

**Friedrich U. Mathiak**

---

# **Technische Mechanik I**

*Grundlagen der Statik*

---

**Technische Mechanik I**  
*Grundlagen der Statik*

Copyright Neubrandenburg 2000 / Friedrich U. Mathiak

Der Nachdruck oder das Kopieren dieses Skriptes ist auch auszugsweise nur mit Genehmigung des Autors erlaubt.

1. Auflage Neubrandenburg 1998
2. Auflage Neubrandenburg 2000

Fachhochschule Neubrandenburg

Prof. Dr.-Ing. Friedrich U. Mathiak

Fachbereich:  
Bauingenieur- und Vermessungswesen

Postanschrift:

Brodaer Straße 2  
**D-17033 Neubrandenburg**

Tel.: (0395) 5693-(0)-301

<b>1</b>	<b>EINFÜHRUNG</b>	<b>1</b>
1.1	Aufgaben der Mechanik	1
1.1.1	Einige historische Bemerkungen	3
1.2	Grundlagen der Mechanik	9
1.2.1	Physikalische Größen	9
1.2.2	Das Internationale Einheitensystem (SI)	9
1.3	Begriffe der Mechanik	15
1.3.1	Der Körper	16
1.3.2	Tragwerksformen	22
1.3.3	Bewegungen	24
<b>2</b>	<b>ALLGEMEINE EINFÜHRUNG DES KRAFTBEGRIFFS</b>	<b>27</b>
2.1	Einteilung der Kräfte	29
2.1.1	Räumlich verteilte Kräfte	29
2.1.2	Flächenhaft verteilte Kräfte	31
2.1.3	Linienhaft verteilte Kräfte	32
2.1.4	Einzelkräfte	32
2.1.5	Eingeprägte Kräfte	33
2.1.6	Reaktionskräfte, das Befreiungsprinzip	34
2.1.7	Äußere Kräfte	34
2.1.8	Innere Kräfte, das Schnittprinzip	35
2.2	Gravitation und Schwerkraft	36
2.3	Federkräfte elastischer Federn	39
<b>3</b>	<b>ZENTRALE KRÄFTESYSTEME</b>	<b>41</b>
3.1	Definitionen	41
3.2	Zentrale, ebene Kräftesysteme	42
3.3	Zentrale, räumliche Kräftesysteme	50
<b>4</b>	<b>ALLGEMEINE KRÄFTESYSTEME AM STARREN KÖRPER</b>	<b>55</b>
4.1	Definition	55
4.2	Allgemeine ebene Kräftesysteme am starren Körper	56
4.2.1	Parallele Kräfte mit gleicher Wirkungslinie	56
4.2.2	Nicht parallele Kräfte	57
4.2.3	Gleichgerichtete parallele Kräfte mit nicht gleicher Wirkungslinie	58
4.2.4	Nicht sämtlich gleichgerichtete parallele Kräfte mit nicht gleicher Wirkungslinie	60
4.2.5	Analytische Reduktion eines allgemeinen ebenen Kräftesystems	61
4.2.6	Das Seileck	65
4.2.7	Das Kräftepaar	67
4.3	Allgemeine räumliche Kräftesysteme am starren Körper	71
4.3.1	Das Versetzungsmoment	71
4.3.2	Das Moment einer Kraft bezogen auf einen Punkt	71
4.3.3	Das Moment einer Kraft bezogen auf eine Achse	73
4.3.4	Reduktion eines räumlichen Kräftesystems	74
4.3.5	Die Kraftschraube oder Dyname	76
4.3.6	Reduktion kontinuierlich verteilter Kräfte	79
4.4	Gleichgewichtsbedingungen	83
<b>5</b>	<b>PHYSIKALISCHE UND GEOMETRISCHE GRÖßEN VON KÖRPERN, FLÄCHEN UND LINIEN</b>	<b>89</b>
5.1	Allgemeines	89
5.2	Momente 0-ten Grades, Volumen, Masse und Gewicht eines Körpers	90
5.3	Momente 1-ten Grades, Schwerpunkt und Massenmittelpunkt eines Körpers	91
5.4	Schwerpunkt und Mittelpunkt einer Fläche	99
5.5	Schwerpunkt und Mittelpunkt einer Linie	105
5.6	Die Regeln von Guldin	108
5.7	Flächenmomente 2. Grades, Flächenträgheitsmomente und das Flächendeviationsmoment	110
5.7.1	Sätze über Flächenmomente 2. Grades	113
5.7.2	Hauptflächenträgheitsmomente	117
5.7.3	Dünnwandige Querschnitte	121

<b>6</b>	<b>SPANNUNGEN</b>	<b>125</b>
6.1	Allgemeines	125
6.2	Der Spannungszustand in einer beliebig gerichteten Schnittfläche	128
6.3	Die statische Grundgleichung	130
6.4	Der Satz von den zugeordneten Schubspannungen	133
6.5	Der ebene Spannungszustand	134
6.5.1	Transformationsgleichungen des ebenen Spannungszustandes	137
6.1.2	Hauptspannungen	138
6.6	Der einachsige Spannungszustand	141
6.7	Der Mohrsche Spannungskreis für den ebenen Spannungszustand	143
<b>7</b>	<b>VERSCHIEBUNGEN UND VERZERRUNGEN</b>	<b>151</b>
7.1	Die Verschiebungen	151
7.2	Der Verzerrungszustand	153
7.2.1	Dehnungen	153
7.2.2	Die Gleitungen	155
7.2.3	Hauptdehnungen	159
<b>8</b>	<b>MATERIALGESETZE</b>	<b>163</b>
8.1	Allgemeines	163
8.2	Das Elastizitätsgesetz für den ebenen Spannungszustand	174
8.3	Das Elastizitätsgesetz für den ebenen Verzerrungszustand	175
8.4	Das Prinzip von de Saint-Venant	177
<b>9</b>	<b>DIE STATIK DER STARREN KÖRPER</b>	<b>179</b>
9.1	Allgemeines	179
9.2	Lager	180
9.3	Der statisch und kinematisch bestimmt gelagerte Körper	184
9.4	Berechnung von Auflagerreaktionskräften	186
9.5	Zusammengesetzte Systeme starrer Körper	191
<b>10</b>	<b>SCHNITTLASTEN EINES BALKENS</b>	<b>197</b>
10.1	Schnittlastenermittlung am Träger auf zwei Stützen	204
10.1.1	Der Träger auf zwei Stützen unter einer Einzelkraft $F_z$	204
10.1.2	Der Träger auf zwei Stützen unter einer Einzelkraft $F_x$	207
10.1.3	Der Träger auf zwei Stützen unter einem Einzelmoment $M_y$	208
10.1.4	Der Träger auf zwei Stützen unter Linienlast $q(x)$	210
10.1.5	Die Randwerte der Schnittlasten	213
10.1.5.1	Freier Rand	214
10.1.5.2	Gleitlager	214
10.1.5.3	Festlager	215
10.1.5.4	Einspannung	216
10.2	Zusammenhang zwischen Schnittlasten und äußerer Belastung, die Schnittlastendifferentialgleichungen	217
10.2.1	Integration der Differentialgleichungen	219
<b>11</b>	<b>EBENE FACHWERKE</b>	<b>223</b>
11.1	Statisch bestimmte Fachwerke	224
11.2	Statisch unbestimmte Fachwerke	226
11.3	Ermittlung der Stabkräfte für statisch bestimmte Fachwerke	227
11.3.1	Das Knotenschnittverfahren	227
11.3.2	Die Rittersche Schnittmethode	229
<b>12</b>	<b>WIDERSTANDSKRÄFTE</b>	<b>233</b>
12.1	Haftung	233
12.2	Gleitreibung	236
12.3	Viskose Dämpfung	237
12.4	Luftwiderstand	238
12.5	Seilreibung	238
<b>A</b>	<b>Anhang Tabellen</b>	<b>243</b>

# 8 Materialgesetze

## 8.1 Allgemeines

Nach der Einführung der beiden Begriffe *Spannungen* und *Verzerrungen* sind zwischen beiden Definition Beziehungen herzustellen, die vom verwendeten Material abhängen. Die Gleichungen, die die Verzerrungen und die Spannungen miteinander verknüpfen, werden *Materialgleichungen* oder auch *Stoffgleichungen* genannt. Zur Bestimmung der in den Stoffgleichungen auftretenden *Werkstoffkennwerte* werden Experimente benötigt. Im einfachsten Fall, und auf den werden wir uns hier beschränken, bestehen die Werkstoffkennwerte aus Konstanten. Ein wichtiger Versuch zur Bestimmung des Werkstoffverhaltens ist der einachsige Zug- oder Druckversuch. Zur Durchführung des Zugversuches<sup>1</sup> wird ein genormter Prüfkörper (etwa nach Abb. 8-1) aus dem betreffenden Werkstoff hergestellt und dann über Spannvorrichtungen (Spannköpfe) in eine Zugprüfmaschine eingespannt.

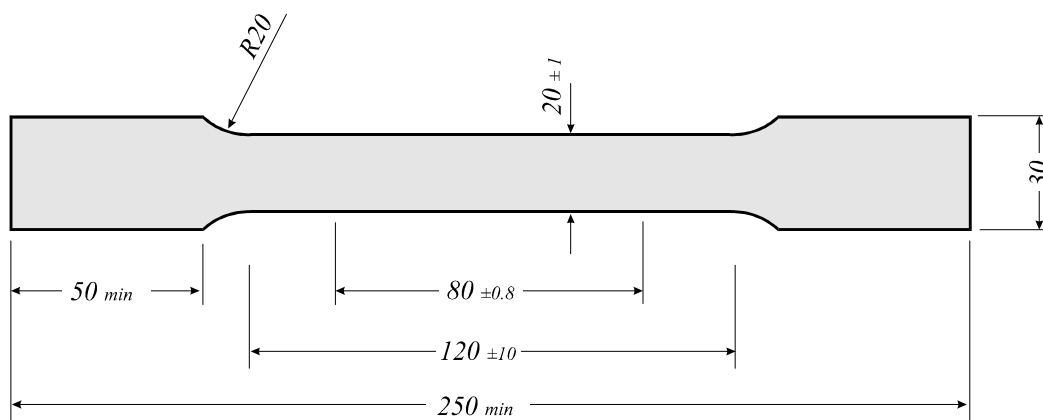


Abb. 8-1 Große ISO Flachzugprobe nach DIN 50114 (Maße in mm)

Durch die Relativverschiebung der Spannköpfe wird in die Probe mit der Referenzlänge  $\ell_0$  eine Zugkraft  $N$  eingeleitet, die zu einer Längenänderung  $\Delta \ell$  führt. Durch Meßeinrichtungen werden die aktuelle Zugkraft und die im Meßbereich der Probe auftretende Verlängerung kontinuierlich gemessen und bei Bedarf in einer *Kraft-Verlängerungskurve* grafisch

ausgegeben. Werden durch die Prüfeinrichtung die Kraft  $N$  sofort auf die Querschnittsfläche  $A_0$  und die Längenänderung  $\Delta l$  auf die Referenzlänge  $l_0$  bezogen, dann liegt das Versuchsergebnis mit

$$\text{der Ingenieurspannung: } \sigma = \frac{N}{A_0} \text{ und}$$

$$\text{der Ingenieurdehnung: } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

als Spannungs-Dehnungsdiagramm ( $\sigma - \varepsilon$ -Diagramm) vor, aus dem gewisse Werkstoffkennwerte abgelesen werden können. Die genormten Probenformen sind so gestaltet, daß bei sachgemäßer Versuchsdurchführung im gesamten Meßbereich homogene Kraft- und Verformungszustände zu erwarten sind.

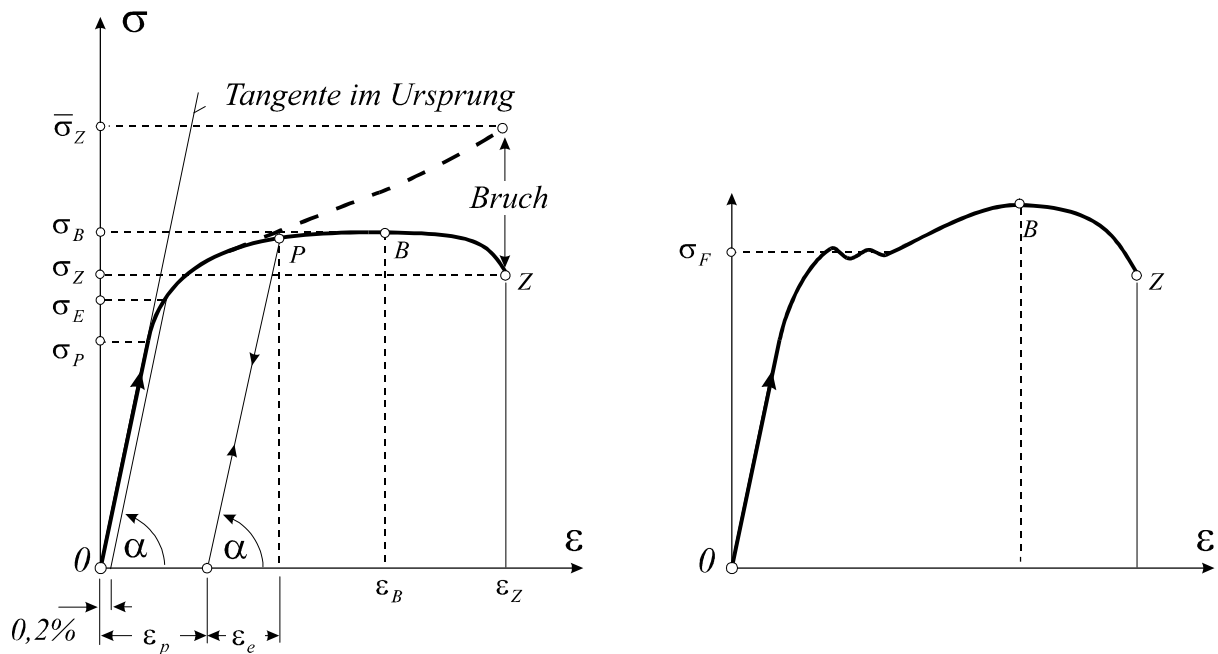


Abb. 8-2 Der einachsige Zugversuch, metallische Werkstoffe

Abb. 8-2 zeigen das Spannungs-Dehnungsverhalten metallischer Werkstoffe. Diese Kurven weisen folgende charakteristische Punkte auf, die bedeutsam sind für die Klassifizierung des Materials.

### 1. Die Proportionalitätsgrenze $\sigma_p$

Der lineare Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen endet bei Erreichen der Proportionalitätsgrenze  $\sigma_p$ . Wird die Probe entlastet, dann bilden sich die Verformungen vollständig zurück, sofern  $\sigma \leq \sigma_p$ .

<sup>1</sup> s.h. DIN 50145

## 2. Die Elastizitätsgrenze $\sigma_E$

Sie stellt eine praktische Grenze des elastischen Bereichs dar. Um diesen Punkt zu finden, muß die Probe jedoch geringfügig plastisch verformt werden. Die Festlegung der Elastizitätsgrenze ist demnach eine Frage der Meßgenauigkeit und der Konvention. Es ist üblich, die Grenze für den elastischen Bereich bei einer bleibenden Dehnung von 0,2% festzulegen und nennt diese dann  $\sigma_{0,2}$ -Grenze. Wird eine Zugprobe über die Elastizitätsgrenze hinaus bis beispielsweise zum Punkt  $P$  belastet, so verbleibt bei der Entlastung eine bleibende oder plastische Dehnung  $\varepsilon_p$ . Die Entlastungslinie verläuft dabei praktisch parallel zur Tangente an die  $\sigma - \varepsilon$ -Kurve durch den Ursprung.

## 3. Die Streck- oder Fließgrenze $\sigma_F$

Einige metallische Werkstoffe (z.B. St 37) besitzen eine ausgeprägte *Streckgrenze*. Bei Erreichen der (Zug-) Fließgrenze  $\sigma_F$  setzt plastisches Fließen ein. Die Probe verändert dabei ihr Aussehen, blanke Proben werden matt. Bei spröden Materialien führt eine Laststeigerung dann recht schnell zum Bruch. Beim Werkstoff Stahl lassen sich die Dehnungen noch erhöhen, ohne daß eine nennenswerte Krafterhöhung erforderlich ist.

## 4. Die Bruchgrenze $\sigma_B$

Nach Überschreiten der Fließgrenze läßt sich die Spannung weiter erhöhen. Die Probe *verfestigt* gewissermaßen bis zum Höchstwert  $\sigma_B$ , denn betrachten wir z.B. den Punkt  $P$ , dann zeigt eine Entlastung und sofortige Wiederbelastung, daß sich die Proportionalitätsgrenze  $\sigma_p$  offensichtlich erhöht hat, nämlich auf das Spannungsniveau am Punkt  $P$ . Wird über die Bruchgrenze hinaus weiter belastet, dann beginnt der Querschnitt einzuschnüren. Das Material beginnt instabil zu werden, bis schließlich bei der Bruchspannung  $\sigma_z$  der Bruch der Probe erfolgt. Die Bruchspannung  $\sigma_z$  hat praktisch keine Bedeutung.

Hinweis: Wird die Kraft  $N$  nicht auf die konstante Ausgangsfläche  $A_0$ , sondern auf die vom Verformungszustand abhängige aktuelle Fläche  $A$  bezogen, dann ergibt sich der in der linken Grafik der Abb. 8-2 gestrichelt dargestellte Verlauf der Spannungsdehnungskurve.

Für die folgenden Untersuchungen beschränken wir uns auf den einfachsten Fall der *homogenen linear-elastischen isotropen* Stoffe. Dabei bedeuten im einzelnen

**homogen:** daß das Material überall dieselben, vom Ort unabhängigen Materialkonstanten besitzt

**linear-elastisch:** daß zwischen den Verzerrungen und den Spannungen ein linearer Zusammenhang besteht und

**isotrop:** daß die Richtungen der Hauptspannungen und Hauptverzerrungen zusammenfallen sollen und gleiche Hauptspannungen bei beliebig gedrehtem Material zu gleichen Dehnungen führt.

Der einfachste Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen ist linear, d.h. von der Form:

$$\sigma \approx \varepsilon$$

Um die obige Gleichung zu konkretisieren, betrachten wir den einachsigen Zugversuch nach Abb. 8-3 für den gilt:

$$\sigma_{\xi\xi} = E \frac{\bar{l}_{\xi} - l_{\xi}}{l_{\xi}} = E \varepsilon_{\xi\xi} \quad \text{Gl. 8-1}$$

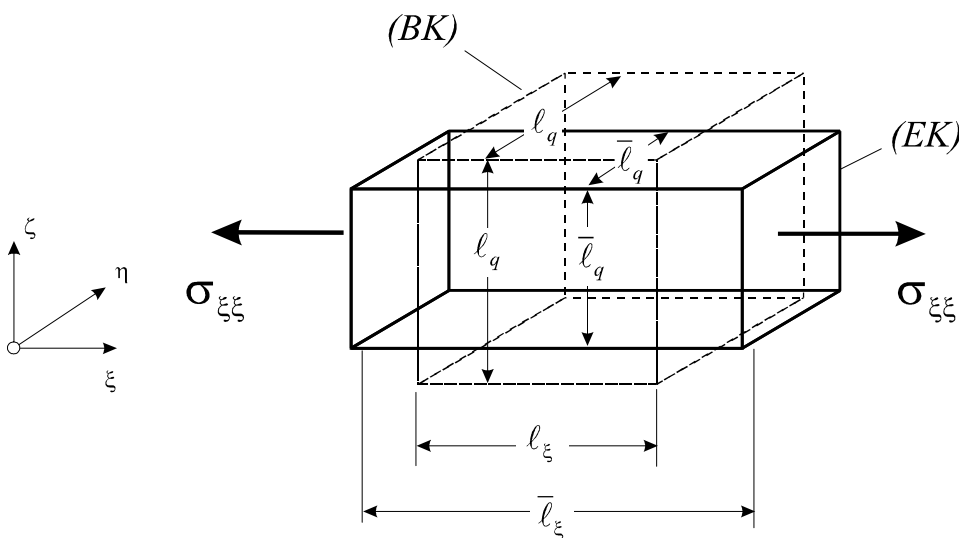


Abb. 8-3 Einachsiger Zugversuch

Die Konstante  $E$  heißt *Elastizitätsmodul*. Der Elastizitätsmodul ist ein Maß für den Widerstand des Materials gegen Normalspannungsbeanspruchung. Je größer  $E$  ist, um so kleiner werden die Dehnungen oder Stauchungen bei einer vorgegebenen Spannung. Der  $E$ -Modul



kann unterhalb der Proportionalitätsgrenze wegen der dort gültigen Beziehung  $\frac{\sigma}{\varepsilon} = \tan \alpha = E$  der Spannungs-Dehnungskurve entnommen werden.

$$[E] = \frac{\text{Masse}}{\text{Länge} \cdot (\text{Zeit})^2}; \quad \text{Einheit } \text{kgm}^{-1} \text{s}^{-2} = \text{N/m}^2$$

$$0 \leq E \leq \infty$$

Gl. 8-2

Die Erfahrung zeigt allerdings auch, daß die Normalspannung  $\sigma_{\xi\xi}$  Dehnungen in Richtung  $\eta$  und  $\zeta$  hervorruft (Abb. 8-3). Zugspannungen in  $\xi$ -Richtungen verkürzen das Element in  $\eta$ - und  $\zeta$ -Richtung:

$$\frac{\Delta l_q}{l_q} = \frac{\bar{l}_q - l_q}{l_q} = \varepsilon_{\eta\eta} = \varepsilon_{\zeta\zeta} = -\nu \frac{\Delta l_\xi}{l_\xi} = -\nu \varepsilon_{\xi\xi}$$

Gl. 8-3

Die positive Konstante  $\nu$  wird *Querkontraktionszahl* genannt. Damit ist neben dem Elastizitätsmodul  $E$  eine zweite Konstante eingeführt.

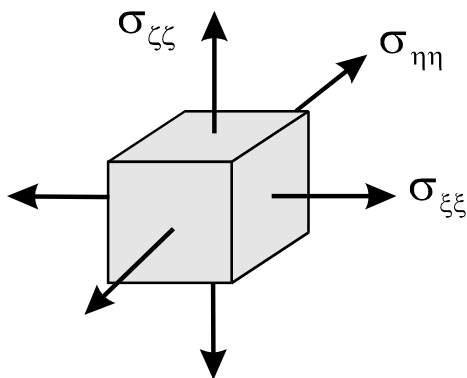


Abb. 8-4 Hauptspannungsbeanspruchung

Verallgemeinern wir die obigen Betrachtungen auf den räumlichen Fall mit reiner Hauptnormalspannungsbeanspruchung, dann ist die folgende Darstellung sinnvoll:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{1}{E} \sigma_{\xi\xi} - \nu \frac{1}{E} \sigma_{\eta\eta} - \nu \frac{1}{E} \sigma_{\zeta\zeta} \\ &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_{\xi\xi} - \nu (\sigma_{\eta\eta} + \sigma_{\zeta\zeta}) \right] \end{aligned}$$

Experimentelle Ergebnisse zeigen, daß die Normalspannungen am Element nur Dehnungen und Schubspannungen nur Gleitungen hervorrufen. Wegen der vorausgesetzten Isotropie gibt es keine bevorzugten Richtungen und es kann insgesamt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_{\xi\xi} - \nu(\sigma_{\eta\eta} + \sigma_{\zeta\zeta}) \right] = \frac{1+\nu}{E} \left[ \sigma_{\xi\xi} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right] \\
 \varepsilon_{\eta\eta} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_{\eta\eta} - \nu(\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\zeta\zeta}) \right] = \frac{1+\nu}{E} \left[ \sigma_{\eta\eta} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right] \\
 \varepsilon_{\zeta\zeta} &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_{\zeta\zeta} - \nu(\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta}) \right] = \frac{1+\nu}{E} \left[ \sigma_{\zeta\zeta} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right]
 \end{aligned}
 \tag{Gl. 8-4}$$

In der rechts stehenden Darstellung der obigen Gleichung wurde mit

$$\sigma = \sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} + \sigma_{\zeta\zeta}
 \tag{Gl. 8-5}$$

die koordinateninvariante *Spannungssumme*<sup>1</sup> eingeführt. Die beiden letzten Beziehungen in Gl. 8-4 erhalten wir durch einfache Vertauschung der Hauptachsrichtungen. Um eine Abschätzung für die Querkontraktionszahl  $\nu$  zu erhalten, berechnen wir unter Beachtung von Gl. 8-4 die Volumendehnung:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\xi\xi} + \varepsilon_{\eta\eta} + \varepsilon_{\zeta\zeta} = \frac{1+\nu}{E} \left[ \sigma - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right] = \frac{1-2\nu}{E} \sigma = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} + \sigma_{\zeta\zeta})$$

Erfahrungsgemäß bewirken positive Längsspannungen stets eine Volumenvergrößerung, so daß die Querkontraktionszahl  $\nu$  (positive Werte vorausgesetzt) die Werte

$$0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}
 \tag{Gl. 8-6}$$

annehmen kann. Der Wert  $\nu = 1/2$  bedeutet Volumenkonstanz, während für Baustahl und die meisten metallischen Werkstoffe etwa  $\nu = 1/3$  angesetzt werden kann.

Wird der Körper um  $T$  Kelvin gegenüber einer beliebigen Ausgangstemperatur erwärmt, so vergrößert sich jede beliebige Länge  $\ell$  des Körpers um das Maß  $\Delta \ell = \ell \alpha_T T$ , wobei  $\alpha_T$  den *linearen Temperatureausdehnungskoeffizienten* bedeutet. Zu jeder beliebigen Richtung ergibt sich dann zusätzlich eine *Temperaturdehnung*, was zu den Gesamtdehnungen

<sup>1</sup> die auch die Spur des Spannungstensors genannt wird

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{1+\nu}{E} \left( \sigma_{\xi\xi} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right) + \alpha_T T \\
 \varepsilon_{\eta\eta} &= \frac{1+\nu}{E} \left( \sigma_{\eta\eta} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right) + \alpha_T T \\
 \varepsilon_{\zeta\zeta} &= \frac{1+\nu}{E} \left( \sigma_{\zeta\zeta} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right) + \alpha_T T
 \end{aligned}
 \tag{Gl. 8-7}$$

führt. Im nächsten Schritt verallgemeinern wir unsere Ergebnisse aus Gl. 8-7 auf Elementorientierungen, die nicht den Richtungen der Hauptachsen entsprechen. Wir benutzen dazu die getroffene Voraussetzung, daß Spannungs- und Verzerrungstensor gleiche Hauptachsenrichtungen besitzen sollen. Aus Gründen der Vereinfachung behandeln wir zunächst nur das ebene Problem und verallgemeinern dann auf den räumlichen Fall. Von Gl. 8-7 verbleiben für den isothermen Fall ( $T = 0$ )

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\xi\xi} &= \frac{1+\nu}{E} \left( \sigma_{\xi\xi} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right) \\
 \varepsilon_{\eta\eta} &= \frac{1+\nu}{E} \left( \sigma_{\eta\eta} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right)
 \end{aligned}
 \tag{Gl. 8-8}$$

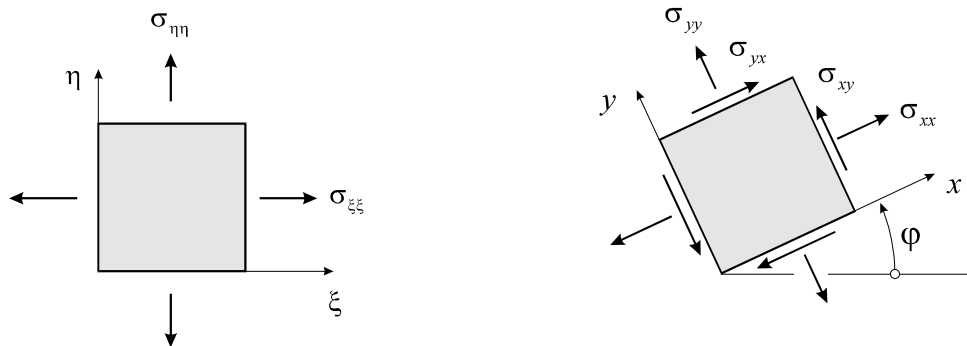


Abb. 8-5 Transformation des Hauptspannungszustandes

Die Drehung des Hauptspannungszustandes um den Winkel  $\varphi$  wird durch die folgende Transformationsgleichungen beschrieben ( $\sigma_{\xi\eta} = 0$ )

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta}}{2} + \frac{\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta}}{2} \cos 2\varphi \\
 \sigma_{yy} &= \frac{\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta}}{2} - \frac{\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta}}{2} \cos 2\varphi \\
 \sigma_{xy} &= -\frac{\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta}}{2} \sin 2\varphi
 \end{aligned}
 \tag{Gl. 8-9}$$

und analog für die Verzerrungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\varepsilon_{\xi\xi} + \varepsilon_{\eta\eta}}{2} + \frac{\varepsilon_{\xi\xi} - \varepsilon_{\eta\eta}}{2} \cos 2\varphi \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\varepsilon_{\xi\xi} + \varepsilon_{\eta\eta}}{2} - \frac{\varepsilon_{\xi\xi} - \varepsilon_{\eta\eta}}{2} \cos 2\varphi \\ \varepsilon_{xy} &= -\frac{\varepsilon_{\xi\xi} - \varepsilon_{\eta\eta}}{2} \sin 2\varphi \end{aligned}$$

Gl. 8-10

Mit  $\varepsilon_{\xi\xi} + \varepsilon_{\eta\eta} = \varepsilon = \frac{1-\nu}{E} \sigma$  und  $\varepsilon_{\xi\xi} - \varepsilon_{\eta\eta} = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta})$  folgt dann

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\varepsilon_{\xi\xi} + \varepsilon_{\eta\eta}}{2} + \frac{\varepsilon_{\xi\xi} - \varepsilon_{\eta\eta}}{2} \cos 2\varphi = \frac{1}{E} \left[ \frac{1-\nu}{2} \sigma + \frac{1+\nu}{2} (\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta}) \cos 2\varphi \right]$$

und umsortiert

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left[ \underbrace{\frac{\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta}}{2} + \frac{\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta}}{2} \cos 2\varphi}_{=\sigma_{xx}} - \nu \underbrace{\left( \frac{\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta}}{2} - \frac{\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta}}{2} \cos 2\varphi \right)}_{=\sigma_{yy}} \right]$$

Ein Vergleich mit Gl. 8-9 zeigt

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy})$$

Verallgemeinern wir dieses Ergebnis auf den räumlichen Fall, so erhalten wir unter Einbeziehung der Temperaturterme

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha_T T = \frac{1+\nu}{E} \left[ \sigma_{xx} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right] + \alpha_T T \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] + \alpha_T T = \frac{1+\nu}{E} \left[ \sigma_{yy} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right] + \alpha_T T \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha_T T = \frac{1+\nu}{E} \left[ \sigma_{zz} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right] + \alpha_T T \end{aligned}$$

Gl. 8-11

Aus Gl. 8-11 folgt übrigens für die *Dehnungssumme*<sup>1</sup>

$$\boxed{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon = \frac{1-2\nu}{E} \sigma + 3\alpha_T T} \quad \text{Gl. 8-12}$$

Ein entsprechende Rechnung für die Gleitungen liefert:

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{\varepsilon_{\xi\xi} - \varepsilon_{\eta\eta}}{2} \sin 2\varphi = -\frac{1+\nu}{E} \frac{\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta}}{2} \sin 2\varphi = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} = \frac{1}{2G} \sigma_{xy}$$

wobei zur Abkürzung der *Schubmodul*

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \quad \text{Gl. 8-13}$$

eingeführt wurde, der allerdings keine neue Materialkonstante darstellt, da er sich durch  $E$  und  $\nu$  ausdrücken läßt. Die Dimension des Schubmoduls ist

$$[G] = \frac{\text{Masse}}{\text{Länge} \cdot (\text{Zeit})^2}; \quad \text{Einheit} \quad \text{kgm}^{-1} \text{s}^{-2} = \text{N} / \text{m}^2$$

und es gilt wegen Gl. 8-2 und Gl. 8-6

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \leq G \leq \infty \\ \frac{E}{3} \leq G \leq \frac{E}{2} \end{array}} \quad \text{Gl. 8-14}$$

Hinweis: Der lineare Zusammenhang zwischen den Dehnungen und den Normalspannungen einerseits sowie zwischen den Gleitungen und den Schubspannungen andererseits wird nach Hooke<sup>2</sup> als *Hookesches Gesetz* bezeichnet. Hooke fand dieses Gesetz empirisch und veröffentlichte seine Ergebnisse im Jahre 1678.

Auflösung der Verzerrungs-Spannungs-Relationen nach den Spannungen liefert:

<sup>1</sup> die auch Spur des Verzerrungstensors genannt wird

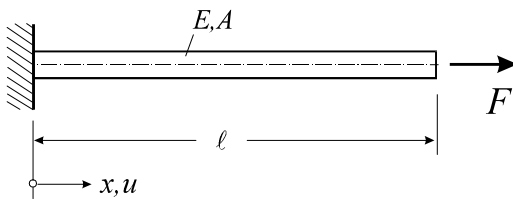
<sup>2</sup> Robert Hooke, engl. Naturforscher, 1635-1703

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T T \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T T \right] \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1+\nu} \left[ \varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T T \right] \end{aligned} \quad \text{Gl. 8-15}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xz} \\ \sigma_{yz} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad \text{Gl. 8-16}$$



**Beispiel 8-1:**



**Abb. 8-6 Der Zugstab**

Der Zugstab der Länge  $\ell$  mit der Querschnittsfläche  $A$  und dem Elastizitätsmodul  $E$  wird am Stabende durch eine Einzellast  $F$  belastet. Gesucht werden die Spannung und die Dehnung längs der Stabachse. Wie groß ist die Verschiebung  $\Delta\ell = u(x = \ell)$  am Stabende?

Geg.:  $E, A, \ell$

Aufgrund der Geometrie und der Belastung unterstellen wir im Stab einen einachsigen Spannungszustand mit

$\sigma_{xx} = \frac{F}{A}$ ;  $\sigma_{yy} = 0$ ;  $\sigma_{xy} = 0$ . Aus dem Hookeschen Gesetz folgt dann die Dehnung.  $\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{F}{EA}$ . Unter

Beachtung der Dehnungsdefinition  $\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = \frac{F}{EA}$  erhalten wir aus der Differentialgleichung 1. Ordnung die

Verschiebung  $\rightarrow u(x) = \frac{F}{EA}x + C$ . Die Konstante  $C$  wird aus der Randbedingung  $u(x = 0) = 0 = C$  bestimmt. Damit liegt die Verschiebung fest:

$$u(x) = \frac{F}{EA}x \rightarrow \Delta\ell = u(\ell) = \frac{F\ell}{EA}$$



Nach der Bereitstellung der Materialgleichungen für einen linear-elastischen Körper soll nun kurz die Herleitung der Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie angedeutet werden. Der 1. Weg der *Elastizitätstheorie*, bei dem die Spannungen aus den Grundgleichungen eliminiert werden, geht von den bekannten lokalen Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= 0\end{aligned}$$

aus, in die das Hookesche Gesetz, aufgelöst nach den Spannungen, eingesetzt wird.

$$\begin{aligned}G \left[ \Delta u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_T \frac{\partial T}{\partial x} \right] + f_x &= 0 \\ G \left[ \Delta v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_T \frac{\partial T}{\partial y} \right] + f_y &= 0 \\ G \left[ \Delta w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_T \frac{\partial T}{\partial z} \right] + f_z &= 0\end{aligned} \quad \text{Gl. 8-17}$$

mit dem Differentialoperator<sup>1</sup>:  $\Delta(\dots) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\dots) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\dots) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\dots)$

und dem symbolischen Vektor<sup>2</sup>:  $\text{grad}(\dots) = \text{Gradient}(\dots) = \left[ \frac{\partial(\dots)}{\partial x}; \frac{\partial(\dots)}{\partial y}; \frac{\partial(\dots)}{\partial z} \right]$

sowie der Divergenz<sup>3</sup> des Verschiebungsvektors

$$\text{div } \underline{u} = (\text{Divergenz von } \underline{u}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = \epsilon$$

läßt sich Gl. 8-17 auch als Vektorgleichung schreiben:

$$\boxed{G \left[ \Delta \underline{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad}(\text{div } \underline{u}) - \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha_T \text{grad} T \right] + \underline{f} = \underline{0}} \quad \text{Gl. 8-18}$$

Die obige Vektorgleichung entspricht drei gekoppelten partiellen Differentialgleichungen für die unbekanntenen Verschiebungsfunktionen  $u, v$  und  $w$ . Sie wird auch *Verschiebungsgleichung* genannt, weil als Unbekannte nur noch Verschiebungen auftreten. Mit dieser Gleichung läßt sich prinzipiell das linear-elastische Verschiebungsrandwertproblem lösen,

<sup>1</sup> Auch *Delta-Operator* genannt

<sup>2</sup> Die Anwendung  $\text{grad}(\dots)$  auf ein skalares Feld führt zu einem Vektorfeld

<sup>3</sup> Die *Divergenz* eines Vektorfeldes liefert ein skalares Feld

wenn zusätzlich die Randbedingungen und die Temperaturverteilung bekannt sind. Allerdings ist die Lösung dieses Randwertproblems noch so kompliziert, daß vereinfachte Annahmen getroffen werden müssen.

## 8.2 Das Elastizitätsgesetz für den ebenen Spannungszustand

Für den ebenen Spannungszustand gilt:  $\sigma_{jz} = 0$  ( $j = x, y, z$ ). Es verbleiben somit die Spannungen

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x, y); \quad \sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x, y); \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y)$$

Durch die Reduktion der zu ermittelnden Spannungsfunktionen von 6 auf 3 läßt sich das Aufstellen der Grundgleichungen der Scheibentheorie, im Vergleich zum räumlichen Fall, erheblich vereinfachen. Von den Dehnungen verbleiben

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}] + \alpha_T T \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}] + \alpha_T T \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \alpha_T T \neq 0 \end{aligned} \quad \text{Gl. 8-19}$$

und entsprechend von den Gleitungen (Gl. 8-16)

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} = \frac{1}{2G} \sigma_{xy} \quad \text{Gl. 8-20}$$

Lösen wir die obigen Gleichungen nach den Spannungen auf, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy} - (1+\nu) \alpha_T T] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx} - (1+\nu) \alpha_T T] \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} = 2G \varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad \text{Gl. 8-21}$$



### 8.3 Das Elastizitätsgesetz für den ebenen Verzerrungszustand

Der ebene Verzerrungszustand wird in langgestreckten Körpern unterstellt, bei denen Geometrie und die Belastung in Längsrichtung nahezu konstant sind. Das trifft z.B. bei der in Abb. 8-7 dargestellten Stützmauern zu.

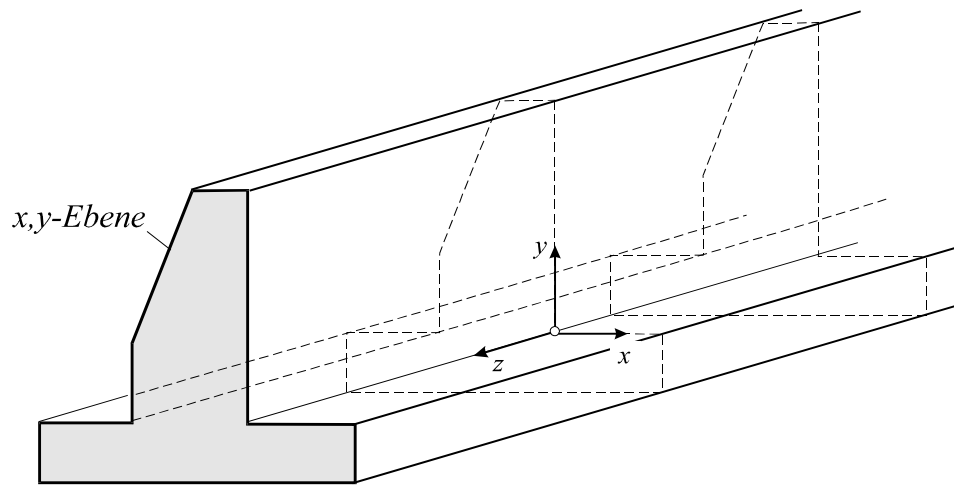


Abb. 8-7 Stützmauer, ebener Verzerrungszustand

Ein ebener Verzerrungszustand in der  $x,y$ -Ebene wird durch

$$w(x, y, z) = 0$$

definiert. Punkte der  $x,y$ -Ebene sollen sich auch nur in dieser Ebenen verschieben können. Von Gl. 8-1 verbleibt

$$\underline{u} = \{u(x, y), v(x, y)\} \quad \text{Gl. 8-22}$$

und damit

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0 \quad \text{Gl. 8-23}$$

Nach Gl. 8-16 ist dann

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} &= 0 \\ \sigma_{yz} &= 0\end{aligned}$$

Gl. 8-24

Aus der 3. von Gl. 8-11 erhalten wir zunächst wegen  $\varepsilon_{zz} = 0$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - E\alpha_T T \neq 0$$

Gl. 8-25

Einsetzen in die beiden ersten Gleichungen von Gl. 8-11 liefert

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \sigma_{xx} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{yy} \right] + (1+\nu)\alpha_T T \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left[ \sigma_{yy} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{xx} \right] + (1+\nu)\alpha_T T \\ \varepsilon_{zz} &= 0\end{aligned}$$

Gl. 8-26

Von den Gleitungen verbleibt nur

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}$$

Gl. 8-27

Lösen wir Gl. 8-26 nach den Spannungen auf, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} - (1+\nu)\alpha_T T \right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx} - (1+\nu)\alpha_T T \right] \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - (1+\nu)\alpha_T T \right]\end{aligned}$$

Gl. 8-28

Und

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy}$$

Gl. 8-29

## 8.4 Das Prinzip von de Saint-Venant

Dieses Prinzip besagt, daß statisch äquivalente Kräftesysteme, die in einem gegenüber den anderen Abmessungen kleinen Bereich angreifen, in hinreichender Entfernung von den Lasteinleitungsstellen gleiche Spannungen und Verformungen hervorrufen. Der linke von den beiden sonst gleichen Druckstäben in Abb. 8-8 wird über die Querschnittsfläche  $A$  mit einer gleichmäßig verteilten Druckspannung  $p_0$  belastet.

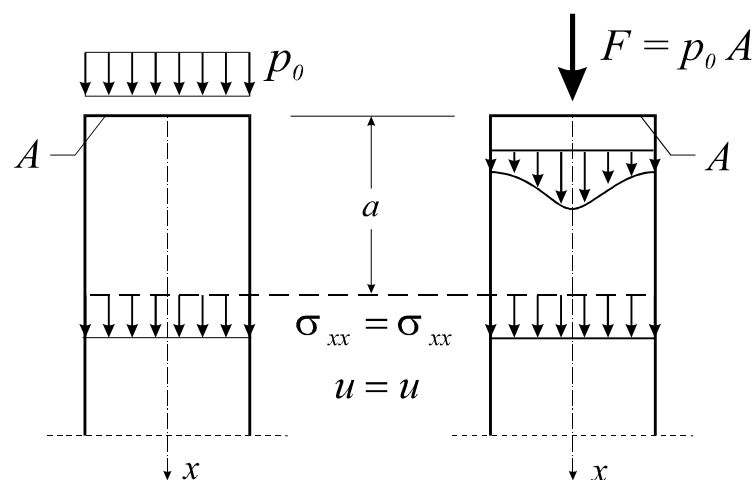


Abb. 8-8 Das Prinzip von de Saint-Venant

Bei der in Abb. 8-8 rechts dargestellten Stütze ist die gleichmäßig verteilte Druckspannung durch eine statisch äquivalente Einzelkraft  $F = p_0 A$  ersetzt worden. Das Saint-Venantsche Prinzip besagt nun:

Äquivalente Kräftesysteme, die auf (feste) deformierbare Körper wirken, sind in hinreichender Entfernung vom Angriffsgebiet der Kräfte auch hinsichtlich der Spannungen und Verformungen äquivalent.

Die Aussage dieses Prinzips läßt sich allgemein nicht beweisen. Auch was unter *hinreichender Entfernung vom Angriffsgebiet* zu verstehen ist, hängt von den speziellen Bedingungen des Einzelfalls und der angestrebten Rechengenauigkeit ab.

