

**Friedrich U. Mathiak**

---

# **Technische Mechanik II**

*Festigkeitslehre*

---

---

## **Technische Mechanik II**

### *Festigkeitslehre*

Copyright Neubrandenburg 2002 / Friedrich U. Mathiak

Der Nachdruck oder das Kopieren dieses Skriptes ist auch auszugsweise nur mit Genehmigung des Autors erlaubt.

1. Auflage Neubrandenburg 1998
2. Auflage Neubrandenburg 1999
3. Auflage Neubrandenburg 2000
4. Auflage Neubrandenburg 2002

Fachhochschule Neubrandenburg

Prof. Dr.-Ing. Friedrich U. Mathiak

Fachbereich:  
Bauingenieur- und Vermessungswesen

Postanschrift:

Brodaer Straße 2  
**D-17033 Neubrandenburg**

Tel.: (0395) 5693-(0)-301

<b>1</b>	<b>SEILE UND KETTEN, STÜTZLINIENBÖGEN</b>	<b>1-1</b>
1.1	Allgemeines	1-1
1.2	Das undeformbare Seil unter Querlast $q(x)$	1-1
1.3	Das undeformbare Seil unter Eigengewicht $q(s)$	1-6
1.4	Die Stützlinie	1-11
<b>2</b>	<b>DIE GERADE ODER EINACHSIGE BIEGUNG MIT NORMALKRAFT</b>	<b>2-1</b>
2.1	Voraussetzungen	2-1
2.2	Das Verschiebungsfeld $w$	2-2
2.3	Reine Normalkraftbeanspruchung des Stabes	2-6
2.4	Reine Biegung	2-10
2.5	Spannungsermittlung bei gerader Biegung mit Normalkraft	2-16
2.6	Verbundquerschnitte	2-20
<b>3</b>	<b>DAS SUPERPOSITIONSPRINZIP</b>	<b>3-1</b>
<b>4</b>	<b>DIE SCHIEFE ODER ZWEIACHSIGE BIEGUNG MIT NORMALKRAFT</b>	<b>4-1</b>
4.1	Allgemeines	4-1
4.2	Das Verschiebungsfeld $w$	4-3
4.3	Spannungsermittlung im Zentralachsensystem	4-6
4.4	Transformation auf Hauptzentralachsen	4-8
<b>5</b>	<b>DER KERN EINES QUERSCHNITTS</b>	<b>5-1</b>
<b>6</b>	<b>TEMPERATURBEANSPRUCHUNG EINES GERADEN BALKENS</b>	<b>6-1</b>
6.1	Allgemeines	6-1
6.2	Die Grundgleichungen	6-1
6.3	Gleichmäßige Erwärmung eines Stabes	6-4
6.4	Ungleichmäßige Erwärmung eines Balkens	6-5
<b>7</b>	<b>DER BALKEN AUF NACHGIEBIGER UNTERLAGE</b>	<b>7-1</b>
<b>8</b>	<b>ABSCHÄTZUNG DER SCHUBSPANNUNGEN AUS QUERKRAFT</b>	<b>8-1</b>
8.1	Allgemeines	8-1
8.2	Wirkungsweise der Schubspannungen aus Querkraft	8-3
<b>9</b>	<b>DER SCHUBELASTISCHE BALKEN</b>	<b>9-1</b>
9.1	Voraussetzungen	9-1
9.2	Die Kinematik des schubelastischen Balkens	9-2
9.3	Die Differentialgleichung der Durchsenkung des schubelastischen Balkens	9-4
<b>10</b>	<b>SCHUB AUS QUERKRAFT FÜR DÜNNWANDIGE QUERSCHNITTE</b>	<b>10-1</b>
10.1	Allgemeines	10-1
10.2	Dünnwandige offene Querschnitte	10-1
10.3	Der Schubmittelpunkt bei Biegung mit Querkraften	10-8
10.4	Dünnwandige geschlossene Querschnitte	10-17
<b>11</b>	<b>DER GERADE KREISZYLINDRISCHE STAB UNTER TORSIONSBEANSPRUCHUNG</b>	<b>11-1</b>
11.1	Allgemeines	11-1
11.2	Voraussetzungen	11-1
11.3	Die Kinematik der reinen Torsion	11-2
<b>12</b>	<b>TORSION DÜNNWANDIGER QUERSCHNITTE</b>	<b>12-1</b>
12.1	Allgemeines	12-1
12.2	Dünnwandige geschlossene Querschnitte	12-2
12.3	Mehrzellige dünnwandige Hohlquerschnitte	12-9
12.4	Dünnwandige offene Querschnitte	12-12
12.4.1	Torsion eines schmalen Rechtecks	12-13
12.4.2	Torsion zusammengesetzter schmaler Rechtecke	12-15

---

<b>13</b>	<b>STABILITÄTSPROBLEME</b>	<b>13-1</b>
13.1	Allgemeines	13-1
13.2	Elastisches Knicken gerader Stäbe	13-3
13.3	Die Eulerschen Knickfälle	13-8
13.4	Das Omega-Verfahren	13-14

# 13 Stabilitätsprobleme

## 13.1 Allgemeines

Bei den bisherigen Betrachtungen zum Tragverhalten von Stäben sind wir immer davon ausgegangen, daß zwischen den Belastungen und den daraus resultierenden Verformungen ein eindeutiger Zusammenhang besteht, die Lösung also eindeutig war. Wie wir sehen werden, geht diese Eindeutigkeit bei Fragestellungen zur Beurteilung der Art von Gleichgewichtszuständen zum Teil verloren.

Aus Experimenten ist bekannt, daß ein durch eine Druckkraft  $F$  belasteter Stab (Abb. 13-1) durch Steigerung der Last bis zu einem kritischen Wert  $F_k = \lambda_k F$  bei der geringsten *Störung*<sup>1</sup> aus der gestreckten Lage in eine *ausgeknickte* Lage übergeht (Abb. 13-2). Das System ist nach dem Ausknicken für den Praktiker unbrauchbar geworden und ist dann nur noch von theoretischem Interesse.

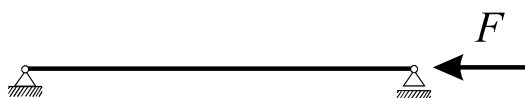


Abb. 13-1 Statisches Grundsystem



Abb. 13-2 Ausgeknickte Lage

Definition:

Die Stabilität einer Gleichgewichtslage ist nach *F. Klein*<sup>2</sup> gegeben, wenn ein System nach geringer Auslenkung den ursprünglichen Gleichgewichtszustand wieder einnimmt.

Entsprechend bedeutet eine instabile Gleichgewichtslage, daß sich der belastete Körper bei der geringsten Störung weiter aus dieser Gleichgewichtslage entfernt. Diese Sachverhalte können wir uns am Verhalten einer schweren Kugel auf einer gekrümmten Bahn nach Abb. 13-3 klarmachen.

<sup>1</sup> das können Auslenkungen oder auch kurzfristig wirkende *Störbelastungen* sein

<sup>2</sup> Christian Felix Klein, Mathematiker, 1849-1925

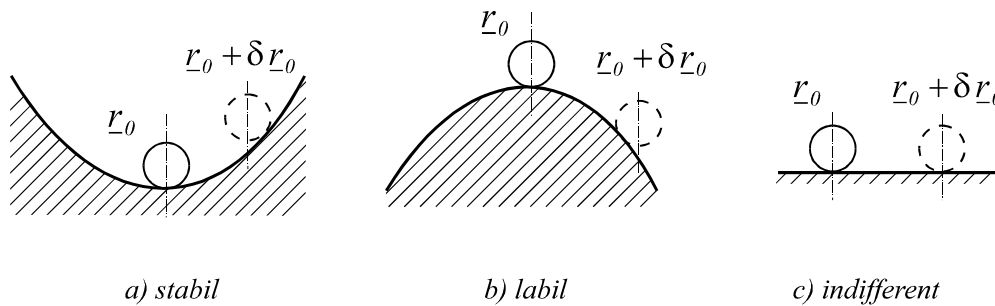


Abb. 13-3 Gleichgewichtszustände einer schweren Kugel auf einer gekrümmten Unterlage

Demzufolge wird eine Gleichgewichtslage  $r_0$  als *stabil* bezeichnet, wenn beschränkte Störungen  $\delta r_0$  aus der Gleichgewichtslage ebenfalls zu beschränkten Lageänderungen führen. Wachsen dagegen bei einer beschränkten Störung die Bewegungen unbeschränkt an, dann hat eine *labile* Gleichgewichtslage vorgelegen. Als *indifferente* Gleichgewichtslagen werden Konfigurationen bezeichnet, die in jeder Lage  $r_0 + \delta r_0$  im Gleichgewicht sind.

Im Bauwesen treten weitere Fälle von elastischer Instabilität auf. Dazu gehören das *Beulen* von Platten und Schalen, das *Kippen* von Trägern und das *Biegedrillknicken* von Trägern. In allen Fällen handelt es sich um das seitliche Ausweichen von Stäben oder Flächentragwerken (Platten, Scheiben oder Schalen).

Das Beulen<sup>1</sup> bei Scheiben, Platten oder Schalen ereignet sich unter der Einwirkung von Druck- und Schubkräften.

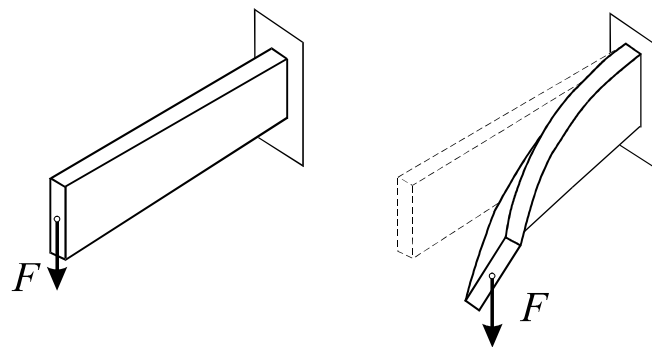


Abb. 13-4 Kippen eines Hochkantträgers

Das Kippen tritt bei Trägern auf, deren Querschnittshöhe groß ist im Vergleich zur Querschnittsbreite (Abb. 13-4). Bei bestimmten Biegebeanspruchungen tritt Instabilität auf, die sich durch seitliches Auskippen bei gleichzeitiger Torsion des Querschnitts äußert.

Beim Knicken eines zentrisch gedrückten Stabes kann sich die ausgelenkte Lage nicht nur wie beim Knicken als reine Biegeknicklinie darstellen, sondern es kann sich, ähnlich wie beim Kippen, zusätzlich eine Querschnittsverdrehung einstellen.

<sup>1</sup> z.B. das Beulen von Stegblechen vollwandiger Träger im Stahlbau

Das Tragwerk geht von einem reinen Druckzustand in einen Druck-Biege-Torsionszustand über. Wie Untersuchungen in der höheren Elastizitätstheorie zeigen, kommt Biegedrillknickung nur für dünnwandige Querschnitte in Betracht, bei denen Flächenmittelpunkt und Schubmittelpunkt nicht zusammenfallen. Andererseits kann auch bei Zusammenfallen von Flächenmittelpunkt und Schubmittelpunkt der Druckstab bei kritischer Belastung mit reiner Torsion reagieren. Dieser Fall wird als *Drill-Knicken* bezeichnet.

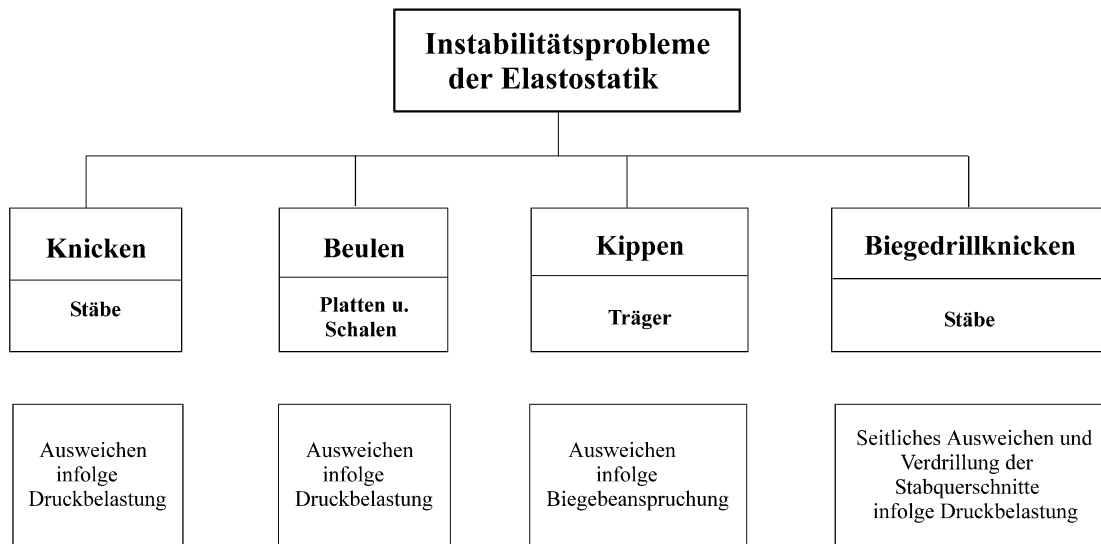


Abb. 13-5 Erscheinungsformen der Instabilität

## 13.2 Elastisches Knicken gerader Stäbe

Wir beschränken uns auf die Ableitung der *Knickgleichung* gerader Stäbe. Dazu betrachten wir einführend den einseitig eingespannten Stab nach Abb. 13-6, der durch eine Druckkraft  $F$  mit der Exzentrizität  $e$  belastet ist.

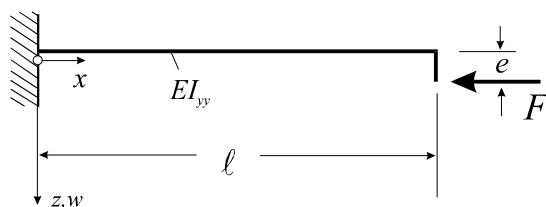


Abb. 13-6 Kragträger mit exzentrischer Last  $F$

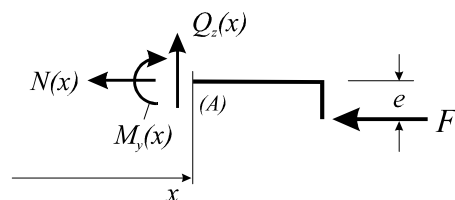


Abb. 13-7 Freischnittskizze Theorie 1. Ordnung

In der klassischen Vorgehensweise wird das Gleichgewicht am unverformten System (Abb. 13-7) angeschrieben, die als *Theorie 1. Ordnung* bezeichnet wird.

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad N(x) = -F \\ \sum F_z = 0: & \quad Q_z(x) = 0 \\ \sum M_y^{(A)} = 0: & \quad M_y(x) = -Fe\end{aligned}$$

Beachten wir noch das Werkstoffgesetz  $EI_{yy}w''(x) = -M_y(x)$ , dann erhalten wir die Biegedifferentialgleichung nach Theorie 1. Ordnung

$$\boxed{w''(x) = \frac{Fe}{EI_{yy}}} \quad \text{Gl. 13-1}$$

Da wir das Gleichgewicht am unverformten System angeschrieben haben, sind die Schnittlasten von der Verschiebung  $w(x)$  unabhängig.

Ein entscheidender Unterschied zur klassischen Vorgehensweise ergibt sich, wenn wir das Gleichgewicht am verformten System notieren. Wir bezeichnen diese Vorgehensweise als *Theorie 2. Ordnung*. Da wir auch weiterhin die Verschiebung und deren 1. Ableitung als klein unterstellen, handelt es sich bei den folgenden Gleichungen um eine *linearisierte Theorie 2. Ordnung*. Während der Verformung soll die Last  $F$  ihre Richtung beibehalten. Wir sprechen in diesem Fall von einer *konservativen Belastung*. Die Durchbiegung  $w(\ell)$  am Stabende bezeichnen wir im folgenden abkürzend mit  $f$ .

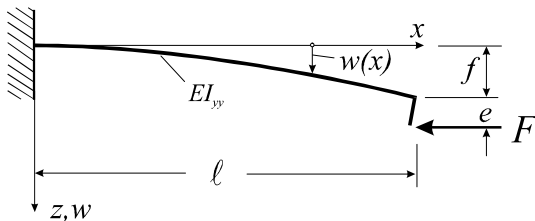


Abb. 13-8 Ausgelenkte Lage

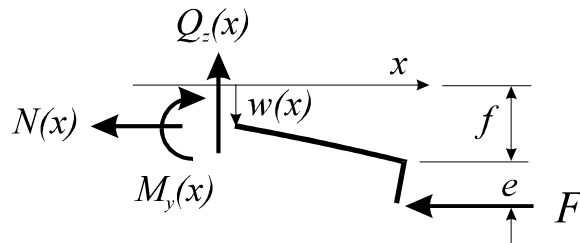


Abb. 13-9 Freischnittskizze Theorie 2. Ordnung

Notieren wir die Gleichgewichtsbedingungen für den abgeschnittenen Trägerteil (Abb. 13-9), so folgt:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & \quad N(x) = -F \\ \sum F_z = 0 & \quad Q_z(x) = 0 \\ \sum M_y = 0 & \quad M_y(x) = -F[e + f - w(x)]\end{aligned}$$

Das Schnittmoment  $M_y(x)$  hängt jetzt offensichtlich von der (noch unbekannt) Verschiebung  $w(x)$  ab. Da weiterhin der bekannte Zusammenhang  $EI_{yy}w''(x) = -M_y(x)$  zwischen



der linearisierten Krümmung  $w''(x)$  und dem Biegemoment  $M_y(x)$  gilt, erhalten wir aus  $EI_{yy}w''(x) = F[e + f - w(x)]$  und mit der Abkürzung

$$\boxed{\kappa^2 = \frac{F}{EI_{yy}}} \quad \text{Gl. 13-2}$$

die inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\boxed{w''(x) + \kappa^2 w(x) = \kappa^2(e + f)} \quad \text{Gl. 13-3}$$

Die vollständige Lösung  $w(x) = w_h(x) + w_p(x)$  setzt sich zusammen aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$w_h''(x) + \kappa^2 w_h(x) = 0 \quad \text{Gl. 13-4}$$

und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$w_p''(x) + \kappa^2 w_p(x) = \kappa^2(e + f) \quad \text{Gl. 13-5}$$

Wie durch Einsetzen leicht bestätigt werden kann, ist  $w_h = C_1 \sin \kappa x + C_2 \cos \kappa x$  Lösung der homogenen und  $w_p = e + f$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, so daß die vollständige Lösung

$$\boxed{w(x) = C_1 \sin \kappa x + C_2 \cos \kappa x + e + f} \quad \text{Gl. 13-6}$$

lautet. Aus Gl. 13-6 errechnen wir noch die erste Ableitung

$$w'(x) = \kappa(C_1 \cos \kappa x - C_2 \sin \kappa x) \quad \text{Gl. 13-7}$$

Die beiden Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  werden aus den geometrischen Randbedingungen an der Stelle  $x = 0$  bestimmt:

$$\begin{aligned} w(x=0) = 0 &= C_2 + e + f && \rightarrow C_2 = -(e + f) \\ w'(x=0) = 0 &= C_1 \end{aligned}$$

Einsetzend der Konstanten in Gl. 13-6 liefert zunächst für die Verschiebung

$$w(x) = (e + f)(1 - \cos \kappa x) \quad \text{Gl. 13-8}$$

Unter Beachtung von  $w(\ell) \equiv f = (e + f)(1 - \cos \kappa \ell)$  folgen die Beziehungen

$$e + f = \frac{e}{\cos \kappa \ell}; \quad e + f = \frac{f}{1 - \cos \kappa \ell}; \quad e = f \frac{\cos \kappa \ell}{1 - \cos \kappa \ell} \quad \text{Gl. 13-9}$$

und damit endgültig

$$w(x) = \frac{e(1 - \cos \kappa x)}{\cos \kappa \ell} \quad \text{Gl. 13-10}$$

Die Durchbiegung  $w(x)$  ist offensichtlich der Exzentrizität  $e$  des Kraftangriffs proportional. Für  $e = 0$  erfolgt mit  $w = 0$  keine Auslenkung, der Stab bleibt also in gestreckter Lage. Trotzdem ist eine von Null verschiedene Verschiebung möglich und zwar für den Fall, daß auch der Nenner verschwindet. Die Verschiebung  $w$  erscheint dann in der unbestimmten Form  $\frac{0}{0}$ . Das ist der Fall für

$$\cos \kappa \ell = 0 \quad \rightarrow \quad \kappa \ell = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots = (2j-1)\frac{\pi}{2} \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{Gl. 13-11}$$

Die Form der Biegelinie im kritischen Fall erhalten wir, wenn wir aus Gl. 13-10 mit der zweiten Gleichung aus Gl. 13-9 die Exzentrizität  $e$  eliminieren, also:

$$w(x) = f \frac{1 - \cos \kappa x}{1 - \cos \kappa \ell} \quad \text{Gl. 13-12}$$

Auch im kritischen Fall ist mit  $\cos \kappa \ell = 0$  die Biegelinie eine Kosinuskurve, deren Amplitude jedoch unbestimmt bleibt, da  $f$  selbst nicht bestimmt werden kann.

Zu den kritischen Werten nach Gl. 13-11 gehören nach Gl. 13-2 kritische Lasten  $F_k$ . Die kleinste kritische Last, und nur die ist praktisch von Interesse, ergibt sich mit  $j = 1$  und  $\kappa \ell = \pi/2$  entsprechend Gl. 13-2 zu

$$F_k^{(1)} = \frac{\pi^2 EI_{yy}}{4\ell^2} \quad \text{Gl. 13-13}$$

Das Tragverhalten des eingespannten Balkens mit einer außermittigen Druckkraft am Trägerende läßt sich noch verdeutlichen, wenn wir die Durchbiegung  $f$  über der Last  $F$  auftragen und dabei die Lastexzentrizität  $e$  variieren. Aus der zweiten von Gl. 13-9 folgt

$$f = e \frac{1 - \cos \kappa \ell}{\cos \kappa \ell}.$$

Setzen wir noch  $\kappa = \sqrt{\frac{F}{EI_{yy}}} = \sqrt{\frac{F}{EI_{yy}} \frac{F_k^{(1)}}{F_k^{(1)}}} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{F}{F_k^{(1)}}}$ , so können wir mit den bezogenen

Größen  $\varphi = f/\ell$  und  $\varepsilon = e/\ell$  diese Gleichung auch in die Form

$$\varphi = \varepsilon \frac{1 - \cos \kappa \ell}{\cos \kappa \ell} = \varepsilon \frac{1 - \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_k^{(1)}}}}{\cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_k^{(1)}}}}$$

bringen. Der Abb. 13-10 entnehmen wir, daß der Zusammenhang zwischen der Stabendverschiebung  $f = w(\ell)$  und der Druckkraft  $F$  nicht mehr linear ist, das Superpositionsprinzip gilt hier also nicht mehr. Ist die Lastexzentrizität  $e$  sehr klein, so ergeben sich für Druckkräfte  $0 \leq F < F_k^{(1)}$  auch nur sehr kleine Stabendverschiebungen  $f$ .

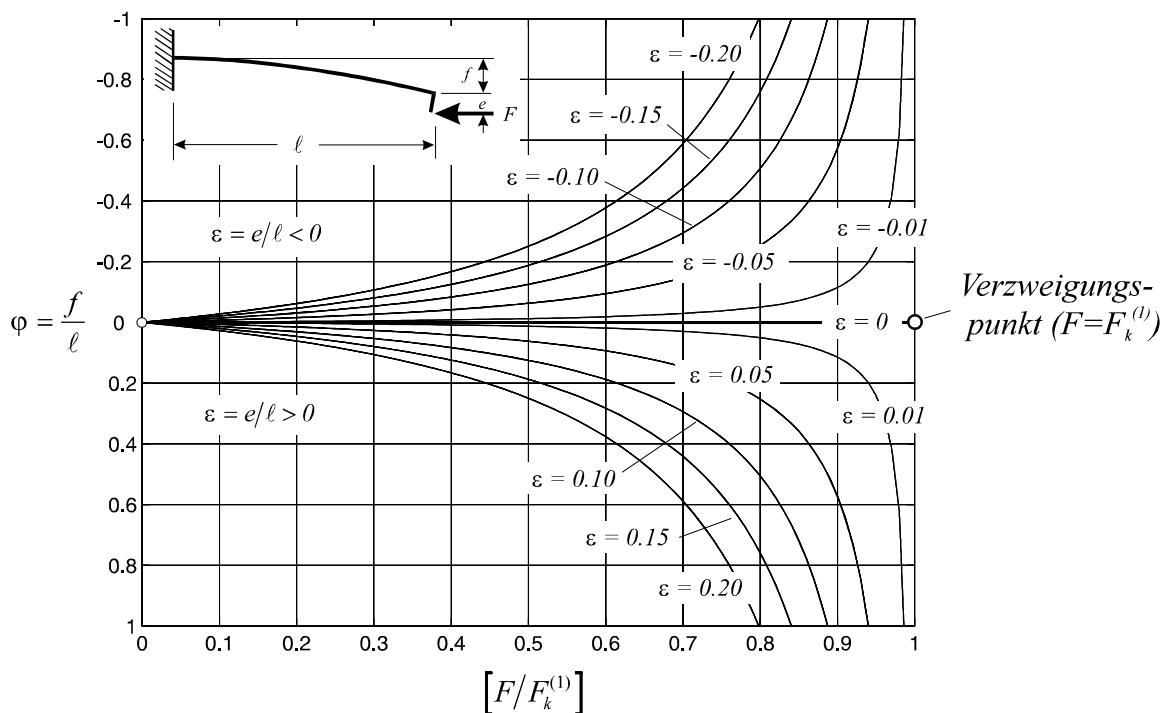


Abb. 13-10 Stabendverschiebung  $f$  in Abhängigkeit von  $F < F_k^{(1)}$

Erst wenn die Druckkraft  $F$  in die Nähe von  $F_k^{(1)}$  kommt, wachsen die Auslenkungen sehr schnell über alle Grenzen. Dies ist der Instabilitätsfall. Der zentrisch gedrückte Stab ( $e = 0$ ) bleibt hingegen gerade. Der Punkt  $F = F_k^{(1)}$  heißt *Verzweigungspunkt*, denn für  $F > F_k^{(1)}$  wechselt das System von einer stabilen in eine indifferente Gleichgewichtslage<sup>1</sup>. Die kleinste Störung der gestreckten Lage würde zu einem sofortigen Ausknicken des Stabes führen.

Hinweis: Werden die Auslenkungen zu groß, so sind die obigen Gleichungen selbstverständlich nicht mehr anwendbar, da dann die getroffenen Voraussetzungen kleiner Verformungen und kleiner 1. Ableitungen der Verformungen nicht mehr erfüllt sind.

### 13.3 Die Eulerschen Knickfälle

Leonhard Euler<sup>2</sup> untersuchte in einer im Jahre 1759 veröffentlichten Arbeit die vier in Abb. 13-11 skizzierten Knickfälle, deren Lösungen analog zum vorherigen Beispiel hergeleitet werden können. Es sind lediglich die unterschiedlichen Randbedingungen zu berücksichtigen. Dabei wird sich zeigen, daß alle Knickfälle in einem engen Zusammenhang stehen.

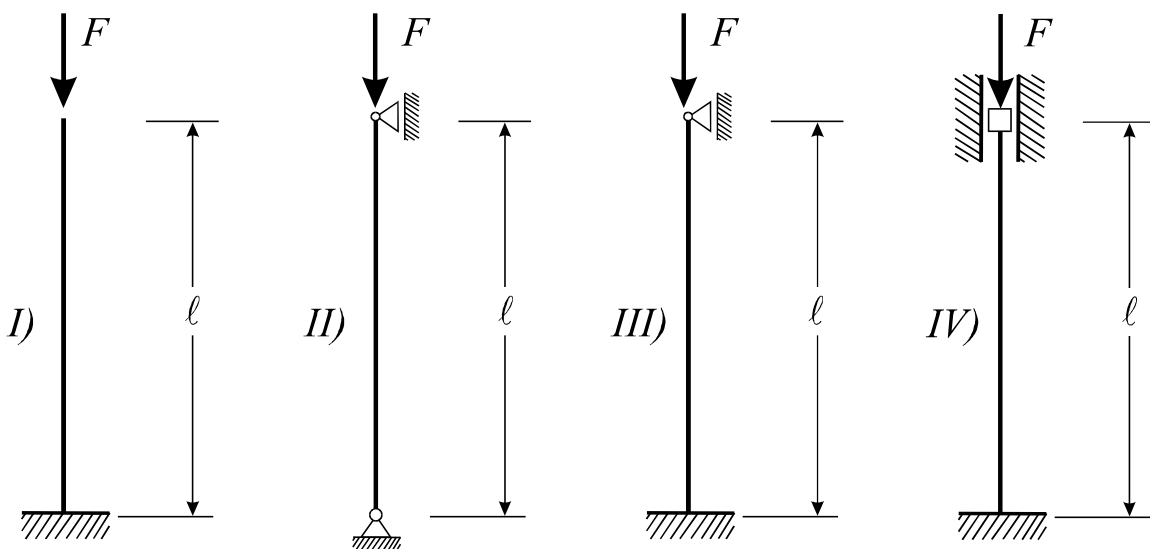


Abb. 13-11 Eulersche Knickfälle

<sup>1</sup> Dieser Beweis wird hier allerdings nicht angetreten.

<sup>2</sup> Leonhard Euler, schweizer. Mathematiker, 1707-1783

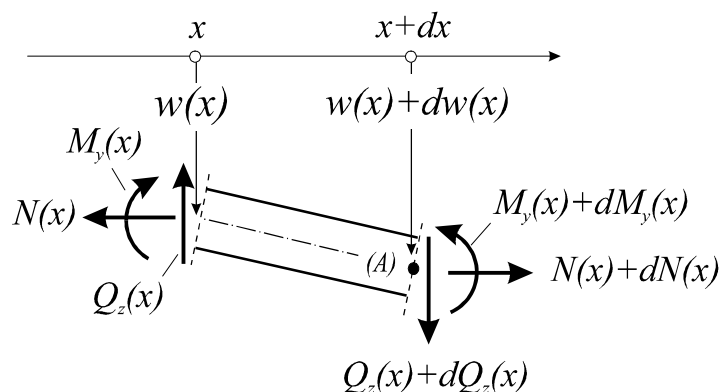


Abb. 13-12 Freischnittskizze für ein Stabelement im ausgelenkten Zustand

Um diesen aufzudecken, leiten wir im folgenden eine allgemeine Differentialgleichung für den Knickstab her, indem wir das lokale Gleichgewicht am verformten Stabelement notieren (Abb. 13-12). Es gelten weiterhin die bei der Balkenbiegung getroffenen Annahmen. Wir unterstellen zusätzlich, daß:

1.  $I_{yy}$  Hauptträgheitsmoment ist,
2. außer der Randbelastung keine längs der  $x$ -Achse verteilten Kräfte auftreten und
3. die Verschiebungen  $u(x)$  in Stablängsrichtung vernachlässigbar klein sind.

Die Gleichgewichtsbedingungen liefern:

$$\begin{array}{lll} \sum F_x = 0 & dN = 0, & \text{also } N' = 0 \\ \sum F_z = 0 & dQ_z = 0, & \text{also } Q_z' = 0 \\ \sum M_y^{(A)} = 0 & dM_y - Q_z dx + N dw = 0, & \text{also } M_y' + Nw' - Q_z = 0 \end{array}$$

Durch Differentiation der 3. Gleichung folgt unter Berücksichtigung von  $N' = Q_z' = 0$ :

$M_y''(x) + Nw''(x) = 0$ , was unter Einbeziehung der Momenten-Krümmungsbeziehung  $M_y = -EI_{yy} w''(x)$  und der Normalkraft  $N = -F$  übergeht in die homogene Differentialgleichung 4. Ordnung

$$\left[ EI_{yy}(x) w''(x) \right]'' + Fw''(x) = 0$$

Bei abschnittsweise konstanter Biegesteifigkeit erhalten wir mit Gl. 13-2 die Differentialgleichung des Knickstabes

$$\boxed{w''''(x) + \kappa^2 w''(x) = 0} \quad \text{Gl. 13-14}$$

Die Lösung dieser homogenen Differentialgleichung lautet

$$\boxed{w(x) = C_1 \sin \kappa x + C_2 \cos \kappa x + C_3 x + C_4} \quad \text{Gl. 13-15}$$

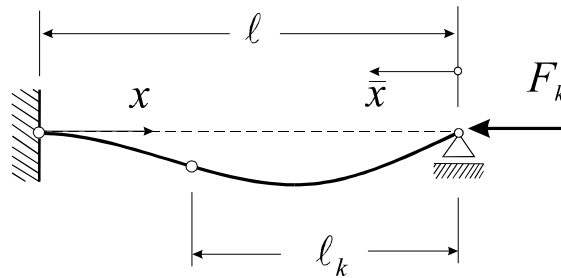


Abb. 13-13 Der 3. Eulerfall

Die Konstanten  $C_1$  bis  $C_4$  werden aus den Randbedingungen bestimmt. Exemplarisch für alle anderen Lagerungsfälle betrachten wir den 3. Eulerfall mit den folgenden Randbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w(l) = 0 \\ w''(l) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{rcccccc} & 0 & + & C_2 & + & 0 & + & C_4 & = & 0 \\ & C_1 \kappa & + & 0 & + & C_3 & + & 0 & = & 0 \\ & C_1 \sin \kappa l & + & C_2 \cos \kappa l & + & C_3 l & + & C_4 & = & 0 \\ & -C_1 \kappa^2 \sin \kappa l & - & C_2 \kappa^2 \cos \kappa l & + & 0 & + & 0 & = & 0 \end{array} \quad \text{Gl. 13-16}$$

Dieses homogene Gleichungssystem zur Bestimmung der Konstanten  $C_1$ - $C_4$  besitzt nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn seine Nennerdeterminante

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \kappa & 0 & 1 & 0 \\ \sin \kappa l & \cos \kappa l & l & 1 \\ -\kappa^2 \sin \kappa l & -\kappa^2 \cos \kappa l & 0 & 0 \end{vmatrix} = \kappa l \cos \kappa l - \sin \kappa l = 0$$

verschwindet, wenn also

$$\boxed{\tan \kappa l = \kappa l} \quad \text{Gl. 13-17}$$

erfüllt ist. Diese transzendente *Eigenwertgleichung* hat unendlich viele Lösungen, die *Eigenwerte* des Problems. Die Lösung der Gl. 13-17 erfolgt mit Näherungsverfahren (z.B. nach Newton). Eine Startlösung kann der Abb. 13-14 entnommen werden.

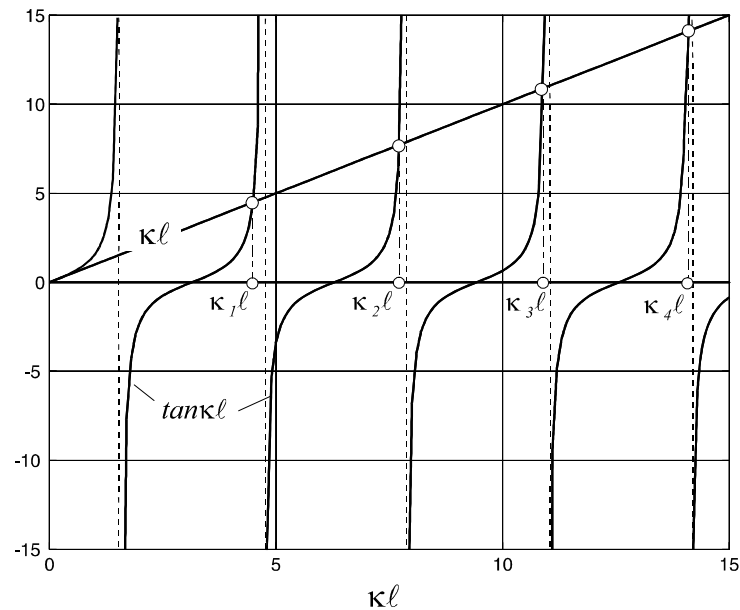


Abb. 13-14 Darstellung der Eigenwertgleichung

Die ersten drei Eigenwerte sind:

$$\kappa_1 \ell = 4,4934$$

$$\kappa_2 \ell = 7,7253$$

$$\kappa_3 \ell = 10,9041$$

Zum ersten Eigenwert gehört die (kleinste) *Knicklast*:  $F_k^{(1)} = \frac{20,2 EI_{yy}}{\ell^2}$ .

Die Knicklasten zu den höheren Eigenwerten werden entsprechend berechnet.

Dem Gleichungssystem Gl. 13-16 entnehmen wir die folgenden Verhältnisse zwischen den Konstanten:  $C_4 = -C_2$ ;  $C_3 = -C_1 \kappa$ ;  $C_2 = -C_1 \tan \kappa \ell$ . Einsetzen in Gl. 13-15 liefert die Form der Knickfigur:

$$w(x) = C_1 [\sin \kappa x + \tan \kappa \ell (1 - \cos \kappa x) - \kappa x]$$

Gl. 13-18

die allerdings nur bis auf eine Konstante (hier  $C_1$ ) festgelegt ist.

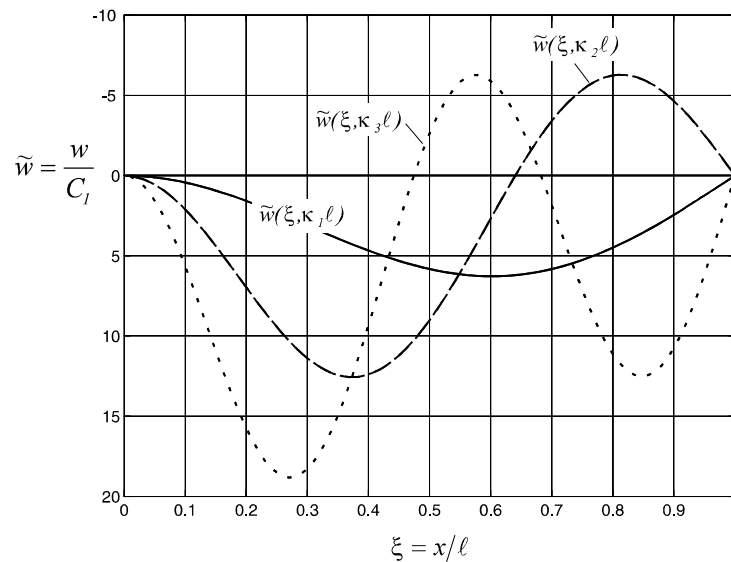


Abb. 13-15 Die drei ersten Knickfiguren für den 3. Eulerfall

Da die verbleibenden Lagerungsfälle in Abb. 13-11 ähnliche Formeln ergeben, ist es sinnvoll, die Knicklasten zu einer einheitlichen Knickformel zusammenzufassen:

$$F_k = \kappa^2 EI_{yy} = \frac{\pi^2 EI_{yy}}{(\pi/\kappa)^2} = \frac{\pi^2 EI_{yy}}{\ell_k^2} \quad \text{mit} \quad \ell_k = \frac{\pi}{\kappa} \quad \text{Gl. 13-19}$$

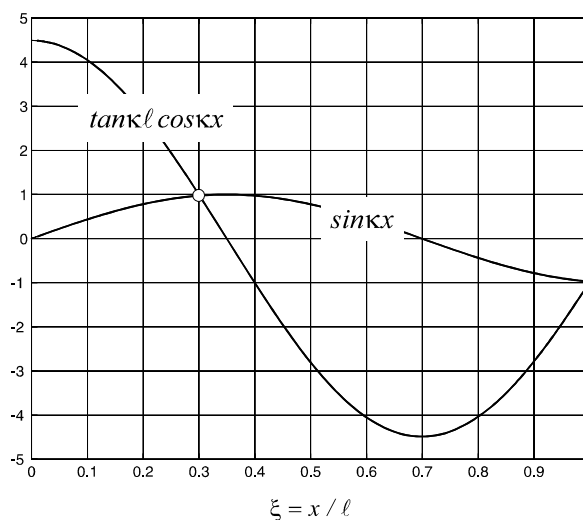


Abb. 13-16 Nullstellen der Krümmung der Knickfigur

In der obigen Gleichung bezeichnet  $\ell_k$  die *Knicklänge* des Stabes. Wir können zeigen, daß die Knicklänge identisch ist mit dem Abstand der Wendepunkte der Knickfigur. Aus (Gl. 13-18) folgt nämlich die Krümmung:

$$w''(x) = -\kappa^2 C_l [\sin \kappa x - \tan \kappa l \cos \kappa x]$$



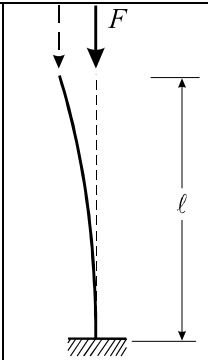
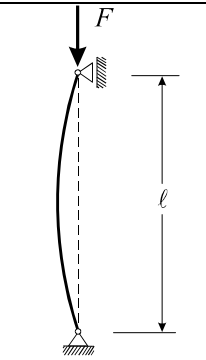
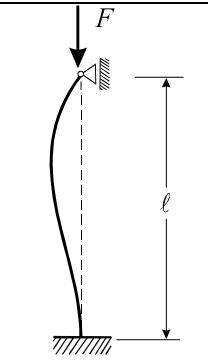
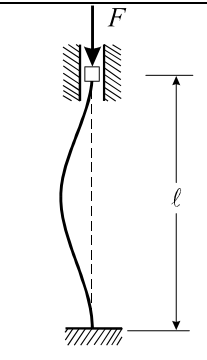
und damit die Bestimmungsgleichung für die Nullstellen

$$w''(x) = 0 = \sin \kappa x - \tan \kappa \ell \cos \kappa x$$

Dieser transzendenten Gleichung entnehmen wir sofort die Lösung  $x = \ell$ . Es existiert jedoch im Bereich  $0 < x < \ell$  noch eine zweite Lösung (Abb. 13-16). Dazu transformieren wir die obige Gleichung mit  $\bar{x} = \ell - x$  auf die vom rechten Rand (Abb. 13-13) zählende Koordinate  $\bar{x}$  und erhalten

$$0 = \sin \kappa(\ell - \bar{x}) - \tan \kappa \ell \cos \kappa(\ell - \bar{x}) = \sin \kappa \bar{x} [\cos \kappa \ell + \tan \kappa \ell \sin \kappa \ell].$$

Für  $\kappa = \kappa_1$  kommt im Bereich  $0 < x < \ell$  aus  $\sin \kappa_1 \bar{x} = 0$  die Nullstelle  $\bar{x} = \pi / \kappa_1 = \ell_k$ . Damit haben die beiden Wendepunkte der Knickfigur zum 1. Eigenwert, wie behauptet, den Abstand  $\ell_k$ .

<i>Euler-Fall</i>	I)	II)	III)	IV)
				
Eigenwertgleichung	$\cos \kappa \ell = 0$	$\sin \kappa \ell = 0$	$\tan \kappa \ell = \kappa \ell$	$\kappa \ell \sin \kappa \ell = 2(1 - \cos \kappa \ell)$
Kleinsten Eigenwert	$\kappa \ell = \frac{\pi}{2}$	$\kappa \ell = \pi$	$\kappa \ell = 4,49$	$\kappa \ell = 2\pi$
Knicklänge $\ell_k$	$2\ell$	$\ell$	$\approx 0,7\ell$	$\frac{\ell}{2}$

**Tabelle 13-1 Grundgleichungen zu den Euler-Fällen**

## 13.4 Das Omega-Verfahren

Aus der kritischen Last  $F_k = \frac{\pi^2 EI_{yy}}{\ell_k^2}$  läßt sich die Eulersche Knickspannung

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 EI_{yy}}{A \ell_k^2} = \frac{\pi^2 E}{\frac{A}{I_{yy}} \ell_k^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\ell_k}{i_y}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Gl. 13-20

ermitteln. Dabei sind

$$i_y = \sqrt{\frac{I_{yy}}{A}} : \text{Trägheitsradius}$$

$$\lambda = \frac{\ell_k}{i_y} : \text{Schlankheitsgrad}$$

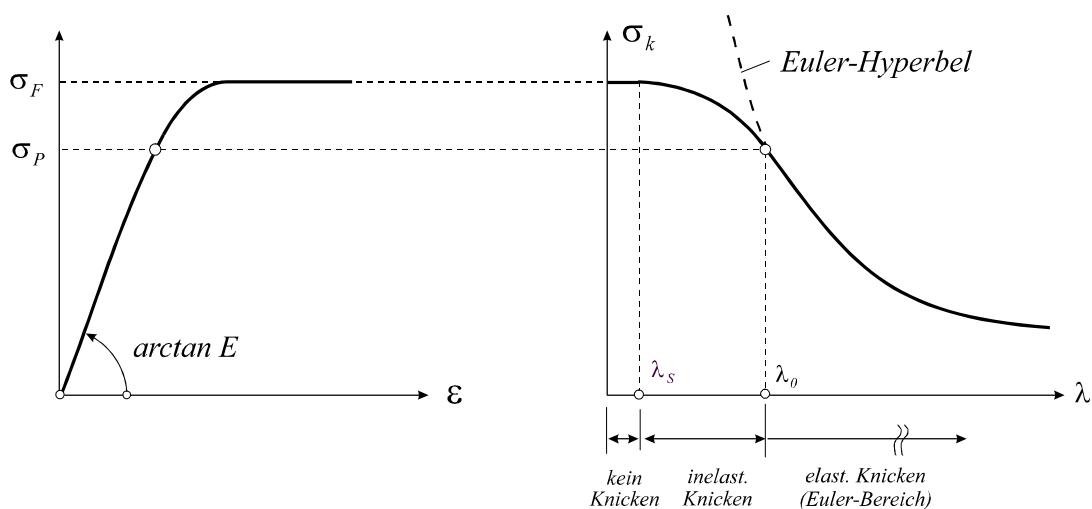


Abb. 13-17 Knickspannung in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad

Die Euler-Hyperbel (Gl. 13-20) gilt nur im Bereich des Hookeschen Gesetzes, d.h. für  $\sigma_k \leq \sigma_p$ . Abb. 13-17 zeigt die Euler-Hyperbel. Theoretisch wächst die Eulersche Knickspannung für  $\lambda \rightarrow 0$  über alle Grenzen, was bei realen Materialien selbstverständlich nicht möglich ist. Für sehr schlanke Stäbe fällt die Knickspannung dagegen auf den Wert Null ab. Aus baupraktischen Gründen wird die Schlankheit  $\lambda$  in Abhängigkeit vom verwendeten Material nach oben begrenzt. Der Schlankheitsgrad  $\lambda$ , bei dem  $\sigma_k = \sigma_p$  ist, wird Grenzschlankheitsgrad  $\lambda_0$  genannt. Er trennt den Bereich des elastischen Knickens ( $\lambda > \lambda_0$ )

vom Bereich des inelastischen Knickens ( $\lambda \leq \lambda_0$ ). Setzen wir für die im Stahlbau verwendeten Stähle  $E = 210000 \text{ N/mm}^2$  und  $\sigma_k = \sigma_p \approx 0,8\sigma_F$ , dann erhalten wir durch einfache Umstellung der Gl. 13-20

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \sqrt{\frac{E}{0,8\sigma_F}}$$

und mit den vorgeschriebenen Fließgrenzen

$$\sigma_F^{St37} = 240 \text{ N/mm}^2 \rightarrow \lambda_0^{St37} = \pi \sqrt{\frac{210000}{0,8 \cdot 240}} = 103,9 \approx 104$$

$$\sigma_F^{St52} = 360 \text{ N/mm}^2 \rightarrow \lambda_0^{St52} = \pi \sqrt{\frac{210000}{0,8 \cdot 360}} = 84,8 \approx 85$$

Für den inelastischen Bereich gilt die für praktische Berechnungen aus Versuchen von *Tetmajer*<sup>1</sup> ermittelten Gleichung

$$\boxed{\sigma_k = a - b\lambda + c\lambda^2} \quad \text{Gl. 13-21}$$

mit werkstoffabhängigen Werten  $a$ ,  $b$  und  $c$ . Für sehr geringe Schlankheiten, d.h. bei sehr gedrungenen Querschnitten, tritt kein Knicken auf. Das Material wird unter entsprechend hohen Spannungen zerquetscht. Hier gilt konstant  $\sigma_k = \sigma_F$ . Im Stahlbau wird diese Grenze z.B. bei  $\lambda = 20$  gesetzt.

Hinweis: Im Stahlbau wird die Berechnung der planmäßig mittig gedrückten Stäbe durch das *Omega-Verfahren*<sup>2</sup> ersetzt. Für  $v$ -fache Knicksicherheit gilt:

$$\sigma_d \leq \frac{\sigma_k}{v} = \frac{\sigma_k}{v} \frac{zul\sigma_d}{zul\sigma_d} = \frac{zul\sigma_d}{v \frac{zul\sigma_d}{\sigma_k}} = \frac{zul\sigma_d}{\omega}$$

Der Stabilitätsnachweis wird dann mit

$$\boxed{\omega\sigma_d \leq zul\sigma_d} \quad \text{Gl. 13-22}$$

formal wie ein Spannungsnachweis geführt. Die Knickzahlen  $\omega$  können in Abhängigkeit vom verwendeten Material Tabellen der entsprechenden Ingenieurliteratur entnommen werden.

<sup>1</sup> Ludwig von Tetmajer, 1850-1905

<sup>2</sup> s.h. DIN 4114