

Friedrich U. Mathiak

Baudynamik

Einführung und Grundlagen

Baudynamik

Einführung und Grundlagen

© Friedrich U. Mathiak

Das Werk, einschließlich aller seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Autors unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

1. Auflage Neubrandenburg 2002

Fachhochschule Neubrandenburg

Prof. Dr.-Ing. Friedrich U. Mathiak

Fachbereich:
Bauingenieur- und Vermessungswesen

Postanschrift:
Fachhochschule Neubrandenburg
Sekretariat BV
Brodaer Straße 2

D-17009 Neubrandenburg

Tel.: (0395) 5693-(0)-312

INHALTSVERZEICHNIS

LITERATURVERZEICHNIS

1	EINLEITUNG	1-1
1.1	Lasten im Bauingenieurwesen	1-2
1.1.1	Harmonische Lasten	1-3
1.1.2	Periodische Lasten	1-3
1.1.3	Transiente Lasten	1-3
1.1.4	Impulsförmige Belastungen	1-3
2	DIE KINEMATIK DES PUNKTES	2-1
2.1	Allgemeines	2-1
2.2	Die Geschwindigkeit	2-2
2.3	Die Bogenlänge	2-3
2.4	Die Beschleunigung	2-6
2.5	Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Punktes in verschiedenen Koordinatensystemen	2-7
2.5.1	Zeitabhängige Basissysteme	2-7
2.5.2	Kartesische Koordinaten	2-8
2.5.3	Zylinderkoordinaten	2-9
2.5.4	Natürliche Koordinaten (Begleitendes Dreibein)	2-11
2.6	Freiheitsgrade	2-14
2.6.1	Definition	2-14
2.6.2	Der frei im Raum bewegliche Punkt	2-15
2.6.3	Der auf einer Fläche bewegliche Punkt	2-15
2.6.4	Der auf einer Kurve bewegliche Punkt	2-16
2.6.5	Der starre Körper	2-16
2.6.6	Der deformierbare Körper	2-18
2.7	Die Bewegung des starren Körpers	2-18
2.8	Ebene Bewegungen	2-21
2.8.1	Definition	2-21
2.8.2	Kreisbewegung eines Punktes	2-22
2.8.3	Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse	2-24
2.8.4	Translation eines starren Körpers	2-24
2.8.5	Allgemeine ebene Bewegung eines starren Körpers	2-25
2.8.6	Satz vom Momentanzentrum	2-27
2.9	Die Kinematik der Relativbewegung eines Punktes	2-30
3	GRUNDLAGEN DER KINETIK	3-1
3.1	Allgemeines	3-1
3.2	Newtons Gesetze	3-1
3.3	Massenmomente 2.ten Grades	3-3
3.3.1	Transformation hinsichtlich paralleler Achsen (Satz von Steiner)	3-5
3.3.2	Transformation hinsichtlich gedrehter Achsen	3-6
3.3.3	Beispiele zur Berechnung von Massenträgheitsmomenten	3-7
3.4	Der Impuls	3-8
3.5	Der Drehimpuls oder Drall	3-9
3.6	Der Arbeits- und Energiebegriff	3-11
3.6.1	Allgemeines	3-11
3.6.2	Die Arbeit einer Kraft	3-12
3.6.3	Die Arbeit eines Kräftepaars mit dem Moment M	3-13
3.6.4	Das Potential einer Kraft	3-14
3.6.5	Das Potential einer Gewichtskraft	3-16
3.6.6	Das Potential einer Federkraft	3-17
3.6.7	Kinetische Energie	3-19
3.6.8	Leistung	3-23
4	KINETIK DER STARREN KÖRPER	4-1
4.1	Allgemeines	4-1
4.2	Der Schwerpunktsatz	4-2
4.3	Drallsatz	4-3

5	Der ARBEITSSATZ FÜR STARRE KÖRPER	5-1
5.1	Energiesatz für Schwerekräfte	5-2
6	Die LAGRANGESCHEN BEWEGUNGSGLEICHUNGEN	6-2
7	SCHWINGUNGEN	7-1
7.1	Definitionen	7-1
7.2	Darstellung von Schwingungsvorgängen	7-3
7.2.1	Das Ausschlag-Zeit-Diagramm	7-3
7.2.2	Phasenkurven und Phasenporträt	7-4
7.3	Einteilung der Schwingungen	7-5
7.4	Harmonische Schwingungen	7-5
7.5	Überlagerung harmonischer Schwingungen	7-7
7.6	Modulierte Schwingungen	7-12
8	FREIE SCHWINGUNGEN MIT EINEM FREIHEITSGRAD	8-1
8.1	Der ungedämpfte Einmassenschwinger	8-1
8.1.1	Angenäherte Berücksichtigung der Federmasse	8-4
8.1.2	Darstellung der Lösung in der Phasenebene	8-6
8.1.3	Energiebeziehungen	8-9
8.1.4	Kontinuierliche Systeme und ihre äquivalenten Einmassenschwinger	8-14
8.2	Der gedämpfte Einmassenschwinger	8-15
9	ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN MIT EINEM FREIHEITSGRAD	9-1
9.1	Erzwungene ungedämpfte Schwingungen	9-1
9.1.1	Die Vergrößerungsfunktion	9-6
9.2	Erzwungene gedämpfte Schwingungen	9-12
10	SPEZIELLE SYSTEM-ERREGUNGEN	10-1
10.1	Randerregung einer Masse über Feder und Dämpfer	10-1
10.2	Randerregung einer Masse über den Fußpunkt von Feder und Dämpfer, Fußpunkterregung	10-6
10.3	Felderregung von Feder und Dämpfer durch eine Unwucht	10-10
10.4	Erregung durch eine Sprungfunktion	10-13
10.5	Erregung durch eine Stoßfunktion	10-18
10.6	Der ideale Rechteckstoß	10-22
11	ERREGUNG DURCH NICHTHARMONISCHE PERIODISCHE KRÄFTE	11-1
12	NICHTPERIODISCHE ERREGERKRÄFTE	12-1
12.1	Darstellung des Stoßes durch die Diracsche δ - Funktion	12-1
12.2	Allgemeine Erregerfunktionen	12-4
13	SCHWINGUNGSISOLIERUNG VON GEBÄUDEN UND MASCHINEN	13-1
13.1	Aktive Entstörung	13-2
13.2	Passive Entstörung	13-6
13.3	Isolierung von Stößen	13-8
14	GEKOPPELTE SCHWINGUNGEN MIT SPEZIELL ZWEI FREIHEITSGRADEN	14-1
14.1	Freie ungedämpfte Schwingungen	14-1
15	GEKOPPELTE SCHWINGUNGEN MIT N FREIHEITSGRADEN	15-1
15.1	Allgemeines	15-1
15.2	Freie ungedämpfte Schwingungen	15-1
15.3	Entkopplung der Bewegungsgleichungen	15-7
15.4	Das spezielle Eigenwertproblem	15-9
15.5	Erzwungene ungedämpfte Schwingungen	15-16
16	DAS TRANSVERSAL SCHWINGENDE SEIL	16-1
16.1	Die Bewegungsgleichung des Seils	16-1
16.2	Die d'Alembertsche Lösung des transversal schwingenden Seils	16-3
16.3	Die Produktlösung des transversal schwingenden Seils	16-11

17	LONGITUDINALSCHWINGUNGEN VON STÄBEN	17-1
17.1	Die d'Alembertsche Lösung des longitudinal schwingenden Stabes	17-4
17.2	Die Produktlösung der Bewegungsgleichung	17-6
18	DER TRANSVERSAL SCHWINGENDE BALKEN	18-1
18.1	Die Produktlösung der Bewegungsgleichung	18-4

MATHEMATISCHER ANHANG

A	KOMPLEXE ZAHLEN	2
A.1	Addition komplexer Zahlen	3
A.2	Multiplikation komplexer Zahlen	3
A.3	Division komplexer Zahlen	4
B	RECHENREGELN FÜR MATRIZEN	9
B.1	Die inverse Matrix	15
B.2	Determinanten	19
C	LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME	23
D	FOURIERREIHEN	30
E	INTEGRALTRANSFORMATIONEN	33
E.1	Die Fourier-Transformation	34
E.2	Die Laplace-Transformation	36
E.2.1	Laplace-Transformationen von Ableitungen	40

INDEX DEUTSCH-ENGLISCH; ENGLISCH-DEUTSCH

8 Freie Schwingungen mit einem Freiheitsgrad

8.1 Der ungedämpfte Einmassenschwinger

Wir betrachten das in Abb. 8-1 skizzierte schwingungsfähige System, das aus einer linearen Feder mit der Federsteifigkeit c und einer Masse m besteht, von der wir annehmen, daß sie reibungsfrei gelagert ist ($\mu = 0$). Die Lagekoordinate x_s beschreibt die horizontale Auslenkung des Schwerpunktes der Masse m . Für $x_s = 0$ sei die Feder entspannt. Das System besitzt nur einen Freiheitsgrad, die Koordinate x_s .

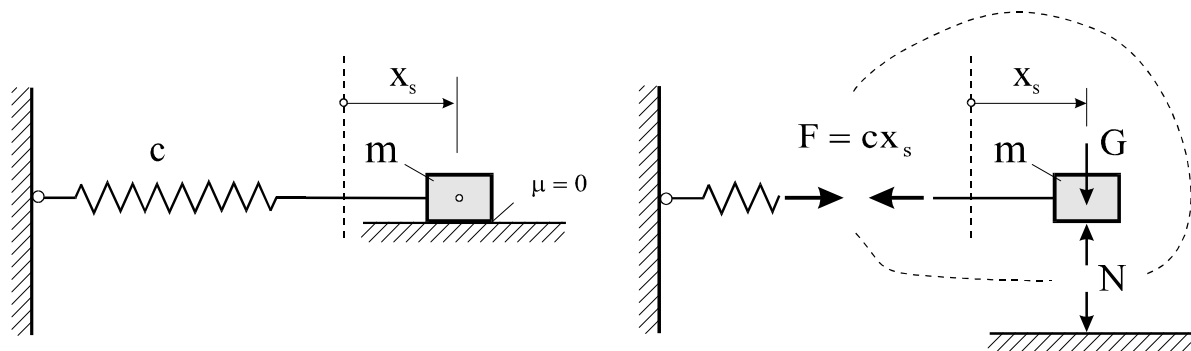


Abb. 8-1 Der ungedämpfte Einmassenschwinger

Um den Schwerpunktsatz anwenden zu können, muß die Masse m komplett freigeschnitten werden. Der Schwerpunktsatz in x -Richtung liefert:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_s &= -F = -cx_s \\ m\ddot{x}_s + cx_s &= 0 \\ \ddot{x}_s + \frac{c}{m}x_s &= 0 \end{aligned}$$

und mit der Abkürzung

$$\omega^2 = \frac{c}{m} \quad \text{Gl. 8-1}$$

folgt

$$\ddot{x}_s + \omega^2 x_s = 0 \quad \text{Gl. 8-2}$$

In Gl. 8-1 heißt ω **Eigenkreisfrequenz** des ungedämpften Systems. Gl. 8-2 entspricht einer linearen gewöhnlichen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Für diesen Typ existiert in der Mathematik eine abgeschlossene Theorie. Im Zusammenhang mit linearen Differentialgleichungen gilt das **Superpositionsprinzip**, welches besagt, daß bei Kenntnis zweier linear unabhängiger Lösungen ($x_{s,1}$ und $x_{s,2}$) der Differentialgleichung auch jede Linearkombination $x_s = C_1 x_{s,1} + C_2 x_{s,2}$ mit beliebigen Konstanten (hier C_1, C_2) Lösung von Gl. 8-2 ist. Wie durch Differentiation leicht nachgewiesen werden kann, ist

$$x_s(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t = A \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{Gl. 8-3}$$

Lösung von Gl. 8-2. Einmalige Differentiation von Gl. 8-3 nach t liefert die Geschwindigkeit

$$\dot{x}_s(t) = C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t = -A \omega \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{Gl. 8-4}$$

Die beiden noch freien Konstanten C_1, C_2 (oder A, φ) werden aus den **Anfangswerten** des Systems bestimmt. Wir lösen also ein **Anfangswertproblem (AWP)**. Es sei:

$$\begin{aligned} x_s(t=0) &= x_0 & \textcircled{R} \quad C_2 &= x_0 \\ \dot{x}_s(t=0) &= v_0 & \textcircled{R} \quad C_1 &= \frac{v_0}{\omega} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die vollständige Lösung unseres Problems:

$$\begin{aligned} x_s(t) &= \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t \\ \dot{x}_s(t) &= v_0 \cos \omega t - x_0 \omega \sin \omega t \end{aligned} \quad \text{Gl. 8-5}$$

Die Auswertung der Bewegungsgleichung für die Auslenkung $x_s = A \cos(\omega t - \varphi)$ und die Geschwindigkeit $\dot{x}_s = -A \omega \sin(\omega t - \varphi)$ mit $A = 1.5 \text{ cm}$, $\omega = 2 \text{ s}^{-1}$ und $\varphi = \pi/4$ zeigt Abb. 8-2.

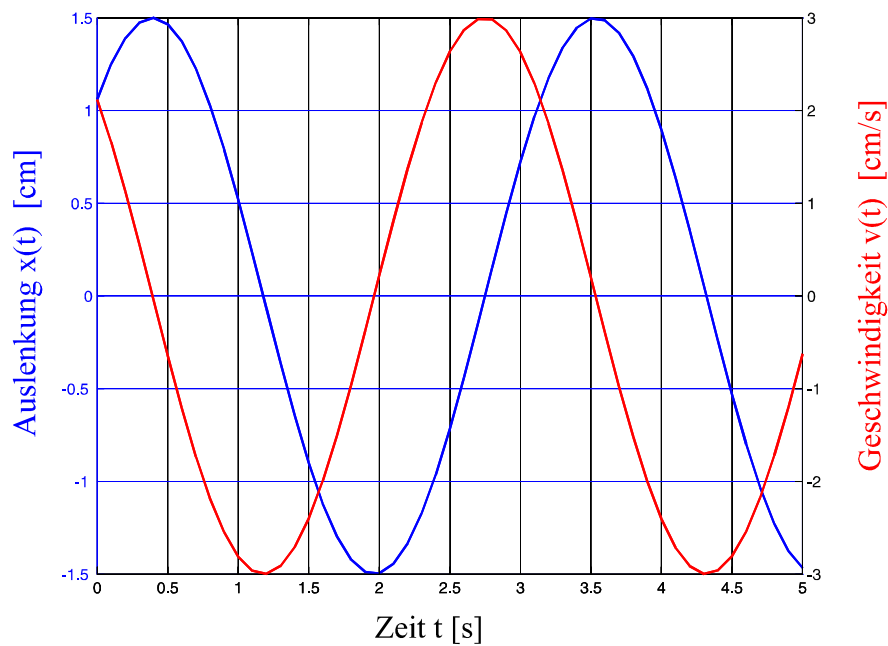


Abb. 8-2 Der ungedämpfte Einmassenschwinger

Schwingungsdauer T :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad \text{Gl. 8-6}$$

Eigenfrequenz f :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{Gl. 8-7}$$

Amplitude A :

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{\omega x_0}\right)^2} \quad \text{Gl. 8-8}$$

Nullphasenwinkel φ :

$$\tan \varphi = \frac{C_1}{C_2} = \frac{v_0}{x_0 \omega} \quad \textcircled{R} \quad \varphi = \arctan \frac{v_0}{x_0 \omega} \quad \text{Gl. 8-9}$$

Die Schwingungsdauer T und die Frequenz f hängen nur von den Systemwerten, nicht aber von den Anfangsbedingungen ab. Aus diesem Grunde wird f auch **Eigenfrequenz** genannt.

Steht die Masse m unter Eigengewicht, dann ist wie folgt zu verfahren. Wir betrachten dazu den Einmassenschwinger nach Abb. 8-3 mit einer masselosen Feder in vertikaler Lage. Die

Feder sei bei $x = 0$ entspannt. Die Endmasse m mit der Gewichtskraft $G = mg$ führt bei quasi-statischer Aufbringung der Last zu der ausgelenkten Gleichgewichtslage

$$x_{\text{st}} = \frac{G}{c} = \frac{mg}{c} \quad \text{Gl. 8-10}$$

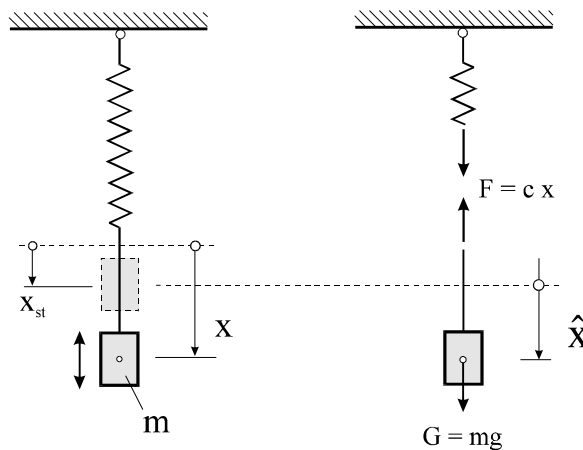


Abb. 8-3 Feder-Masse-System unter Eigengewicht

Um den Schwerpunktsatz anwenden zu können, muß freigeschnitten werden.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F + G = -cx + mg \\ m\ddot{x} + cx &= mg \\ \ddot{x} + \frac{c}{m}x &= g \end{aligned}$$

und mit $\omega^2 = \frac{c}{m}$ erhalten wir zunächst

$$\ddot{x} + \omega^2 x = g \quad \text{Gl. 8-11}$$

Diese inhomogene DGL versuchen wir durch die Koordinatentransformation

$$x = x_{\text{st}} + \hat{x} \quad \text{Gl. 8-12}$$

in eine homogene DGL entsprechend Gl. 8-2 zu überführen. Unter Beachtung von $\dot{x} = \dot{\hat{x}}$ und $\ddot{x} = \ddot{\hat{x}}$ folgt aus Gl. 8-11 mit Gl. 8-12

$$\ddot{\hat{x}} + \omega^2 (x_{st} + \hat{x}) = g \quad \rightarrow \quad \ddot{\hat{x}} + \omega^2 \hat{x} = g - \omega^2 x_{st} = g - \frac{c}{m} \frac{mg}{c}$$

und damit

$$\ddot{\hat{x}} + \omega^2 \hat{x} = 0 \quad \text{Gl. 8-13}$$

was Gl. 8-2 entspricht. Damit erhalten wir folgenden Satz:

Bei Bezugnahme der Schwingung auf die statische Ruhelage entfällt der Einfluß des Eigengewichtes.

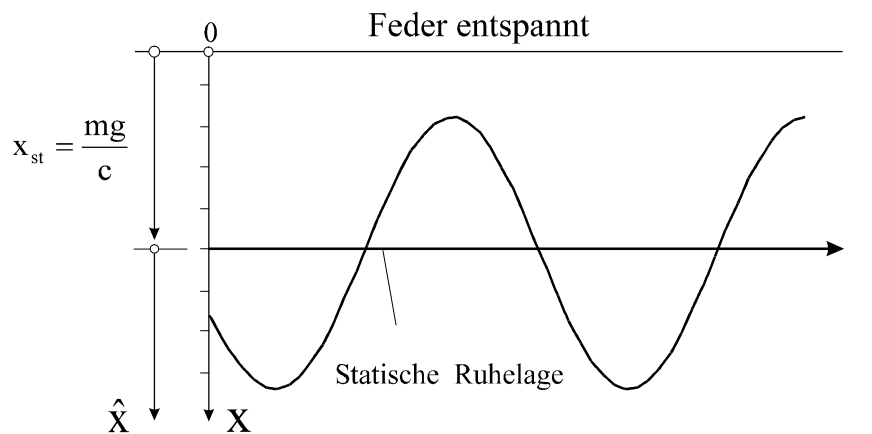


Abb. 8-4 Harmonische Schwingung um die statische Ruhelage

Mit

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \\ \dot{\hat{x}}(t) &= C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t \end{aligned}$$

führt die Masse m Schwingungen um die **statische Ruhelage** x_{st} aus. Die Konstanten errechnen sich wieder aus den Anfangsbedingungen. Von besonderem Interesse ist noch die Federkraft

$$F(t) = c x(t) = c [x_{st} + \hat{x}(t)] = c [x_{st} + C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t] \quad \text{Gl. 8-14}$$

Sie nimmt an den Umkehrpunkten von $\hat{x}(t)$ extremale Werte an. Wird z.B. die Masse m bei entspannter Feder ($x = 0$) ohne Anfangsgeschwindigkeit ($v_0 = 0$) losgelassen, so gelten die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}\hat{x}(0) &= -x_{st} && \rightarrow C_2 = -x_{st} \\ \dot{\hat{x}}(0) &= 0 && \rightarrow C_1 = 0\end{aligned}$$

und damit nach Gl. 8-14

$$F(t) = c[x_{st} + \hat{x}(t)] = c[x_{st} - x_{st} \cos \omega t] = cx_{st} [1 - \cos \omega t] = G [1 - \cos \omega t]$$

Hinweis: Die Federkräfte schwanken also zwischen den Werten $0 \leq F(t) \leq 2cx_{st} = 2G$. Sie wachsen damit im dynamischen Fall auf den doppelten Wert der statischen Belastung. An dieser Stelle zeigt sich besonders deutlich der Unterschied zwischen statischer und dynamischer Beanspruchung.

Wir wollen noch eine für praktische Anwendungen wichtige Näherungsformel herleiten. Dazu wird Gl. 8-10 mit Gl. 8-1 umformt

$$x_{st} = \frac{mg}{c} = \frac{g}{\omega^2}$$

und damit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{x_{st}}} \quad \textcircled{R} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{x_{st}}}$$

Gl. 8-15

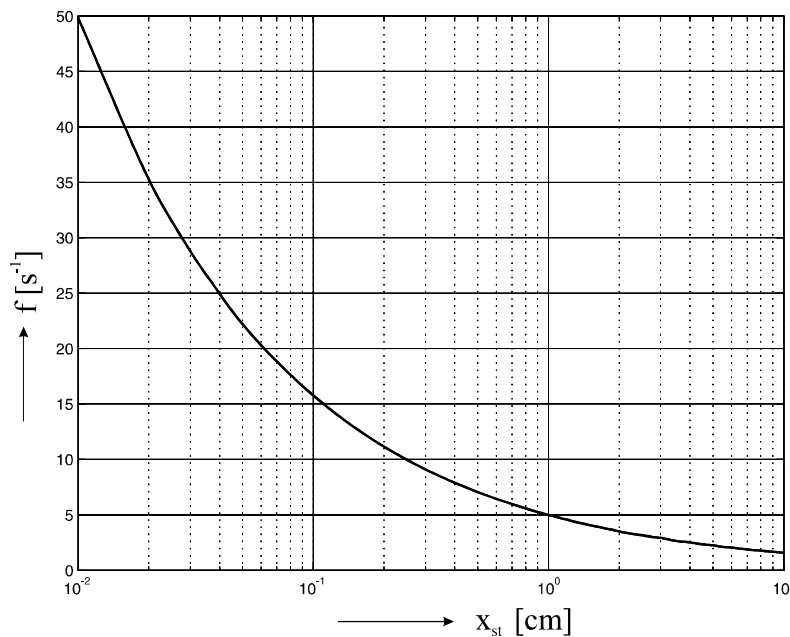


Abb. 8-5 Eigenfrequenz in Abhängigkeit von der statischen Auslenkung

Damit haben wir eine einfache Abschätzung für die erste Eigenfrequenz eines Einmassenschwingers bei Kenntnis der statischen Durchsenkung gewonnen, wenn die Schwingung in Krafrichtung erfolgt. Aus Gl. 8-15 folgt weiter mit $g = 981 \text{ cm s}^{-2}$ und x_{st} in [cm]

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{x_{\text{st}}}} \gg \frac{5}{\sqrt{x_{\text{st}}}} \text{ [s}^{-1}\text{]} \quad \text{Gl. 8-16}$$

Beispiel: 8-1

Für den beidseitig drehbar gelagerte Stahlträger IPE 360 mit der Einzelmasse m in Balkenmitte wird näherungsweise die 1. Eigenfrequenz gesucht.

Geg.: $E = 210000 \text{ N/mm}^2$, $I_{yy} = 16270 \text{ cm}^4$, $\ell = 5,0 \text{ m}$, $m = 5000 \text{ kg}$

Lösung: Die statische Auslenkung ist:

$$x_{\text{st}} = w(\ell/2) = \frac{G\ell^3}{48EI_{yy}} = \frac{5000 \times 981 \times 500^3}{48 \times 2,10 \times 10^9 \times 16270} = 0,37 \text{ cm}$$

Aus Gl. 8-16 oder Abb. 8-5 folgt: $f \gg \frac{5}{\sqrt{0,37}} = 8,18 \text{ s}^{-1}$

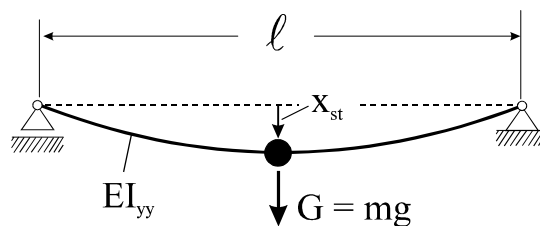


Abb. 8-6 Träger auf zwei Stützen mit Einzelmasse m in Feldmitte

8.1.1 Energiebeziehungen

Für die ungedämpften freien Schwingungen gilt der Satz von der Erhaltung der mechanischen Energie: $E + U = \text{konst}$, da während des Bewegungsvorganges dem System weder Energie zugeführt noch entzogen wird. Für das Feder-Masse-System gilt:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad U = \frac{1}{2} c x^2 \quad \text{Gl. 8-17}$$

Unter Beachtung von

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t - \varphi)$$

folgt dann

$$E = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2} cA^2 \sin^2(\omega t - \varphi)$$

$$U = \frac{1}{2} cA^2 \cos^2(\omega t - \varphi)$$

Gl. 8-18

und damit

$$E + U = \frac{1}{2} cA^2 = E_0 = \text{konst.}$$

Gl. 8-19

Die obige Gleichung läßt sich anschaulich darstellen (Abb. 8-7), wenn wir die potentielle Energie U als Funktion von x auftragen. Das ist eine quadratische Parabel mit dem Scheitelpunkt bei $x = 0$. Die Schnittpunkte der Parabel mit der Parallelen zur x -Achse im Abstand E_0 liefern die Werte für die Amplitude A , die aus den Anfangsbedingungen zu ermitteln ist. Die Auslenkungen bewegen sich im Bereich $-A \leq x \leq A$. Aus dieser Darstellung lassen sich zu jedem x -Wert die Werte für die potentielle und die kinetische Energie ablesen.

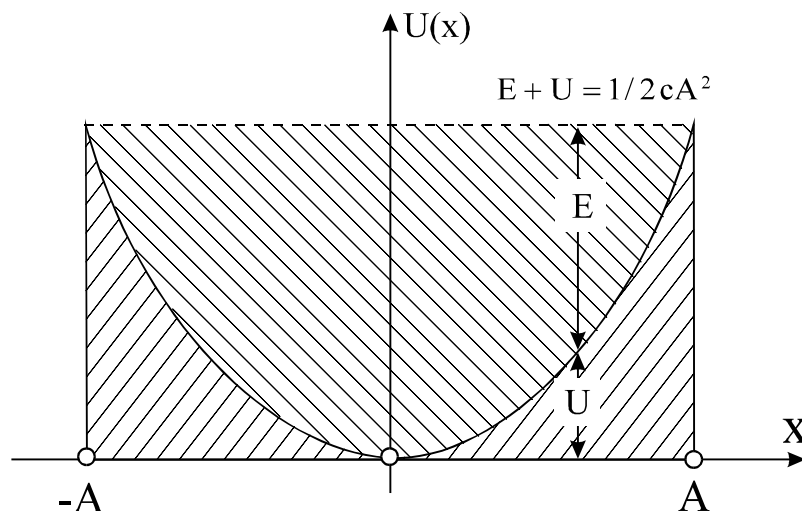


Abb. 8-7: Energiehaushalt eines Einmassenschwinger

Übrigens hätten wir die Bewegungsgleichung des ungedämpften Einmassenschwingers auch mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes in der differentiellen Form, also

Um hier eine Abschätzung im integralen Mittel vorzunehmen, bietet sich die **Energiemethode** an. Ausgangspunkt für unsere Untersuchungen ist der Energieerhaltungssatz in der Form

$$\dot{E} + \dot{U} = 0 \quad \text{Gl. 8-20}$$

Die Koordinate $x(t)$ bezeichnet die Auslenkung der Masse m aus der entspannten Federlage und da die Masse am Federende befestigt ist demnach auch die Auslenkung des Federendpunktes. Für die Auslenkung $u(\xi, t)$ des Massenelementes dm_F der Feder ist ein geeigneter Verschiebungsansatz zu wählen, der nicht nur von der betrachteten Stelle ξ , sondern auch noch von der Zeit t abhängt. Wird hierfür der Näherungsansatz in Produktform

$$u(\xi, t) = x(t)h(\xi) \quad \rightarrow \quad \dot{u}(t, \xi) = \dot{x}(t)h(\xi) \quad \text{Gl. 8-21}$$

gemacht, dann kann über die Verteilungsfunktion $h(\xi)$ noch verfügt werden. Die kinetische Energie des Systems setzt sich aus kinetischer Energie der Masse m und kinetischer Energie der Feder mit den Massenelementen dm_F zusammen.

$$E = \frac{1}{2} [m\dot{x}^2 + \int_{(m_F)} \dot{u}^2 dm_F] \quad \text{Gl. 8-22}$$

Berücksichtigung von Gl. 8-21 liefert

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} [m + \int_{(m_F)} h^2(\xi) dm_F] \quad \text{Gl. 8-23}$$

Das Potential U wird aus dem Potential der Federkraft und dem Potential der Gewichtskraft gebildet

$$U = U_F + U_G = \frac{1}{2} cx^2 - mgx \quad \text{Gl. 8-24}$$

Aus dem Energieerhaltungssatz folgt dann

$$\dot{E} + \dot{U} = \dot{x} \ddot{x} \left[m + \int_{(m_F)} h^2(\xi) dm_F \right] + cx\dot{x} - mg\dot{x} = 0$$

oder umgeordnet

$$\dot{x} [(m + \int_{(m_F)} \dot{dm}_F h^2(\xi)) \ddot{x} + cx - mg] = 0$$

Da im allgemeinen für alle Zeiten t $\dot{x} \neq 0$ gefordert werden muß, gilt

$$\frac{x}{\xi} m + \int_{(m_F)} \dot{dm}_F h^2(\xi) \ddot{x} + cx - mg = 0 \quad \text{Gl. 8-25}$$

Das ist formal dieselbe Bewegungsgleichung wie Gl. 8-11, allerdings mit

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{c}{m + \kappa m_F}}; \quad \kappa = \frac{1}{m_{(m_F)}} \int \dot{dm}_F h^2(\xi) \quad \text{Gl. 8-26}$$

Um das Integral in Gl. 8-25 auswerten zu können, setzen wir

$$h(\xi) = \frac{\xi}{\ell_F} \rightarrow u(t, \xi) = x(t) \frac{\xi}{\ell_F} \quad (0 \leq \xi \leq \ell_F) \quad \text{Gl. 8-27}$$

Damit wird die Verteilung von $u(t, \xi)$ linear veränderlich über die Federlänge ℓ_F angenommen (Abb. 8-8). Ist die Massenbelegung der Feder in Längsrichtung konstant, dann können wir näherungsweise

$$\frac{m_F}{\ell_F} = \frac{dm_F}{d\xi} \rightarrow dm_F = \frac{m_F}{\ell_F} d\xi \quad \text{Gl. 8-28}$$

setzen. Berücksichtigung von Gl. 8-28 und Gl. 8-27 liefert

$$\int_{(m_F)} dm_F h^2(\xi) = \int_{\xi=0}^{\ell_F} \frac{m_F}{\ell_F} \frac{1}{\ell_F^2} \xi^2 d\xi = \frac{m_F}{\ell_F^3} \int_{\xi=0}^{\ell_F} \xi^2 d\xi = \frac{1}{3} m_F \quad \text{Gl. 8-29}$$

und Gl. 8-25 geht schließlich über in

$$\ddot{x} + \frac{c}{m + \frac{1}{3} m_F} x + \frac{m}{m + \frac{1}{3} m_F} g = 0 \quad \text{Gl. 8-30}$$

so daß wir mit

$$\hat{\omega} = \sqrt{\frac{c}{m + \frac{1}{3}m_F}} < \omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{Gl. 8-31}$$

eine erste Abschätzung des Einflusses der Federmasse auf die Eigenkreisfrequenz des Einmassenschwingers vornehmen können.

Soll also die Federmasse bei Longitudinalschwingungen näherungsweise berücksichtigt werden, dann ist zur Einzelmasse m ein Drittel der Federmasse m_F zu addieren. Auch wenn $m = 0$ ist, können die obigen Beziehungen beibehalten werden, dann schwingt die massebehaftete Feder näherungsweise so, als ob ein Drittel der Federmasse am Ende befestigt wäre.

8.1.3 Darstellung der Lösung in der Phasenebene

Die allgemeine Lösung dieses Systems für die Auslenkung $x(t)$ ist nach Gl. 8-3

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi); \quad \dot{x}(t) = v(t) = -A\omega \sin(\omega t - \varphi)$$

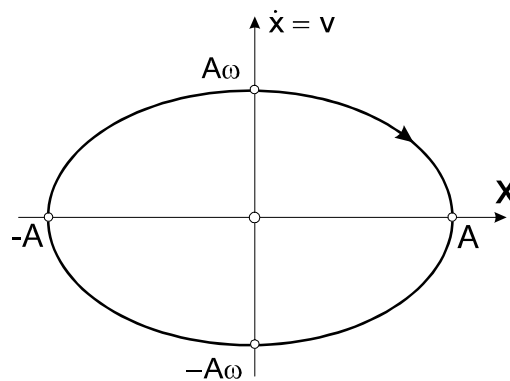


Abb. 8-9 Phasenkurve einer Sinusschwingung

Durch Quadrieren und addieren erhalten wir daraus

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1 \quad \text{Gl. 8-32}$$

In der Phasenebene stellt die Schwingung eine Ellipse mit den beiden Halbachsen A und $A\omega$ (Abb. 8-9) dar. Bei harmonischen Schwingungen ist die Phasenkurve geschlossen.

8.2 Federschaltungen elastischer Federn

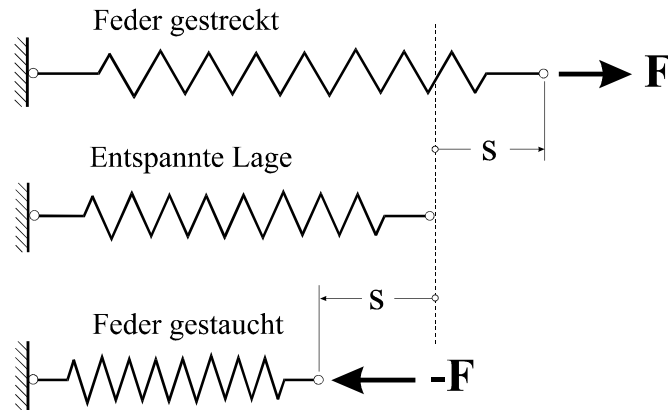


Abb. 8-10 Lineare Feder

Unter **linear elastischen Federn** verstehen wir idealisierte mechanische Gebilde, bei denen eine angreifende Kraft F eine Auslenkung s hervorruft. In der Feder stellt sich eine Federkraft vom Betrag F ein, die der Verlängerung bzw. der Verkürzung proportional ist. Es gilt also:

$$F = cs$$

und wir nennen

$$c = \frac{F}{s} \quad \text{Gl. 8-33}$$

die **lineare Federkonstante**, eine für jede Feder charakteristische Größe.

$$[c] = \frac{\text{Masse}}{(\text{Zeit})^2}, \quad \text{Einheit } \text{kg s}^{-2} = \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Für die Schraubendruckfeder mit Kreisquerschnitt nach (Abb. 8-11) gilt ohne Nachweis für die vertikale bzw. horizontale Federkonstante

$$c_z = \frac{Gd^4}{8iD^3} \quad \text{Gl. 8-34}$$

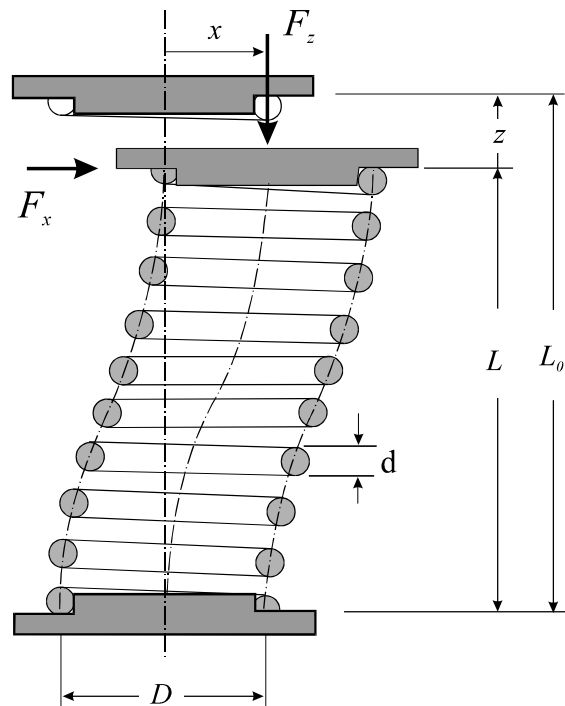


Abb. 8-11 Schraubendruckfeder DIN 2089

- d = Drahtdurchmesser
- D = mittlerer Windungsdurchmesser
- z = vertikaler Federweg der Last F_z
- x = Federweg quer zur Federachse in Richtung F_x
- L_0 = freie Höhe der Feder
- L = $L_0 - z$ Federhöhe unter der Last F_z
- c_z = F_z/z vertikale Federkonstante
- c_x = F_x/x horizontale Federkonstante
- η_c = k_x/k_z Verhältnis der Federkonstanten
- F_z = vertikale Last
- F_x = horizontale Last
- i = Anzahl der federnden Windungen
- G = Schubmodul

Sind mehrere Federn zusammengeschaltet, so ist es von Vorteil, diese Federn zu einer resultierenden Federsteifigkeit zusammenzufassen. Dabei wird zwischen Parallel- und Reihenschaltung unterschieden.

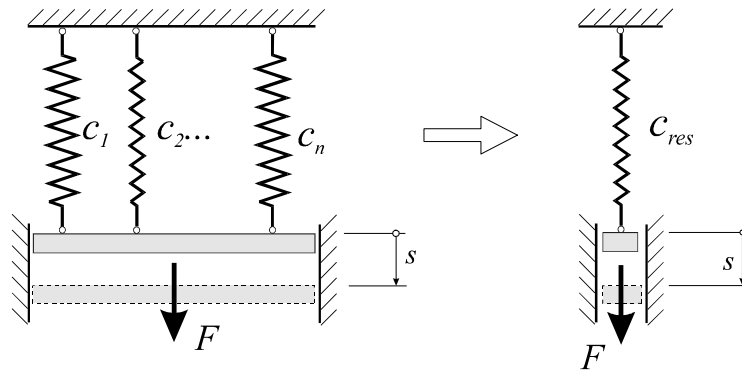


Abb. 8-12 Parallelschaltung gleichlanger Federn

Eine **Parallelschaltung** von Federn liegt vor, wenn mehrere elastische Federn so zusammengeschaltet werden, daß alle Federn dieselbe Auslenkung $s_1 = s_2 = \dots = s_n = s$ erfahren. Dann addieren sich ihre Federkräfte $F_i = c_i s$ zur Gesamtkraft

$$F = \sum_{i=1}^n F_i = c_1 s + c_2 s + \dots + c_n s = \sum_{i=1}^n c_i s = \left(\sum_{i=1}^n c_i \right) s = c_{\text{res}} s$$

$$c_{\text{res}} = \sum_{i=1}^n c_i$$

Gl. 8-35

Reihenschaltung oder *Hintereinanderschaltung* bedeutet, daß mehrere Federn so zusammengeschaltet werden, daß sich ihre Längenänderungen addieren. Die Gesamtauslenkung ist wegen der gleichen Längskraft in allen Federn

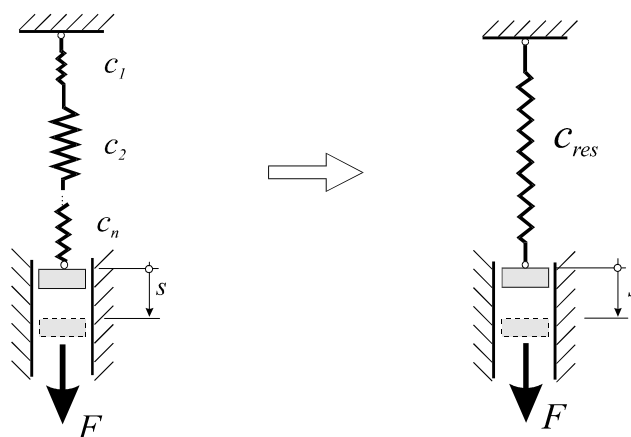


Abb. 8-13 Reihenschaltung

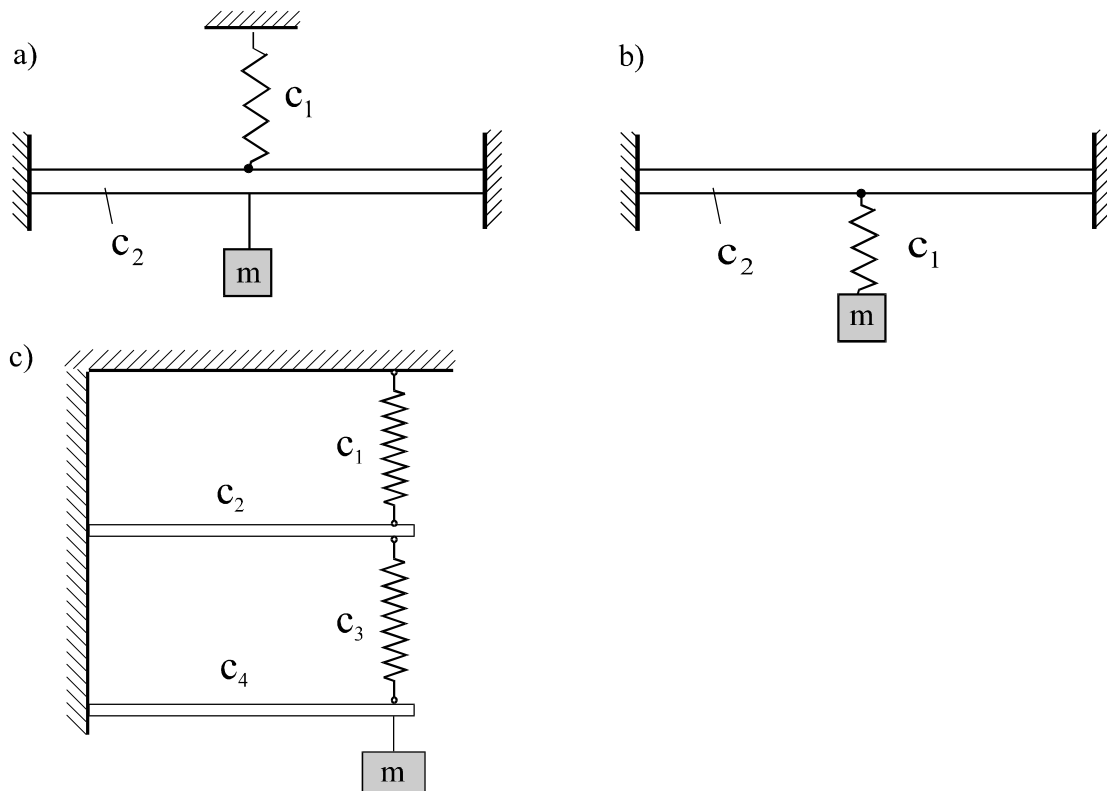
$$s = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2} + \dots + \frac{F}{c_n} = F \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} = \frac{F}{c_{\text{res}}}$$

$$\frac{1}{c_{\text{res}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i}$$

Gl. 8-36

Übungsvorschlag 8-1

Für die skizzierten Systeme sind die resultierenden Federsteifigkeiten zu ermitteln

**8.2.1 Kontinuierliche Systeme und ihre äquivalenten Einmassenschwinger**

Auch elastischen Stäben und Balken als kontinuierliche¹ Systeme können Federsteifigkeiten zugeordnet werden. Ist die eigene Masse des Balkens gegenüber der abzutragenden Einzelmasse m (Abb. 8-14) vernachlässigbar klein, dann läßt sich ein solches Tragsystem näherungsweise durch einen Einmassenschwinger modellieren. Wir betrachten dazu den Balken in Abb. 8-14. Der Kragträger wird am rechten Rand durch eine Einzelmasse m mit der Gewichtskraft $F = gm$ belastet. Zur Ermittlung der Ersatzsteifigkeit c^* benötigen wir die Durchbiegung des Stabendes infolge F . Die Ersatzsteifigkeit ergibt sich dann zu $c^* = F/f$. Beim oben skizzierten Kragträger mit Endbelastung gilt:

¹ Bei kontinuierlichen Systemen sind Masse, Steifigkeit und Dämpfung kontinuierlich verteilt. Beispiele sind Saiten, Stäbe, Balken, Platten, Scheiben und Schalen.

$$c^* = \frac{F}{f} = \frac{3EI_{yy}}{\ell^3}.$$

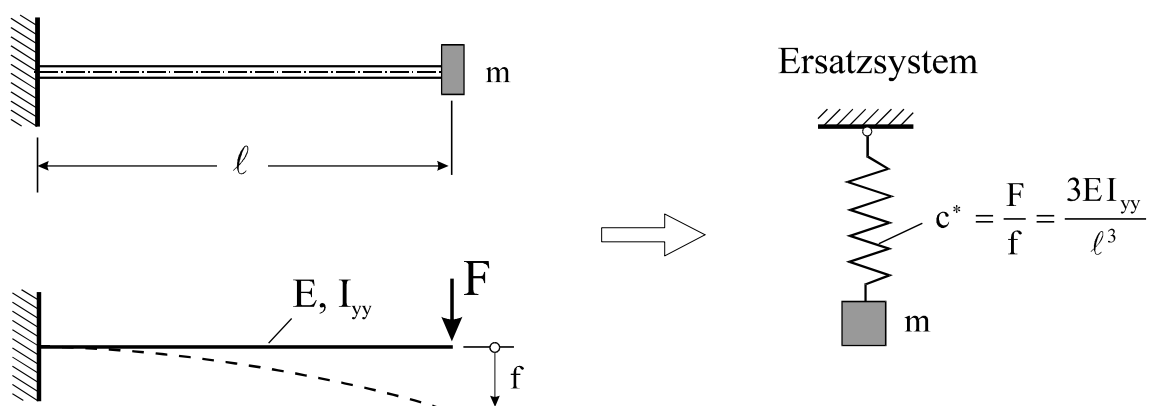


Abb. 8-14 Bildung eines Ersatzsystems beim Biegebalken

Für den Dehnstab nach Abb. 8-15 gilt mit $f = \Delta\ell = \frac{N}{EA} \ell$ und der Normalkraft $N = F$

$$c^* = \frac{F}{f} = \frac{EA}{\ell}$$

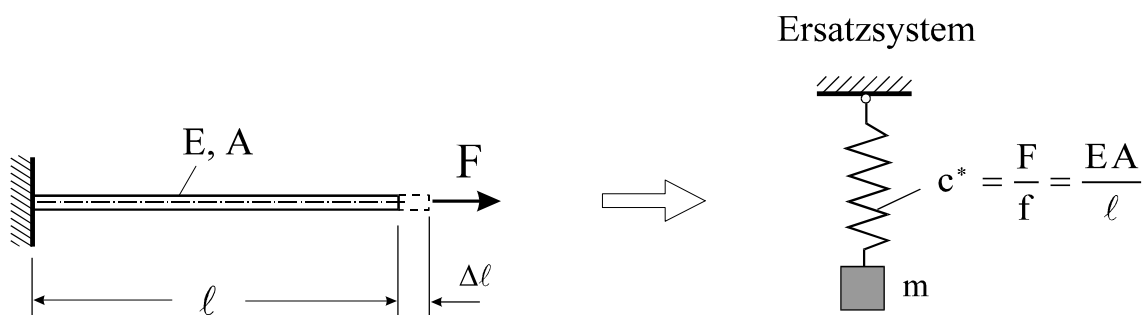
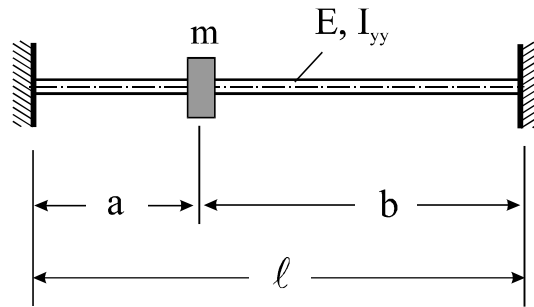


Abb. 8-15 Ersatzsteifigkeit für den Dehnstab

Übungsvorschlag 8-2:

Ermitteln Sie für das skizzierten Systeme die Federsteifigkeit des äquivalenten Einmassenschwingers



8.3 Der gedämpfte Einmassenschwinger

Bei frei schwingenden Systemen beobachten wir, daß die Schwingungsamplituden mit der Zeit abnehmen. Auch bei erzwungenen Schwingungen ist äußere Arbeit zur Aufrechterhaltung einer konstanten Amplitude erforderlich. Ursache dieser Erscheinung ist die Dissipation mechanischer Arbeit durch Reibung der schwingenden Struktur im umgebenden Medium, durch Reibung in Verbindungen oder Kontaktflächen und durch den Werkstoff (z. B. Stahlbeton) selbst. Bei der **Werkstoffdämpfung**, wird unterschieden zwischen der Hysterese und der plastischen Verformung des Materials. Diese Form der Dämpfung wird auch als **innere Dämpfung** bezeichnet.

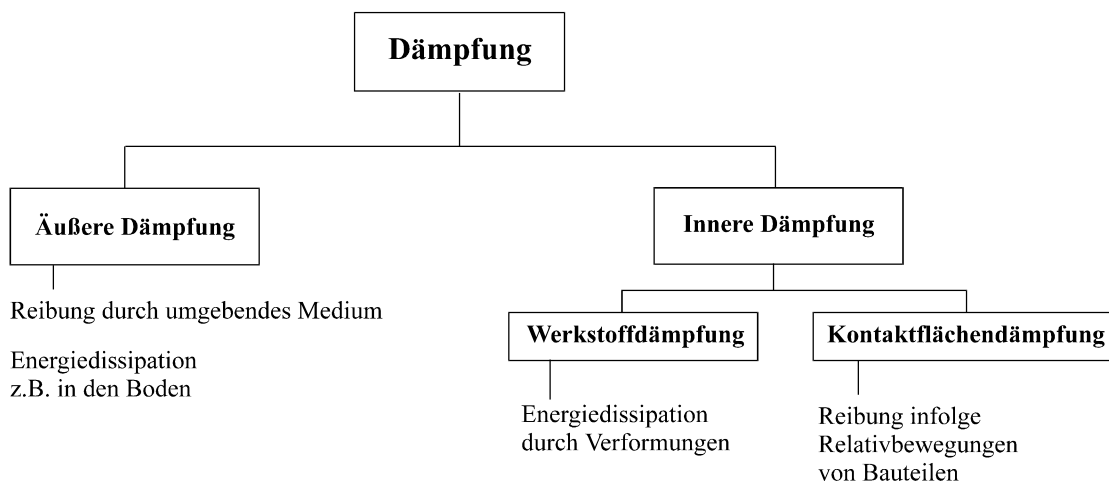


Abb. 8-16 Einteilung der Dämpfung

Bewegt sich ein Körper in einer Flüssigkeit oder in einem Gas, so ist die dämpfende Kraft bei hinreichend kleinen Geschwindigkeiten etwa der Geschwindigkeit proportional. An der freigeschnittenen Masse m (Abb. 8-17), die reibungsfrei gelagert sein soll ($\mu = 0$), greift neben der Federkraft $F_F = cx$ noch die Dämpferkraft $F_D = r\dot{x}$ an. Die Proportionalitätskonstante r hängt von der Form des Körpers und der Viskosität des den Körper umgebenden Mediums ab. Als Symbol für die Dämpfung verwenden wir in Anlehnung an den Stoßdämpfer eines Autos

einen Dämpfertopf. Die Dämpfung hat die Eigenschaft, daß sie dem System während des Bewegungsvorganges ständig Energie entzieht.

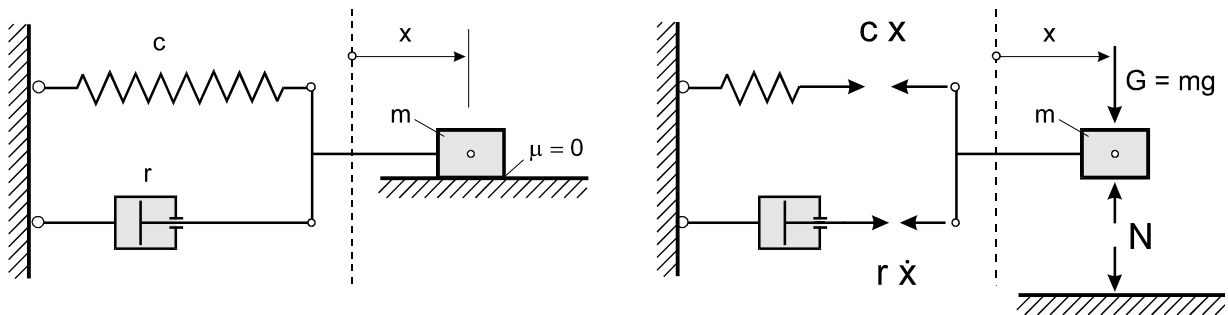


Abb. 8-17 Viskos gedämpfter Schwinger

Nach dem Freischneiden der Masse m liefert der Schwerpunktsatz in x - Richtung:

$$m\ddot{x} = -cx - r\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + cx = 0$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{r}{m}}_{=2\delta}\dot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{=\omega^2}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{Gl. 8-37}$$

oder

$$\ddot{x} + 2D\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{Gl. 8-38}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems

$$\delta = \frac{r}{2m}$$

Abklingkonstante

$$D = \frac{\delta}{\omega} = \frac{r}{2m\omega} = \frac{r}{2\sqrt{cm}}$$

Lehrsches Dämpfungsmaß

Hinweis: In der Rheologie wird die Parallelschaltung von Feder und Dämpfer entsprechend Abb. 8-17 auch als Kelvin¹-Modell bezeichnet.

¹ Thomas, Sir (seit 1866) William Lord Kelvin of Largs, brit. Physiker, 1824-1907

Zur Ermittlung der Fundamentallösungen von Gl. 8-37 versuchen wir folgenden Ansatz

$$x(t) = e^{\alpha t} \quad \text{Gl. 8-39}$$

der zu folgenden Ableitungen führt

$$\dot{x}(t) = \alpha e^{\alpha t} = \alpha x(t); \quad \ddot{x}(t) = \alpha^2 e^{\alpha t} = \alpha^2 x(t) \quad \text{Gl. 8-40}$$

Einsetzen von Gl. 8-39 und Gl. 8-40 in Gl. 8-37 liefert $(\alpha^2 + 2D\omega\alpha + \omega^2)e^{\alpha t} = 0$.

Da $e^{\alpha t}$ keine Nullstelle besitzt, muß

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega^2 = 0 \quad \text{Gl. 8-41}$$

erfüllt sein. Gl. 8-41 wird **charakteristische Gleichung** genannt. Sie hat die beiden Lösungen

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} = -\delta \pm \omega \sqrt{D^2 - 1} \quad \text{Gl. 8-42}$$

Nach dem Superpositionsprinzip für lineare Differentialgleichungen ist dann

$$x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} \quad (\alpha_1 \neq \alpha_2) \quad \text{Gl. 8-43}$$

die vollständige Lösung der Gl. 8-37. Die beiden noch freien Konstanten C_1 und C_2 werden aus den Anfangsbedingungen ermittelt. Für den Fall, daß die beiden Lösungen der charakteristischen Gleichung zusammenfallen, also $\delta = \omega$ ist, reicht der Ansatz nach Gl. 8-39 nicht aus, da er nur eine Lösung (Doppelwurzel) liefert. Die vollständige Lösung des homogenen Systems muß aber zwei Fundamentallösungen mit zwei beliebigen Konstanten haben, um diese an die Anfangsbedingungen $x(t = t_0)$ und $\dot{x}(t = t_0)$ anpassen zu können. Wir bestätigen durch Einsetzen, daß für $\delta = \omega$ auch $x(t) = te^{-\delta t}$ eine Fundamentallösung von Gl. 8-37 ist. Die vollständige Lösung lautet dann in diesem Fall

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\delta t} \quad \text{Gl. 8-44}$$

Je nachdem, ob die Wurzeln der charakteristischen Gleichung reell oder komplex sind, werden folgende Fälle unterschieden:

Fall a: Starke Dämpfung $D > 1$

Für $D > 1$ sind beide Wurzeln $\alpha_{1,2}$ in Gl. 8-41 reell und negativ. Die Exponenten in Gl. 8-43 sind also für positive t negativ. Damit nimmt die Auslenkung mit anwachsendem t ab. Für sehr große t geht $x(t) \rightarrow 0$. In diesem Fall liegt keine Schwingung vor¹, denn $x(t)$ wird nach Gl. 8-43 höchstens einmal Null, und zwar für

$$C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} = 0 \rightarrow -\frac{C_2}{C_1} = e^{(\alpha_1 - \alpha_2)t} = e^{2\omega\sqrt{D^2 - 1}t} > 0$$

Da die rechte Seite mit der Exponentialfunktion stetig wächst, muß $\frac{C_2}{C_1} < 0$ gefordert werden.

Die Integrationskonstanten errechnen sich aus den Anfangsbedingungen für $t = 0$

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 = C_1 + C_2 \\ \dot{x}(t=0) &= v_0 = C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_2 \end{aligned}$$

also

$$C_1 = \frac{x_0 \alpha_2 - v_0}{\alpha_2 - \alpha_1}; C_2 = \frac{v_0 - x_0 \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \rightarrow -\frac{C_2}{C_1} = \frac{x_0 \alpha_1 - v_0}{x_0 \alpha_2 - v_0} > 0$$

Der Ausdruck $\frac{x_0 \alpha_1 - v_0}{x_0 \alpha_2 - v_0}$ wird für $\frac{v_0}{x_0} < \alpha_2$ positiv, so daß nur für große Beträge negativer Anfangsgeschwindigkeiten v_0 ein Nulldurchgang von $x(t)$ möglich ist (Abb. 8-18). Der Zeitpunkt des Nulldurchgangs ist

$$t^* = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \frac{x_0 \alpha_1 - v_0}{x_0 \alpha_2 - v_0}$$

¹ Diese Bewegungen werden auch Kriechbewegungen genannt.

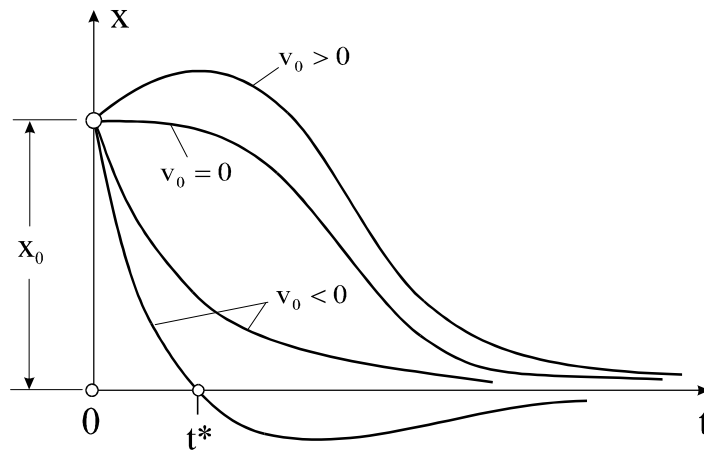


Abb. 8-18 Abklingverhalten bei starker Dämpfung

Fall b: Grenzfall $D = 1$

Mit $D = 1$ gilt die Lösung Gl. 8-44. Die Bestimmung der Integrationskonstanten erfolgt wieder aus den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 = C_1 \\ \dot{x}(t=0) &= v_0 = C_2 - D\omega C_1 \quad \rightarrow C_2 = v_0 + D\omega x_0 \end{aligned}$$

und damit die Lösung

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + D\omega x_0)t] e^{-D\omega t} \quad \text{Gl. 8-45}$$

Auch hier geht $x(t)$ für hinreichend große t gegen Null. Die Kurven $x(t)$ haben einen ähnlichen Verlauf, wie die in Abb. 8-18. In der Schwingungslehre haben diese Lösungen keine Bedeutung.

Fall c: Schwache Dämpfung $D < 1$

Für $D < 1$ hat die charakteristische Gleichung Gl. 8-41 zwei komplexe Wurzeln

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\omega\sqrt{1-D^2} = -\delta \pm i\omega_d \quad \text{Gl. 8-46}$$

In Gl. 8-46 wurde die **Eigenkreisfrequenz des gedämpften Schwingers**

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-D^2} > 0 \quad \text{Gl. 8-47}$$

eingeführt. Im Vergleich zum ungedämpften System führt die Dämpfung u.a. dazu, daß die Eigenfrequenz abnimmt. Einsetzen von Gl. 8-46 in Gl. 8-43 liefert:

$$\begin{aligned} x(t) &= D_1 \exp(-\delta + i\omega_d) t + D_2 \exp(-\delta - i\omega_d) t \\ &= D_1 \exp(-\delta t) \exp(i\omega_d t) + D_2 \exp(-\delta t) \exp(-i\omega_d t) \\ &= e^{-\delta t} [D_1 \exp(i\omega_d t) + D_2 \exp(-i\omega_d t)] \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Eulerschen Formel $\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$ folgt

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\delta t} [D_1 (\cos \omega_d t + i \sin \omega_d t) + D_2 (\cos \omega_d t - i \sin \omega_d t)] \\ &= e^{-\delta t} [(D_1 + D_2) \cos \omega_d t + i(D_1 - D_2) \sin \omega_d t] \end{aligned}$$

oder mit den neuen Konstanten¹ (C_1, C_2 bzw. A, φ)

$$\begin{aligned} C_1 &= D_1 + D_2 = A \cos \varphi \\ C_2 &= i(D_1 - D_2) = A \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\delta t} [C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t] \\ &= A e^{-\delta t} \cos(\omega_d t - \varphi) \end{aligned} \quad \text{Gl. 8-48}$$

Die beiden noch freien Konstanten C_1 und C_2 bestimmen wir aus den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 = C_1 \\ \dot{x}(t=0) &= v_0 = -\delta C_1 + \omega_d C_2 \\ C_1 &= x_0 \\ C_2 &= \frac{1}{\omega_d} (v_0 + \delta x_0) \end{aligned}$$

so daß wir als Bewegungsgesetz mit

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = x_0 \sqrt{1 + \frac{v_0 + \delta x_0}{\omega_d x_0}}^2 \\ \tan \varphi &= \frac{v_0 + \delta x_0}{\omega_d x_0} \quad \text{Ⓜ} \quad \varphi = \arctan \frac{v_0 + \delta x_0}{\omega_d x_0} \end{aligned} \quad \text{Gl. 8-49}$$

schließlich erhalten

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{-\delta t} \left(x_0 \cos \omega_d t + \frac{v_0 + \delta x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) \\
 &= x_0 \sqrt{1 + \frac{v_0 + \delta x_0}{\omega_d x_0}}^2 e^{-\delta t} \cos(\omega_d t - \varphi)
 \end{aligned}$$

Gl. 8-50

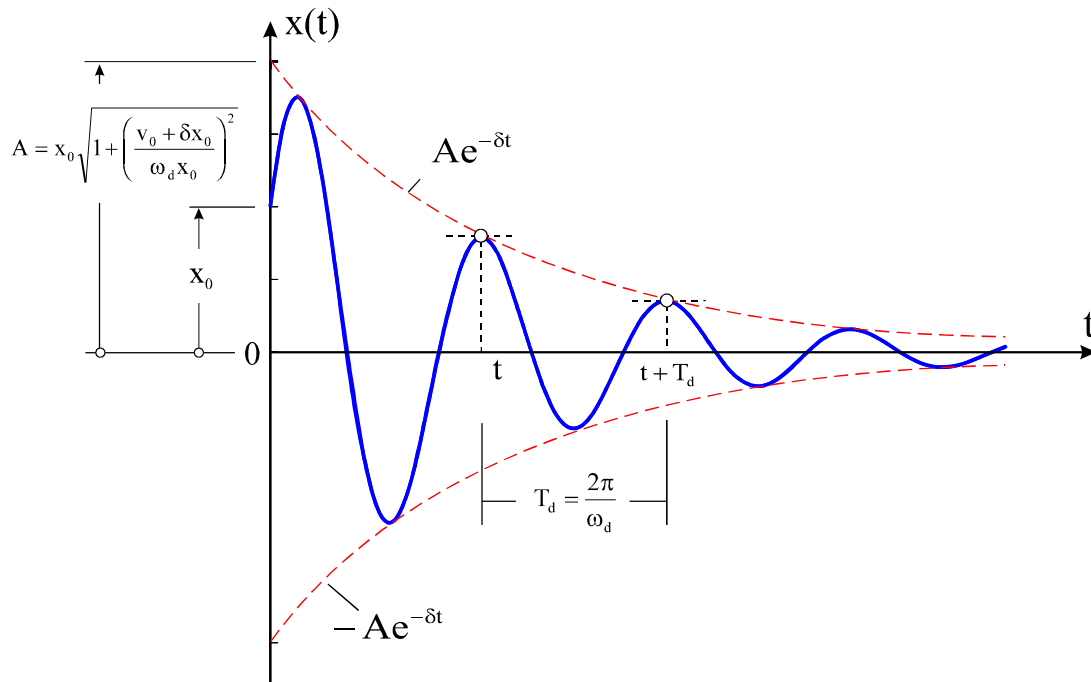


Abb. 8-19 Viskos gedämpfte Schwingung

Ein Vergleich dieser Lösung mit dem Bewegungsgesetz für die freie ungedämpfte Schwingung zeigt, daß wir Gl. 8-50 als Schwingung auffassen können, deren Amplitude mit dem Exponentialgesetz $\exp(-\delta t)$ abnimmt. Die vorliegende Bewegung wird auch **pseudo-periodisch**² genannt, da im Gegensatz zur periodischen Bewegung $x(t+T) \neq x(t)$ ist. Allerdings folgen zwei gleichsinnige Extremwerte nach der Schwingungsdauer (Abb. 8-19)

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \text{Gl. 8-51}$$

Da die Kreisfrequenz ω_d der gedämpften Schwingung kleiner ist als die Kreisfrequenz ω der ungedämpften Schwingung, ist die Schwingungsdauer T_d größer als diejenige der ungedämpften Schwingung. Die Zeitpunkte, zu denen das Bewegungsgesetz $x(t)$ Extremwerte annimmt, errechnen wir aus Gl. 8-48

¹ Damit die Schwingung reell wird, müssen D_1 und D_2 konjugiert komplex gewählt werden.

² griech. $\psi\epsilon\upsilon\delta\omicron\varsigma$ = Betrug, Lüge, Unwahrheit, Täuschung.

$$\frac{d}{dt} x(t) = \dot{x} = -Ae^{-\delta t} [\delta \cos(\omega_d t - \varphi) + \omega_d \sin(\omega_d t - \varphi)] = 0$$

und damit: $\tan(\omega_d t - \varphi) = -\frac{\delta}{\omega_d}$. Da der Tangens die Periode π hat, erhalten wir

$$t = t_n = \frac{1}{\omega_d} \left(\varphi - \arctan \frac{\delta}{\omega_d} + n\pi \right) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Zwischen zwei aufeinanderfolgenden gleichsinnigen Maxima oder Minima vergeht die Zeit (Periode)

$$t_{n+2} - t_n = \frac{1}{\omega_d} \left(\varphi - \arctan \frac{\delta}{\omega_d} + (n+2)\pi \right) - \frac{1}{\omega_d} \left(\varphi - \arctan \frac{\delta}{\omega_d} + n\pi \right) = \frac{2\pi}{\omega_d} = T_d$$

Damit läßt sich das **Dämpfungsverhältnis** ϑ als Quotient der Beträge zweier aufeinander folgender Maxima oder Minima wie folgt angeben

$$\vartheta = \frac{x(t_n)}{x(t_{n+2})} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+T_d)}} \frac{\cos(\omega_d t - \varphi)}{\cos[\omega_d(t+T_d) - \varphi]} = e^{\delta T_d} \frac{\cos(\omega_d t - \varphi)}{\cos(\omega_d t - \varphi)} = e^{\delta T_d} = \text{konst.} \quad \text{Gl. 8-52}$$

Der natürliche Logarithmus des Dämpfungsverhältnisses ϑ wird nach Gauß¹ **logarithmisches Dekrement**² genannt.

$$\Lambda = \ln \vartheta = \ln \frac{x(t_n)}{x(t_{n+2})} = \frac{2\pi\delta}{\omega_d} = 2\pi \frac{\delta}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} = 2\pi \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} = \frac{r\pi}{m\sqrt{c/m - (r/2m)^2}} \quad \text{Gl. 8-53}$$

Hinweis: Die Größe Λ kann leicht aus experimentellen Befunden abgeleitet werden. Ist für zwei aufeinanderfolgende Maxima oder Minima das logarithmische Dekrement experimentell ermittelt worden, so läßt sich damit das *Lehrsche* Dämpfungsmaß D aus

$$\frac{\delta}{\omega} \equiv D = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}} \quad \text{Gl. 8-54}$$

berechnen. Wenn für verschiedene Zeiten t dasselbe Dekrement Λ gemessen wird, so ist das ein Zeichen dafür, daß die Dämpfung linear ist.

¹ Carl Friedrich Gauß, Mathematiker, Astronom und Physiker, 1777-1855

² lat. decresco = abnehmen, zurücknehmen, sich vermindern, schwinden.

Wir können aus Gl. 8-47 noch das Verhältnis der Eigenkreisfrequenzen von gedämpfter und ungedämpfter Schwingung bilden

$$\frac{\omega_d}{\omega} = \sqrt{1-D^2} \quad \rightarrow \left(\frac{\omega_d}{\omega} \right)^2 + D^2 = 1 \quad \text{Gl. 8-55}$$

Tragen wir das Verhältnis ω_d/ω über dem *Lehrschen* Dämpfungsmaß D auf, so erhalten wir einen Viertelkreis mit dem Radius 1. Der Abb. 8-20 entnehmen wir, daß sich bei schwach gedämpften Systemen die Eigenfrequenz ω_d von der Eigenfrequenz ω des ungedämpften Systems nur unerheblich unterscheidet. Bei Annäherung an den Grenzfall $D = 1$ nimmt dieses Verhältnis jedoch sehr stark ab.

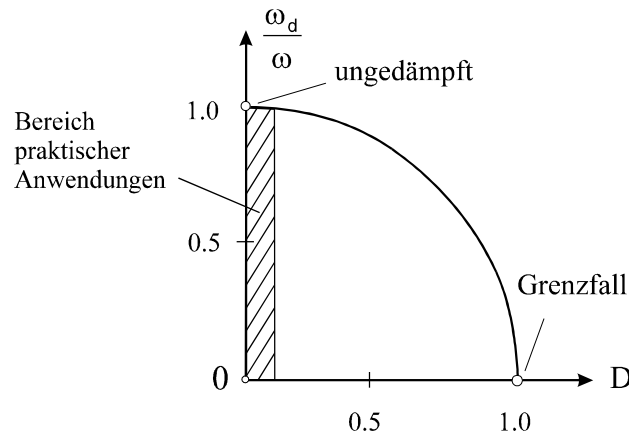


Abb. 8-20 Zusammenhang zwischen dem Frequenzverhältnis und dem *Lehrschen* Dämpfungsmaß

Bei schwach gedämpften Systemen ist noch folgende Näherung von praktischem Interesse. Mit Gl. 8-53 folgt

$$\Lambda = \ln \vartheta = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} \approx 2\pi D \left(1 - \frac{D^2}{2} \right) \approx 2\pi D \quad \text{Gl. 8-56}$$

und damit

$$\vartheta = \frac{x(t_n)}{x(t_{n+2})} = \exp(\Lambda) \approx 1 + \Lambda \approx 1 + 2\pi D \quad \text{Gl. 8-57}$$

bzw.

$$D = \frac{1}{2\pi} \frac{x(t_n) - x(t_{n+2})}{x(t_{n+2})} \quad \text{Gl. 8-58}$$

Baustoff	D	L
Stahl	0,003 ...0,016	0,02 ...0,10
Stahlbeton		
ungerissen	0,006...0,032	0,04...0,20
gerissen	0,01...0,05	0,06...0,3
Mauerwerk	0,020	0,12
Holzkonstruktionen	0,024	0,15

Tabelle 8-1 Lehrsches Dämpfungsmaß und logarithmisches Dekrement für einige Baustoffe