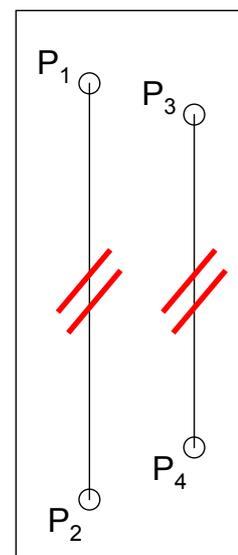
Parallelitätsbedingung



Widerspruchsgleichung

$$w_i = \overbrace{\left(t_1^2 - t_3^4 \right)}^{\Phi(\mathbf{L}, \mathbf{X}_0)} - 0 \text{ gon}$$

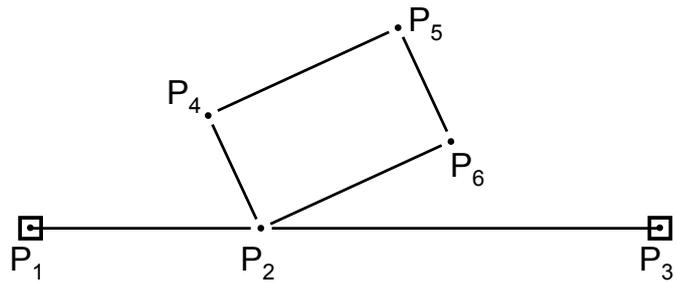
$$w_i = \arctan\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right) - \arctan\left(\frac{Y_4 - Y_3}{X_4 - X_3}\right) - 0$$



Automatisiertes Aufstellen der Bedingungen und deren Diagnose

Situation:

Gebäude $P_2P_4P_5P_6$ steht mit P_2 leicht gedreht auf der Grenze P_1P_3



Automatisch gefundene Bedingungen:

Gerade: $P_1P_2P_3$, ~~$P_1P_2P_6$~~

Rechtwinkel: ~~$P_1P_2P_4$~~ , $P_4P_2P_6$, ~~$P_4P_2P_3$~~ , $P_5P_4P_2$, $P_6P_5P_4$

Automatische Elimination falscher Bedingungen aus dem Kontext der Karte (Digitalisierereihenfolge, Widersprüchen, Redundanzen, ...)

Arbeitsschritte bei der Homogenisierung

- Anhalten von Sollkoordinaten durch Koordinatenaustausch und Restklaffenberechnung (Steigerung der äußeren Genauigkeit)
- Flächenhafte Restklaffenverteilung aus den Sollpunkten, wahlweise abstandsgewichtet oder multiquadratisch, d.h. Transformation und Interpolation im simultanen Ausgleichungsschritt (Steigerung der äußeren Genauigkeit)
- Ausgleichung von multipler Information für identische Punkte (Rand- und Sollpunktzuordnung), verkettete 5-Parameter-Transformation für benachbarte Modelle (Steigerung der äußeren Genauigkeit)
- Implizite Ausgleichung und gewichtete Berücksichtigung geometrischer Bedingungen wie Geradlinigkeiten, Parallelitäten, rechter Winkel, Abstände zwischen Punkten oder zwischen Punkten und Geraden (Erhalt der geometrischen Qualität)
- Erhalt der in der Regel hohen Nachbarschaftsgenauigkeit der Daten durch flächendeckende Dreiecksvermaschung und Restklaffenverteilung über diese Dreiecke (Übertragung und Erhalt der inneren Nachbarschaftsgenauigkeit, d.h. Ableitung gebrauchsfähiger, nachbarschaftstreuer Koordinaten)
- Automatisierte Fehlersuche in allen Daten, wahlweise mittels data-snooping (statistisch) oder mittels Absolutbeträgen in den Verbesserungen (Steigerung der Zuverlässigkeit der Ergebnisse)
- Ausgabe statistischer Angaben und der Standardabweichungen der Ergebnisse (Steigerung der Zuverlässigkeit und der Interpretierbarkeit der Ergebnisse).

Ausgleichsmodelle zur Homogenisierung von Flurkarten

Vermittelnde
Beobachtungen:

$$\Phi(\tilde{\mathbf{X}}) = \tilde{\mathbf{L}}$$

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{I} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}$$

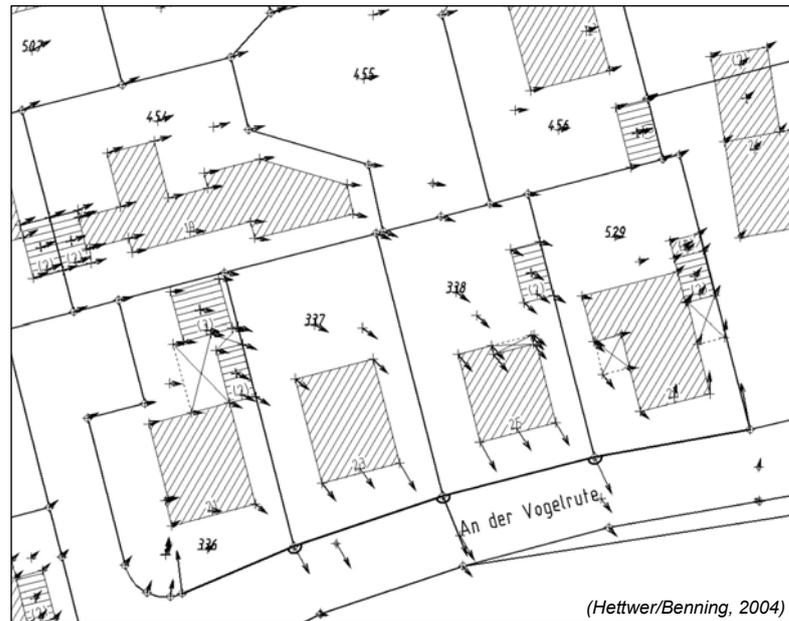
Allgemeinfall:

$$\Phi(\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{X}}) = 0$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

Lösung

- sequentiell im hierarchischen Modell
- simultan im hybriden Modell



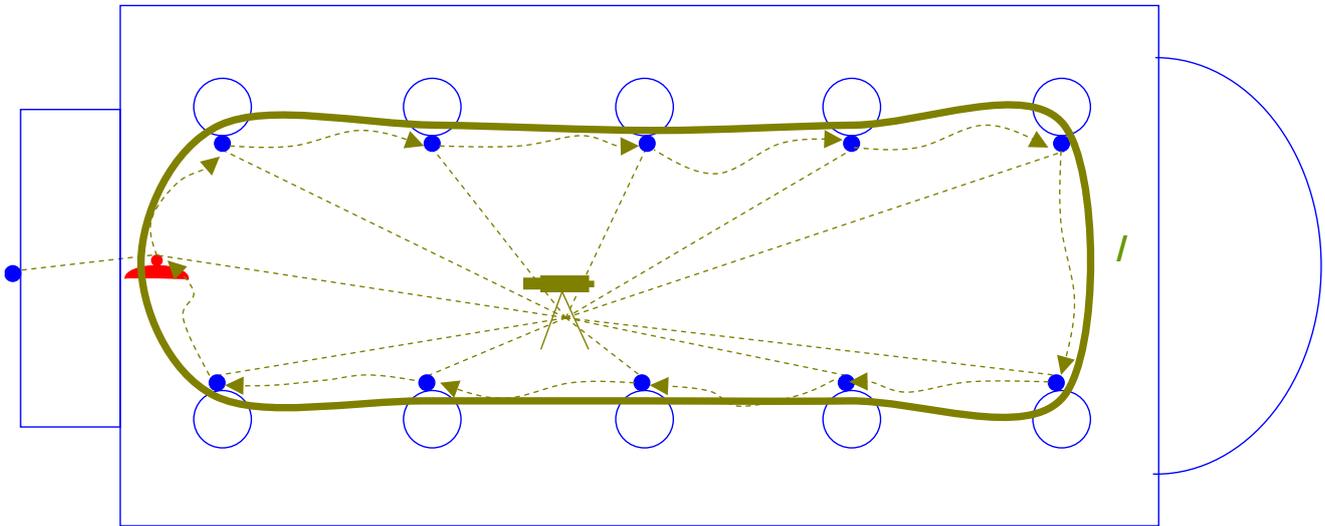
Zur Interpretation der Ausgleichungsergebnisse

- Informationen der Kovarianz bzw. der Kofaktormatrix
- Freiheitsgrade
- Schlußprobe
- Ausreißer
- So zu Sigma0 (Globaltest) / Wahl von Sigma0
- Individualtest
- Varianzkomponentenschätzung
- Zuverlässigkeitsparameter
- Genauigkeitssteigerung
- Korrelationen insbesondere GPS

Freiheitsgrade

- Höhenbolzen an Pfeilern mehrfach vom dem selben Standpunkt beobachtet (Latte neu aufgesetzt, erneut angezielt und fokussiert)

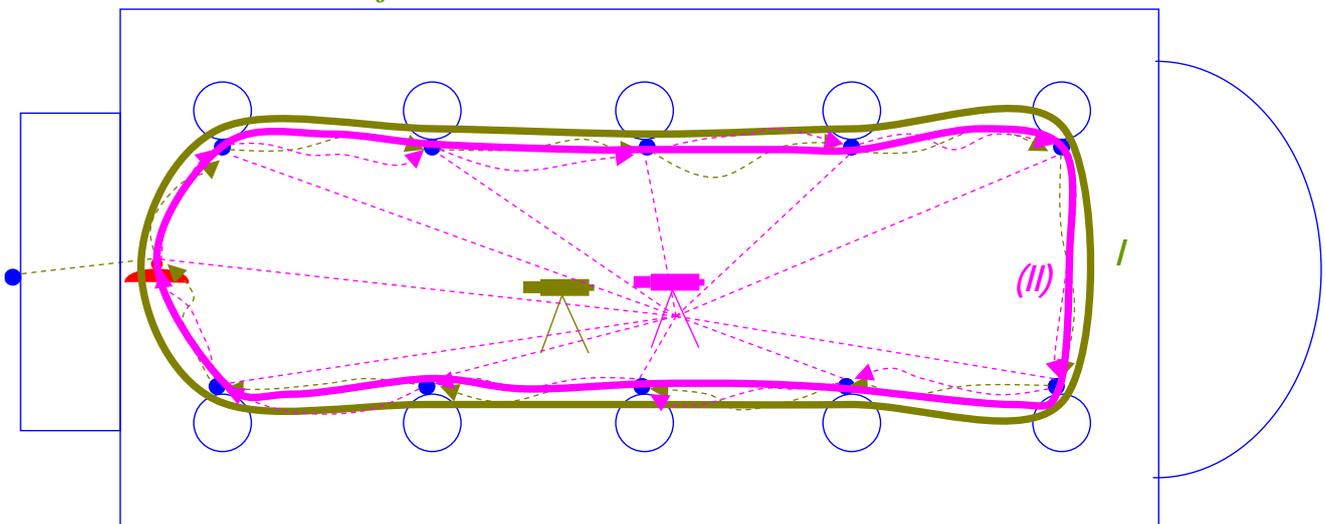
eine Schleife $\Rightarrow f=1$



Freiheitsgrade

- Höhenbolzen an Pfeilern mehrfach vom dem selben Standpunkt beobachtet (Latte neu aufgesetzt, erneut angezielt und fokussiert)

eine Schleife $\Rightarrow f=1$



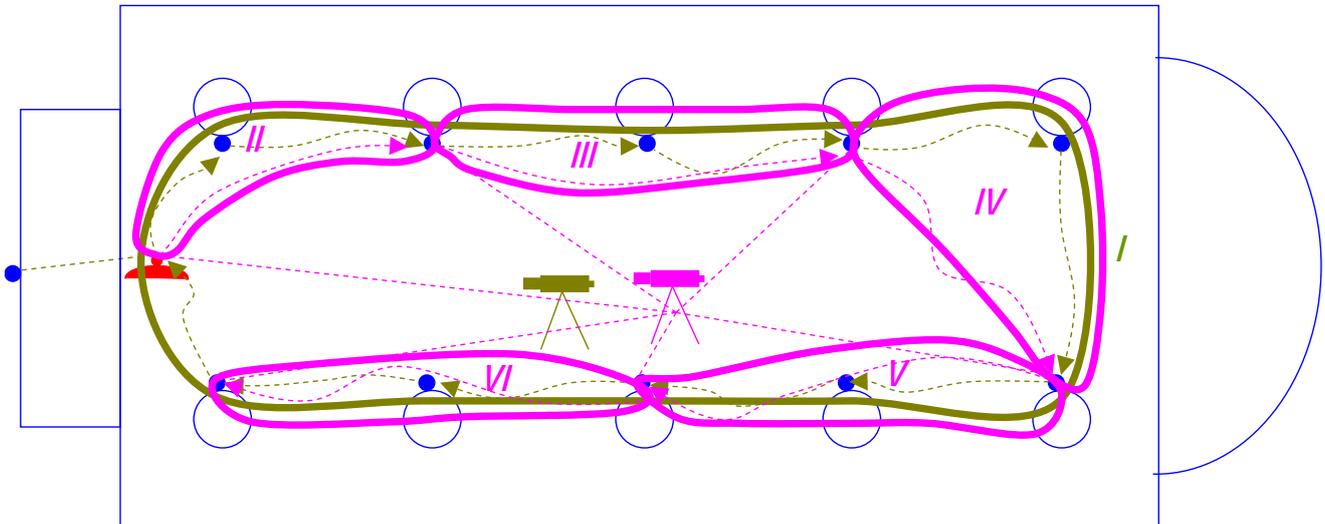
- Zweiter Standpunkt, Pfeiler wiederum mehrfach angezielt (Latte stets neu aufgesetzt, erneut angezielt und fokussiert)

zweite Schleife, die mit der ersten zu Mitteln ist \Rightarrow es bleibt bei $f=1$

Freiheitsgrade

- Höhenbolzen an Pfeilern mehrfach vom dem selben Standpunkt beobachtet (Latte neu aufgesetzt, erneut angezielt und fokussiert)

eine Schleife $\Rightarrow f=1$

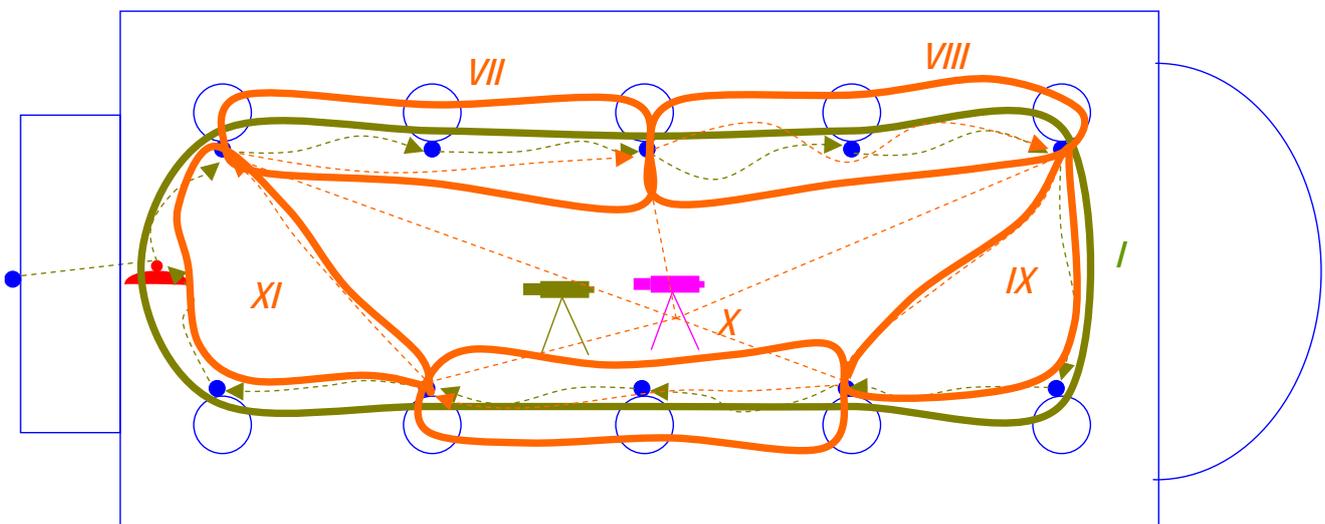


- Zweiter Standpunkt „umeditiert“, die Anzielung zu jedem zweiten Pfeiler herausgenommen

fünf zusätzliche Schleifen, \Rightarrow Summe $f=6$

Freiheitsgrade

eine Schleife $\Rightarrow f=1$



- Die herausgenommenen Anzielungen des zweiten Standpunkts hinten angefügt, so dass nun die „anderen zweiten“ Pfeiler genutzt werden.

nochmals fünf zusätzliche Schleifen, \Rightarrow Summe $f=11$

Bedingungsichte B

Verhältnis B zwischen der Anzahl der Überbestimmungen f (Freiheitsgrade) und der Anzahl der Beobachtungen n

$$\text{Bedingungsichte : } B = \frac{f}{n}$$

$$\text{Grenzen : } 0 \leq B \leq 1$$

$$\text{Anzahl der Freiheitsgrade : } f = \underbrace{n}_{\text{Anzahl der Beobachtungen}} - \underbrace{u}_{\text{Anzahl der Unbekannten}} + \underbrace{d}_{\text{Anzahl der Datumsdefekte}}$$



Haupt- oder Schlussprobe

Nach der Ausgleichung: Einsetzen der ausgeglichenen Größen in das nichtlineare funktionale Modell (Ausgleichungsbedingung)

Vermittelnd

$$\hat{\mathbf{L}}_{n,1} \stackrel{!}{=} \Phi_{n,1}(\hat{\mathbf{X}}_{u,1})$$

Allgemein

$$\Phi_{r,1}(\hat{\mathbf{L}}_{n,1}, \hat{\mathbf{X}}_{u,1}) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$$

Bedingt

$$\Phi_{r,1}(\hat{\mathbf{L}}_{n,1}) \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$$

- Kontrolle aller Berechnungen nach Aufstellung des funktionalen und stochastischen Modells
- Größenordnung bei Berechnungen mit Computern von $1 \cdot 10^{-6}$ oder besser
- Ursachen für größere Abweichungen sind oft ungenaue Näherungswerte; dann evtl. Abhilfe durch Iteration
- Weist hin auf Fehler im funktionalen Modell (falscher funktionaler Zusammenhang) und im stochastischen Modell (falsche Gewichtung)



Überprüfung der Varianz der Gewichtseinheit

Varianz der Gewichtseinheit a priori

$$\text{frei gewählt : } \sigma_0 \Rightarrow \sigma_0^2$$



Varianz der Gewichtseinheit a posteriori

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}}{n-u} \quad s_0 = +\sqrt{s_0^2}$$

$f = n - u + d$

$\alpha = 0,05$

Hypothesen : $H_0 : E\{s_0^2\} = \sigma_0^2$
 $H_A : E\{s_0^2\} > \sigma_0^2$

bei $s_0 > \sigma_0$

Testgröße : $\hat{F} = \frac{s_0^2}{\sigma_0^2}$

Quantil : $F_{f_1, f_2, 1-\alpha} = F_{f_1, \infty, 0,95}$

Entscheidung : $\hat{F} \leq F_{f_1, f_2, 1-\alpha} \Rightarrow H_0$ annehmen
 $\hat{F} > F_{f_1, f_2, 1-\alpha} \Rightarrow H_A$ annehmen

$$P\left(s_0 \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f, 1-\frac{\alpha}{2}}^2}} \leq \sigma_0 \leq s_0 \cdot \sqrt{\frac{f}{\chi_{f, \frac{\alpha}{2}}^2}}\right) = 1 - \alpha$$

Im Falle der Annahme von H_A bzw. s_0 außerhalb des Konfidenzbereichs, müssen das stochastische und das funktionale Modell überprüft und entsprechend korrigiert werden !

Zusammenhang σ_0^2 und s_0^2

Varianz der Gewichtseinheit a priori

$$\text{frei gewählt : } \sigma_0 \Rightarrow \sigma_0^2$$



Varianz der Gewichtseinheit a posteriori

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}}{n-u} \quad s_0 = +\sqrt{s_0^2}$$

$$\begin{aligned} s_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}}{f} \\ &= \frac{\mathbf{v}^T \cdot (\mathbf{Q}_{LL})^{-1} \cdot \mathbf{v}}{f} \\ &= \frac{\mathbf{v}^T \cdot \left(\frac{1}{\sigma_0^2} \mathbf{\Sigma}_{LL}\right)^{-1} \cdot \mathbf{v}}{f} \\ &= \sigma_0^2 \cdot \frac{\mathbf{v}^T \cdot (\mathbf{\Sigma}_{LL})^{-1} \cdot \mathbf{v}}{f} \end{aligned}$$

Eine Änderung von σ_0^2 bewirkt eine lineare Änderung von s_0^2

Wenn sich σ_0^2 und s_0^2 signifikant unterscheiden, müssen Änderungen im stochastischen Modell (direkt in $\mathbf{\Sigma}_{LL}$) oder im funktionalen Modell (so dass sich \mathbf{v} ändert) vorgenommen werden

Beispiel Ausgleichungsausdruck („HANNA“)

```

FREIHEITSGRAD DER AUSGLEICHUNG = 34
ANZAHL DER DEFEKTE = 0

GEWICHTETE VERB. QUADRATSUMME = 112.4864
AUSGLEICHUNGSPROBE = 112.4864

BEDINGUNGSDICHTE .62

STANDARDABWEICHUNG A PRIORI = 1.00
STANDARDABWEICHUNG A POSTERIORI = 1.82

DARAUS KONFIDENZBEREICH DER THEORETISCHEN STANDARDABWEICHUNG :
(SICHERHEITSWAHRSCHEINLICHKEIT 95 V.H.)
    UNTERE GRENZE = 1.47
    OBERE GRENZE = 2.38

STANDARDABWEICHUNG A PRIORI AUSSERHALB DES KONFIDENZBEREICHS
FUER P = 99.5 0/0 SICHERHEITSWAHRSCHEINLICHKEIT.
    
```

***** UEBERPRUEFEN SIE DAS MATHEMATISCHE MODELL *****

SCHLUSSPROBE:

SCHLUSSPROBE FUER ALLE BEOBACHTUNGEN ERFUELLT

AUSGEGLICHENE KOORDINATEN:

PKT. NR.	Y	SY	X	SX	Z	SZ	ANZAHL	DY	DX	DZ
(M)	(MM)	(M)	(MM)	(M)	(MM)	(MM)	BEST.-ST.	(MM)	(MM)	(MM)
+										



Ausreißertest („multipler t-Test“)

Annahme:
$$\mathbf{L}_{n,1} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_j + \Delta_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \mathbf{e}_j \cdot \Delta_j$$

Nullhypothese:	$H_0 : E(\Delta_j) = 0$
Alternativhypothese:	$H_A : E(\Delta_j) \neq 0$

$j = 1, 2, \dots, n$

Testgröße:
$$T_{Pelzer} = \frac{|v_j|}{\bar{s}_0 \sqrt{\bar{q}_{jj}}}$$

$$\bar{s}_0 = \sqrt{\frac{1}{f-1} \left(f \cdot s_0^2 - \frac{v_j^2}{\bar{q}_{jj}} \right)}$$

$$\bar{q}_{jj} = \frac{(\sigma_{L_j}^2 - \sigma_{L_j}^2)}{\sigma_0^2}$$

$T_{Pelzer} \leq t_{f-1, 1-\frac{\bar{\alpha}}{2}}$	kein Fehler in L_j
$T_{Pelzer} > t_{f-1, 1-\frac{\bar{\alpha}}{2}}$	grober Fehler Δ_j in L_j

$$\frac{\bar{\alpha}}{2} = 1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha}{2}}$$



Ausreißertest („Data Snooping“)

Annahme: $\mathbf{L}_{n,1} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_j + \Delta_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \mathbf{e}_j \cdot \Delta_j$

Nullhypothese:	$H_0: E(\Delta_j) = 0$
Alternativhypothese:	$H_A: E(\Delta_j) \neq 0$

$j = 1, 2, \dots, n$

„Data Snooping“: $T_{Baarda} = \frac{|v_i|}{\sigma_{v_i}} \sim N(0,1)$

$T_{Baarda} \leq Y_{1-\frac{\bar{\alpha}}{2}}$	kein Fehler in L_j
$T_{Baarda} > Y_{1-\frac{\bar{\alpha}}{2}}$	grober Fehler Δ_j in L_j

$\bar{\alpha} \ll \alpha$ (z.B. $\bar{\alpha} = 0,001$ bei $\gamma = 80\%$)

Zuverlässigkeitsparameter z_j („Redundanzanteil“)

Maß für die Fähigkeit einen Ausreißer Δ_j (groben Fehler) im Netzdesign aufzudecken

Allgemein: $z_j = \mathbf{e}_j^T \cdot \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_{VV} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_j$

$\begin{matrix} 1,n & n,n & n,1 & 1,n & n,n & n,n & n,n & n,1 \end{matrix}$

$\mathbf{e}_j^T = [0 \ 0 \ \dots \ \underbrace{1}_{\text{an der Stelle } j} \ \dots \ 0]$

Für $\mathbf{P} = \mathbf{P}$: $z_j = 1 - \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\sigma_j^2} = 1 - \frac{q_{\hat{L}_j \hat{L}_j}}{q_{L_j L_j}}$

$j = 1, 2, \dots, n$

Grenzen: $\hat{\sigma}_j^2 \leq \sigma_j^2 \Rightarrow 0 \leq z_j \leq 1$

$\hat{\sigma}_j^2 = \sigma_j^2 \Rightarrow z_j = 0$ keine Genauigkeitssteigerung \Rightarrow keine Kontrolle von l_j
 $\hat{\sigma}_j^2 \rightarrow 0 \Rightarrow z_j = 1 \Rightarrow$ vollständige Kontrolle von l_j

Netzoptimierung (Wirtschaftlichkeit \leftrightarrow Genauigkeit) $\Rightarrow z_j \geq 0,5$ optimal

Varianzkomponentenschätzung

Für die Varianz der Gewichtseinheit gilt:

$$E\{s_0^2\} = \sigma_0^2$$

Idee der Varianzkomponentenschätzung:

- Einzelne Beobachtungen zu m Gruppen zusammenfassen
- Jede Gruppe besitzt eine eigene *Varianz der Gewichtseinheit a priori* $\sigma_{0_{ii}}^2$
- Für jede Gruppe die *Varianz der Gewichtseinheit a posteriori* berechnen
- Vergleichen der Werte *a priori* $\sigma_{0_{ii}}^2$ mit denen *a posteriori* für jede Gruppe $E\{s_{0_{ii}}^2\} = \sigma_{0_{ii}}^2$
- evtl. *a priori*-Werte anpassen, andere Gruppierungen bilden etc.

$$\Sigma_{LL} = \begin{bmatrix} \Sigma_{LL_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{LL_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Sigma_{LL_{mm}} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_0^2 \cdot Q_{LL} = \begin{bmatrix} \sigma_{0_{11}}^2 Q_{LL_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{0_{22}}^2 Q_{LL_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{0_{mm}}^2 Q_{LL_{mm}} \end{bmatrix}$$

$$s_0^2 \cdot Q_{\hat{L}\hat{L}} = \begin{bmatrix} s_{0_{11}}^2 Q_{\hat{L}\hat{L}_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_{0_{22}}^2 Q_{\hat{L}\hat{L}_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{0_{mm}}^2 Q_{\hat{L}\hat{L}_{mm}} \end{bmatrix}$$

$$s_{0_{ii}}^2 = \frac{\mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{P}_{ii} \cdot \mathbf{v}_i}{\sum z_i}$$



Beispiel Ausgleichsausdruck („HANNA“)

1 UNIVERSITÄT HANNOVER
Geodätisches Institut
Projekt:

Hannover, den 10. 1.1996
11:16:49
Seite 16

STATISTIK DER REDUNDANZANTEILE: *****

BEOB. ART	MINIMALE REDUNDANZ	MAXIMALE REDUNDANZ	DURCHSCHN. REDUNDANZ	ANZAHL	REDUNDANZKLASSEN (ANZAHL / PROZENT)										
					0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
5	.148	.948	.654	52	0	3	1	0	3	18	1	13	7	6	
					0.0	5.8	1.9	.0	5.8	34.6	1.9	25.0	13.5	11.5	
REDUNDANZSUMME:		34.00000	(SOLL:	34)											

VARIANZ-KOMPONENTEN-SCHÄTZUNG: *****

BEOB. ART	GER. NR	INTERVALLKLASSE VON (KM) BIS (KM)	VTPV	REDUND	ANZAHL	GRUPPEN-VARIANZ SAPR S (MM/MGON)
5	2		13.3645	6.258	15	.15 .22
	12		25.1288	11.827	20	.11 .16
	10		73.9931	15.915	20	.24 .52

DATA-SNOOPING:

MAXIMALER AUSREISSER ENTDECKT BEI BEOBACHTUNG NR. 49

12 3 .0011 -.57 4.36 5



VERZEICHNIS AUSGEGLICHENER BEOBACHTUNGEN:

BEOB.NR.	STDPUNKT	ZIELPUNKT	BEOB. (M, GON)	V (MM, MGON)	STD. ABW. (MM, MGON)	REDUNDANZ	NAB. L (MM, MGON)	W	ART	GNR
1	100	207	-1.40120	.00	.18	.00000	.00	.00	-NT-	5 2
2	100	5	.00786	.06	.23	.58692	.92	.39		5 2
3	5	1	-.02845	-.35	.15	.71561	.62	2.73		5 2
4	5	6	-.01360	.00	.27	.00000	.00	.00	-NT-	5 2
5	5	2	-.03662	-.02	.25	.14832	1.37	.39		5 2
6	5	14	-.00930	.00	.27	.00000	.00	.00	-NT-	5 2
7	5	10	-.04689	.01	.25	.14832	1.37	.14		5 2
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
21	4	11	-.00047	-.07	.12	.53001	.48	.99		5 12
22	4	16	.01356	-.04	.12	.53001	.48	.62		5 12
23	4	20	.02793	-.17	.12	.53001	.48	2.30		5 12
24	4	19	-.00003	-.13	.12	.57944	.46	1.65		5 12
25	4	18	.00487	-.13	.12	.56660	.47	1.76		5 12
26	4	15	.02317	.17	.09	.90200	.55	1.16		5 12
27	15	18	-.01830	-.10	.12	.57223	.46	1.29		5 12
38	1	8	.01199	-.11	.16	.93527	1.27	.33		5 10
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
47	12	20	.02683	.23	.13	.76676	.60	1.73		5 10
48	12	4	-.00111	-.61	.09	.89853	.56	4.26	*GF*	5 10
49	12	3	.00113	-.57	.13	.76187	.60	4.36	*GF*	5 10
50	12	8	.01162	-.28	.12	.80643	.59	2.10		5 10
51	12	7	.00565	-.35	.13	.76676	.60	2.64		5 10
52	12	11	-.00158	.02	.13	.76676	.60	.17		5 10
53	12	17	.29699	-.01	.15	.28996	.65	.25		5 10
54	17	18	-.29322	-.12	.19	.93503	1.45	.32		5 10
55	18	1	-.00413	-.43	.17	.94620	1.44	1.11		5 10

GRENZWERT FUER DATA-SNOOPING :

3.51

BEOBACHTUNGSARTEN:

- | | | | |
|--------------------|-----------------------|------------------|------------------|
| 1 = RICHTUNG | 4 = RAUMSTRECKE | 7 = Y-KOORDINATE | 10 = Y-DIFFERENZ |
| -1 = FOLGERICHTUNG | 5 = HOEHENUNTERSCHIED | 8 = X-KOORDINATE | 11 = X-DIFFERENZ |
| 2 = AZIMUT | 6 = ZENITWINKEL | 9 = Z-KOORDINATE | 12 = Z-DIFFERENZ |
| 3 = HORIZ. STRECKE | | | |

BEMERKUNGEN:

- *GF* = BEOBACHTUNG ENTHAELT GROBE FEHLER
 -NT- = BEOBACHTUNG IST NICHT TESTBAR

Ausgleichungsgewinn

Eine Ausgleichung ist immer mit einem Genauigkeitsgewinn verbunden.

$$Q_{\hat{L}\hat{L}} = Q_{LL} - Q_{vv}$$

$\begin{matrix} n,n & n,n & n,n \end{matrix}$

Es kann nur besser werden !