

Friedrich U. Mathiak

Die Methode der finiten Elemente (FEM)

Einführung und Grundlagen

**Die Methode der
finiten Elemente
(FEM)**

Einführung und Grundlagen

© Friedrich U. Mathiak

Das Werk, einschließlich aller seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Autors unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für Vervielfältigung, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

1. Auflage Neubrandenburg 2002

Fachhochschule Neubrandenburg

Prof. Dr.-Ing. Friedrich U. Mathiak

Fachbereich:
Bauingenieur- und Vermessungswesen

Postanschrift:

Prof. Dr.-Ing. F.U. Mathiak
Brodaer Straße 2
D-17033 Neubrandenburg

Tel.: (0395) 5693-(0)-301
E-Mail: mathiak@fh-nb.de

1	EINLEITUNG	1
2	ENTSTEHUNGSGESCHICHTE DER FEM	3
3	ZUGANG ZUR FEM	5
4	EIN EINFACHES BEISPIEL	7
4.1	Das Elastizitätsgesetz für einen geraden Stab	10
4.2	Transformation auf globale Koordinaten	12
4.3	Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix des freien unverbundenen Systems	16
4.4	Berücksichtigung der geometrischen Kompatibilität	17
4.5	Kraftgleichgewicht an den Knoten	19
4.6	Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix des ungebundenen Systems	22
4.7	Einbau der geometrischen Randbedingungen	27
4.8	Ermittlung der Stabkräfte	32
5	GRUNDLAGEN DER LINEAREN ELASTIZITÄTSTHEORIE	35
5.1	Der räumliche Spannungszustand	35
5.1.1	Die statische Grundgleichung	38
5.1.2	Der ebene Spannungszustand	40
5.1.3	Der einachsige Spannungszustand	41
5.2	Verschiebungen und Verzerrungen	42
5.2.1	Die Verschiebungen	42
5.2.2	Der Verzerrungszustand	44
5.2.2.1	Dehnungen	44
5.2.2.2	Die Gleitungen	46
5.2.2.3	Der ebene Verzerrungszustand	50
5.3	Materialgesetz	51
5.3.1	Das Elastizitätsgesetz für den räumlichen Spannungszustand	51
5.3.2	Das Elastizitätsgesetz für den ebenen Spannungszustand	58
5.3.3	Das Elastizitätsgesetz für den ebenen Verzerrungszustand	59
5.3.4	Das Elastizitätsgesetz für den Stab	61
5.3.5	Das Elastizitätsgesetz für den schubstarren Balken	61
6	GRUNDGLEICHUNGEN DER SCHEIBENTHEORIE	65
6.1	Voraussetzung	65
6.2	Scheibenschnittlasten	66
6.3	Transformationsgleichungen	67
6.3.1	Hauptlängskräfte	69
6.3.2	Haupt Schubkräfte	71
6.3.3	Grundgleichungen	73
6.4	Elimination der Spannungen, Verschiebungsfunktion	73
6.5	Elimination der Verschiebungen, Spannungsfunktion	75
6.6	Randbedingungen	77
6.6.1	Verschiebungsrandbedingungen	77
6.6.1.1	Der Eingespannte Rand $x = x_0 = \text{konst.}$	77
6.6.1.2	Der freie Rand $x = x_0 = \text{konst.}$	77
6.6.2	Kraftrandbedingungen	78
6.6.2.1	Der Eingespannte Rand $x = x_0 = \text{konst.}$	78
6.6.2.2	Der freie Rand $x = x_0 = \text{konst.}$	79
7	GRUNDGLEICHUNGEN DER KLASSISCHEN PLATTENTHEORIE	81
7.1	Voraussetzungen	81
7.2	Plattenschnittlasten	81
7.3	Transformationsgleichungen für die Schnittmomente	83
7.3.1	Hauptbiegemomente	83
7.3.2	Hauptdrillmomente	85
7.4	Gleichgewicht am Plattenelement	87
7.5	Das Verschiebungsfeld $w(x,y)$	88
7.6	Die Plattendifferentialgleichung	90
7.7	Die Plattengleichung in Zylinderkoordinaten	90
7.8	Randbedingungen	93
7.8.1	Der eingespannte Rand $x = x_0 = \text{konst.}$	94

7.8.2	Der gelenkig gelagerte Rand $x = x_0 = \text{konst.}$	95
7.8.3	Der freie Rand $x = x_0 = \text{konst.}$	95
7.9	Die Platte auf nachgiebiger Unterlage	98
7.9.1	Produktlösung in kartesischen Koordinaten	99
8	DER ARBEITS- UND ENERGIEBEGRIFF IN DER ELASTOSTATIK	103
8.1	Die Arbeit einer Kraft längs eines Verschiebungsweges	103
8.2	Die Arbeit eines Kräftepaars mit dem Moment M	105
8.3	Das Potential einer Kraft 107	
8.3.1	Das Potential einer Gewichtskraft	109
8.3.2	Das Potential einer Federkraft	110
8.4	Formänderungs- und Ergänzungsenergie für elastische Körper	112
8.5	Formänderungs- und Ergänzungsenergie für den geraden Balken	116
8.5.1	Schiefe Biegung mit Normalkraft	116
8.5.2	Querkraftbeanspruchung	118
8.5.3	Torsion	121
8.6	Die isotherme Formänderungsenergie für die Scheibe	122
8.7	Formänderungsenergie für die schubstarre Platte	123
9	DAS PRINZIP DER VIRTUELLEN VERRÜCKUNG	125
10	NÄHERUNGSVERFAHREN	131
10.1	Das Verfahren von Ritz	131
11	FINITE ELEMENTE BEI EINDIMENSIONALEN RANDWERTPROBLEMEN	141
11.1	Vorgehensweise nach der FE-Methode	143
12	ALLGEMEINE HINWEISE ZUR ANWENDUNG DER FEM	163
12.1	Wahl der Elemente und des Näherungsansatzes	164
12.1.1	Tragverhalten der Konstruktion	164
12.1.2	Geometrie der Elemente	165
12.2	Ansatzfunktionen	168
12.2.1	Art der Ansatzfunktionen	168
12.2.2	Ordnung der Ansatzfunktionen, Konvergenz	169
12.2.3	Kombination von Elementen	172
12.2.4	Belastungen	173
12.3	Wahl des Elementnetzes	174
12.3.1	Elementgrenzen	174
12.3.2	Anzahl der Elemente	175
12.3.3	Verfeinerung des Elementnetzes	175
12.3.4	Form des Elementnetzes	177
12.3.5	Unendlich ausgedehnte Gebiete	178
12.4	Numerierung der Knoten und Elemente	179
12.5	Kontrolle der Ergebnisse	181

9 Finite Elemente bei eindimensionalen Randwertproblemen

Wir haben im vorigen Kapitel die näherungsweise Lösung eines Randwertproblems mit Hilfe des *Ritzschen* Verfahrens kennengelernt. Die Herleitung der Methode der finiten Elemente (FEM) kann nun auf einfache Weise erfolgen. Die grundlegende Idee besteht darin, anstelle eines Näherungsansatzes für das Gesamtgebiet Ansätze zu wählen, die sich lediglich auf Teilbereiche der Struktur beziehen und auch nur dort von Null verschieden sind¹. Wir unterstellen, daß ein zu minimierendes Funktional Π vorliegt. Zur Erläuterung der weiteren Vorgehensweise beziehen wir uns auf das Beispiel nach Abb. 9-1.

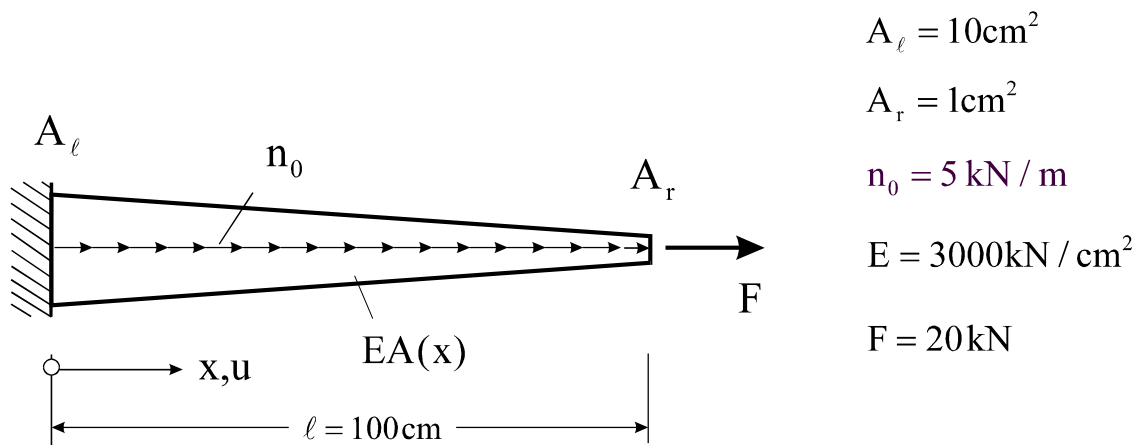


Abb. 9-1 Dehnstab mit linear veränderlichem Querschnitt $A(x)$

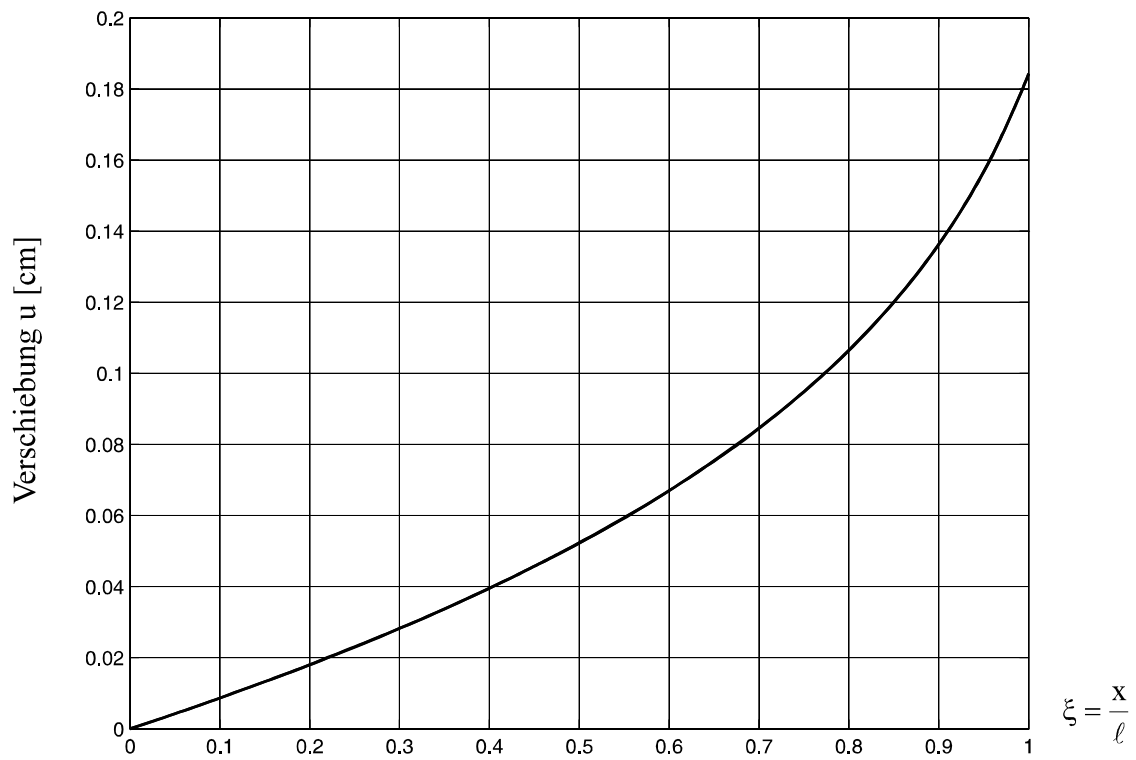
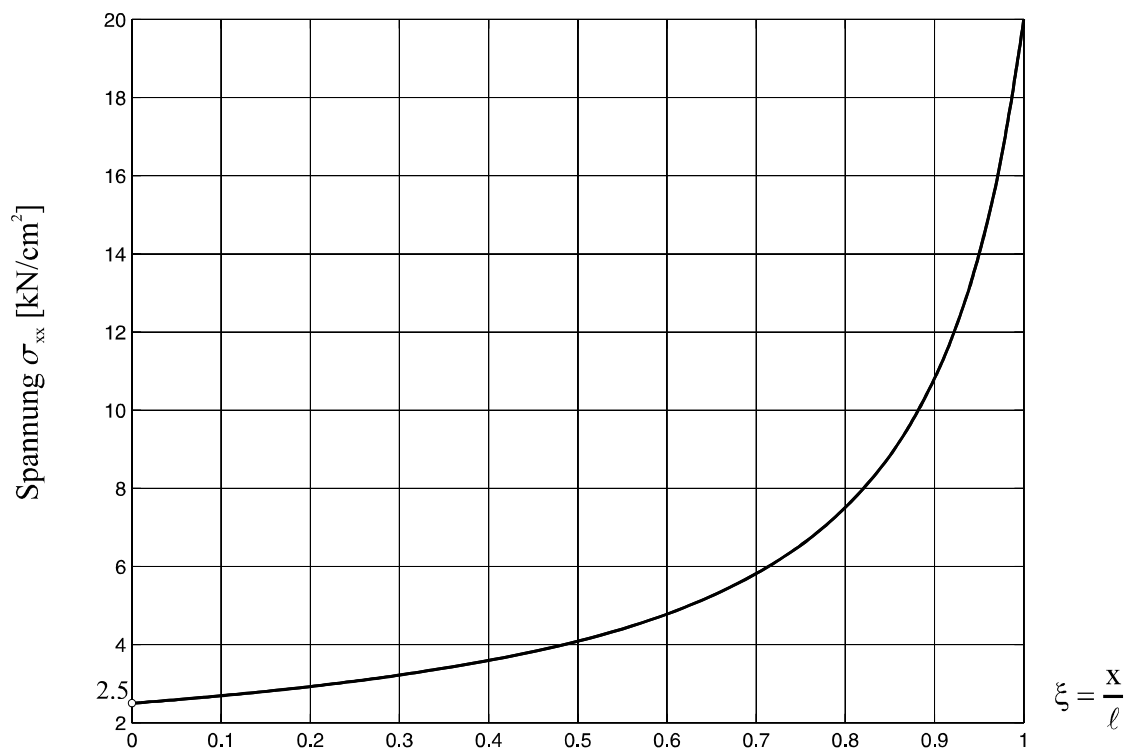
Zum Vergleich mit der noch bereitzustellenden FE-Lösung, beschaffen wir uns zunächst die analytische Lösung des Problems.

Normalkraft: $N = F + n_0(\ell - x)$

Materialgesetz: $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = Eu' = \frac{N}{A(x)} = \frac{1}{A(x)} [F + n_0(\ell - x)]$

mit $A(x) = A_\ell \left(1 + \frac{A_r - A_\ell}{A_\ell} \frac{x}{\ell} \right) = A_\ell (1 + \tilde{A}\xi)$ $\tilde{A} = (A_r - A_\ell)/A_\ell$, $x = \xi\ell$

¹ Richard Courant, amerikan. Mathematiker dt. Herkunft, 1888-1972

Abb. 9-2 Verschiebung $u(x)$, exakte LösungAbb. 9-3 Spannung σ_{xx} , exakte Lösung

DGL:
$$u'(x) = \frac{F + n_0(\ell - x)}{EA(x)} = \frac{F + n_0\ell(1 - \xi)}{EA_\ell(1 + \tilde{A}?)}$$

Integration der Differentialgleichung und Anpassung an die Randbedingung $u(0) = 0$ liefert

1. Verschiebung:
$$u = \frac{1}{E(A_r - A_\ell)} \left\{ n_0 \ell^2 \left[\left(1 + \frac{1}{\tilde{A}} \right) \ln(1 + \tilde{A}?) - \xi \right] + F \ell \ln(1 + \tilde{A}?) \right\}$$

2. Dehnung:
$$\varepsilon_{xx} = \frac{F + n_0\ell(1 - \xi)}{EA_\ell(1 + \tilde{A}?)}$$

3. Spannung:
$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = \frac{F + n_0\ell(1 - \xi)}{A_\ell(1 + \tilde{A}?)}$$

Mit den Zahlenwerten aus Abb. 9-1 ergibt die numerische Auswertung:

$$u = 0,01852\xi - 0,072 \ln(1 - 0,9\xi) \quad [\text{cm}] \quad \rightarrow \max u = u(\ell) = 0,1843 \text{ cm}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{25 - 5\xi}{10 - 9\xi} \quad [\text{kN/cm}^2] \quad \rightarrow \max \sigma_{xx} = \sigma_{xx}(\ell) = 20 \text{ kN/cm}^2$$

Für den Vergleich mit der noch zu beschaffenden FE-Lösung werten wir die Querschnittsflächen, die Verschiebungen und Spannungen an diskreten Stellen aus.

$\xi = x/\ell$	$A(\xi) [\text{cm}^2]$	$u(\xi) [\text{cm}]$	$\sigma_{xx}(\xi) [\text{kN/cm}^2]$
0,000	10,000	0,000	2,50
0,125	8,875	0,011	2,75
0,250	7,750	0,023	3,07
0,375	6,625	0,037	3,49
0,500	5,500	0,052	4,09
0,625	4,375	0,071	5,00
0,750	3,250	0,095	6,54
0,875	2,125	0,128	9,71
1,000	1,000	0,184	20,00

Tabelle 9-1 Querschnittswerte, Verschiebungen und Spannungen an diskreten Stellen

9.1 Vorgehensweise nach der FE-Methode

Das zuvor analytisch behandelte Beispiel soll nun mit der FE-Methode gelöst werden. Dazu gehen wir in Schritten vor.

1. Schritt **Idealisierung des Tragwerkes**

Diese Phase der Problemlösung gestaltet sich genauso wie bei der analytischen Vorgehensweise. Wir stellen zunächst fest, daß es sich bei der vorliegenden Aufgabe um ein statisches Problem mit konstanten Lasten handelt, das nach den Grundlagen der linearen Elastizitätstheorie als Stab berechnet werden kann. Die einzige Schnittlast ist die Normalkraft $N(x)$. Wir unterstellen also bei der Modellbildung

- Konstante Lasten
- Hookesches Materialgesetz
- Kleine Verformungen
- Stabtheorie

2. Schritt **Formulierung der Variationsaufgabe**

Die Formänderungsenergie des Stabes ist

$$W = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\ell} EA(x) u'^2(x) dx$$

Die äußere Arbeit resultiert aus der konstanten Normalkraftschüttung n_0 längs der Stabachse und der Einzelkraft F am Stabende

$$A_a = \int_0^{\ell} n_0 u(x) dx + Fu(\ell)$$

Ausgehend vom elastischen Potential

$$\Pi(u) = W - A_a = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\ell} EA(x) u'^2(x) dx - \int_{x=0}^{\ell} n_0 u(x) dx - Fu(\ell) = \text{Extremum} \quad \text{Gl. 9-1}$$

erhalten wir aus dem Prinzip der virtuellen Verrückung (Gleichgewicht) die Extremwertaufgabe

$$\delta\Pi(u) = \int_{x=0}^{\ell} EA(x) u'(x) \delta u'(x) dx - \int_{x=0}^{\ell} n_0 \delta u(x) dx - F \delta u(\ell) = 0 \quad \text{Gl. 9-2}$$

3. Schritt **Diskretisierung des Tragwerkes**

Die vorgegebene Aufgabe wird in dem Sinne diskretisiert, daß das gegebenen Grundgebiet in Teilgebiete, den finiten Elementen zerlegt wird. Bei unserem Einführungsbeispiel (Fachwerk) und der vorliegenden Stabaufgabe ist die Elementierung bereits vorgegeben. In beiden Fällen

entspricht das finite Element einem Fachwerkstab oder Teilen davon. Ähnlich ist übrigens die Situation bei Rahmentragwerken. Dort stellen die Balken oder Balkenstücke die finiten Elemente dar.

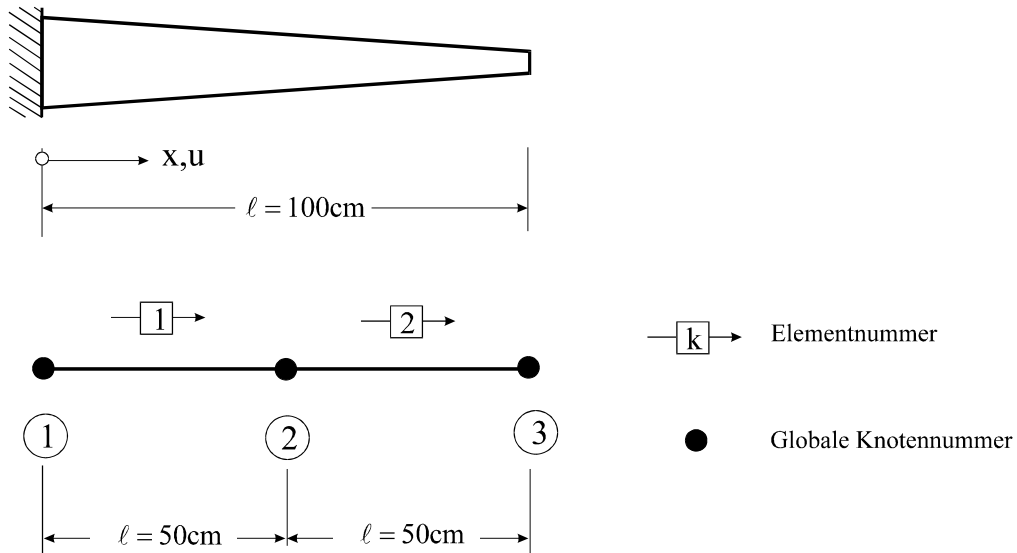


Abb. 9-4 Elementierung eines Dehnstabes, 2 Elemente gleicher Länge

Abb. 9-4 zeigt eine mögliche Elementierung unseres Dehnstabes mit zwei gleichlangen Elementen und drei Knoten. Die globalen Knotenkoordinaten werden in der **Knotendatei** abgelegt (Tabelle 9-2). In der **Elementdatei** (Tabelle 9-3) werden den Elementen die globalen Anfangs- und Endknoten zugeordnet.

Knotennummer	x-Koordinate [cm]
1	0
2	50
3	100

Tabelle 9-2 Knotendatei

Elementnummer	Anfangsknoten	Endknoten
1	1	2
2	2	3

Tabelle 9-3 Elementdatei

4. Schritt Auswahl des Elementtyps, Ansatzfunktionen

Wir betrachten in einem ersten Schritt das **2-Knotenelement** entsprechend Abb. 9-5. Jeder Knoten besitzt nur einen kinematischen Freiheitsgrad, nämlich die Verschiebung in x_e -Richtung. Wir sprechen deshalb von einem Element mit **zwei Freiheitsgraden**.

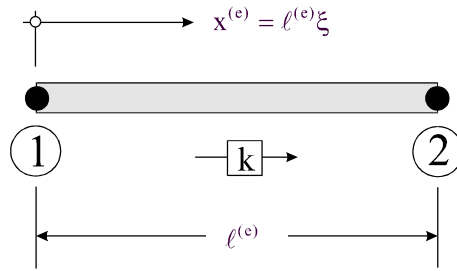


Abb. 9-5 Dehnstab, 2-Knotenelement

Der Stabanfangsknoten wird mit 1 und der Stabendknoten mit 2 bezeichnet.

Hinweis: Anfangs- und Endknoten des Stabes dürfen nicht mit den globalen Knoten nach Abb. 9-4 verwechselt werden.

Damit besitzt das Element eine Orientierung. Für die Verschiebung u verwenden wir innerhalb des Elementes einen Verschiebungsansatz, der für alle Elemente identisch ist. Damit entfällt das umständliche Suchen nach geeigneten globalen Ansatzfunktionen, wie das beim Ritz-Verfahren erforderlich war. Für Elemente, die sich am Rande des Lösungsgebietes befinden, sind später die vom Problem vorgegebenen Randwerte einzuhalten. An den Elementengrenzen müssen die Ansatzfunktionen gewissen Stetigkeitsanforderungen genügen, die vom mechanischen Problem abhängen. Beim Dehnstab müssen an den Elementübergängen die Verschiebungen stetig sein. In der FEM spricht man in diesem Fall von **C^0 -Stetigkeit** der Verschiebung u .

Hinweis: C^0 -Stetigkeit reicht für die Durchbiegung beim Biegebalken nicht aus. Hier muß zusätzlich noch Stetigkeit in der 1. Ableitung von $w(x)$ gefordert werden, die als **C^1 -Stetigkeit** bezeichnet wird (Abb. 9-6).

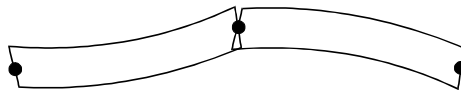


Abb. 9-6 Verletzung der C^1 -Stetigkeit bei einem Balkenelement

Zur Beschreibung des Verschiebungszustandes innerhalb des Elementes verwenden wir die lokale Koordinate $\xi = x^{(e)}/l^{(e)}$ ($0 \leq \xi \leq 1$). Wir benötigen zur Lösung des Problems die globalen Verschiebungen $u(x)$. Dazu stellen wir zunächst den Verschiebungszustand innerhalb eines Elementes auf und sorgen durch entsprechende Wahl der Verschiebungsfunktionen für Stetigkeit an den Elementengrenzen. Zur Darstellung der Verschiebung innerhalb des Elementes

eignen sich speziell Polynome, da diese leicht aufgebaut und auch leicht zu differenzieren sind. Ein Polynom vom Grade n besitzt $n + 1$ freie Parameter. Es hat die Darstellung

$$P_n(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots + a_n\xi^n = \sum_{i=0}^n a_i\xi^i \quad \text{Gl. 9-3}$$

Da von der Zustandsgröße $u(x)$ unseres Stabproblems lediglich C^0 -Stetigkeit gefordert wird, genügt es bei einem 2-Knotenelement einen linearen Ansatz für die Verschiebungen zu wählen, also

$$u(\xi) = a_0 + a_1\xi \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad \text{Gl. 9-4}$$

Wir drücken nun die Verschiebungen innerhalb des Elementes durch die Stabendverschiebungen u_1 und u_2 aus. Das erreichen wir, indem wir die Verschiebungsfunktion Gl. 9-4 an den Rändern $\xi = 0$ und $\xi = 1$ auswerten.

$$\begin{aligned} u(\xi = 0) = u_1 = a_0 & & a_0 = u_1 \\ u(\xi = 1) = u_2 = a_0 + a_1 & & a_1 = u_2 - u_1 \end{aligned}$$

Einsetzen der Konstanten liefert: $u(\xi) = u_1 + (u_2 - u_1)\xi$. Wir sortieren noch etwas um und erhalten

$$u(\xi) = (1 - \xi)u_1 + \xi u_2 = N_1(\xi) u_1 + N_2(\xi) u_2 \quad \text{Gl. 9-5}$$

Damit sind die Verschiebungen innerhalb des Elementes zunächst durch die Stabendverschiebungen ausgedrückt. Die Funktionen vor den Stabendverschiebungen

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= 1 - \xi \\ N_2(\xi) &= \xi \end{aligned} \quad \text{Gl. 9-6}$$

sind die **Lagrangeschen¹ Interpolationspolynome**, die in der FEM auch **Formfunktionen** genannt werden (Abb. 9-7). Die Formfunktionen N_i nehmen an den Knoten i gerade den Wert 1 und an den übrigen Knoten den Wert 0 an

$$N_i(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{für } \xi = \xi_i \\ 0 & \text{für } \xi = \xi_k \text{ (} k \neq i \text{)} \end{cases}$$

¹ Joseph Louis de Lagrange, frz. Mathematiker und Physiker, 1736-1813

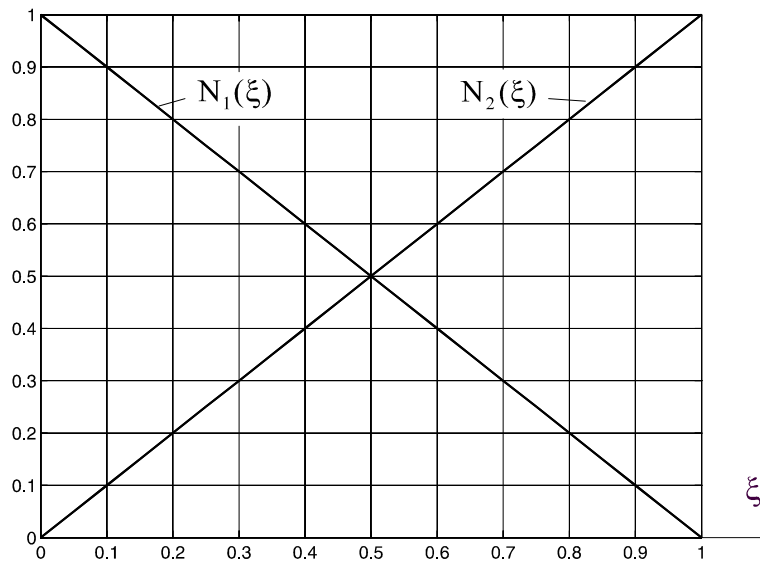


Abb. 9-7 Formfunktionen, linearer Ansatz

Weiterhin gilt:

$$\sum_{i=1}^n N_i = 1.$$

Zur Herleitung der **Elementsteifigkeitsmatrix** gehen wir aus vom Funktional Gl. 9-1.

$$\Pi(u) = W - A_a = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\ell} EA(x) u'^2(x) dx - \int_{x=0}^{\ell} n_0 u(x) dx - Fu(\ell) = \text{Extremum} \quad \text{Gl. 9-7}$$

Da sämtliche Energieausdrücke in Gl. 9-7 additiv sind, dürfen wir diese elementweise berechnen und letztlich durch Summation zum Gesamtpotential zusammenführen. Für die Formänderungsenergie gilt dann

$$W = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\ell} EA(x) u'^2(x) dx = \sum_{e=1}^n W_e = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \int_{x^{(e)}=0}^{\ell^{(e)}} E^{(e)} A^{(e)}(x^{(e)}) u'^2(x^{(e)}) dx^{(e)} \quad \text{Gl. 9-8}$$

und für die Arbeit der äußeren Kräfte folgt

$$A_a = \int_{x=0}^{\ell} n_0 u(x) dx + Fu(\ell) = \sum_{e=1}^n \int_{x^{(e)}=0}^{\ell^{(e)}} n_0 u(x^{(e)}) dx^{(e)} + Fu(\ell) \quad \text{Gl. 9-9}$$

Die Variation des Funktionals Gl. 9-7 ist

$$\delta\Pi = \delta W - \delta A_a = 0 \tag{Gl. 9-10}$$

mit

$$\delta W = \sum_{e=1}^n \delta W_e = \sum_{e=1}^n \int_{x^{(e)=0}}^{\ell^{(e)}} u'(x^{(e)}) E_e \delta u'(x^{(e)}) A(x^{(e)}) dx^{(e)} \tag{Gl. 9-11}$$

und

$$\delta A_a = \sum_{e=1}^n \int_{x^{(e)=0}}^{\ell^{(e)}} n_0 \delta u(x^{(e)}) dx^{(e)} + F \delta u(\ell) \tag{Gl. 9-12}$$

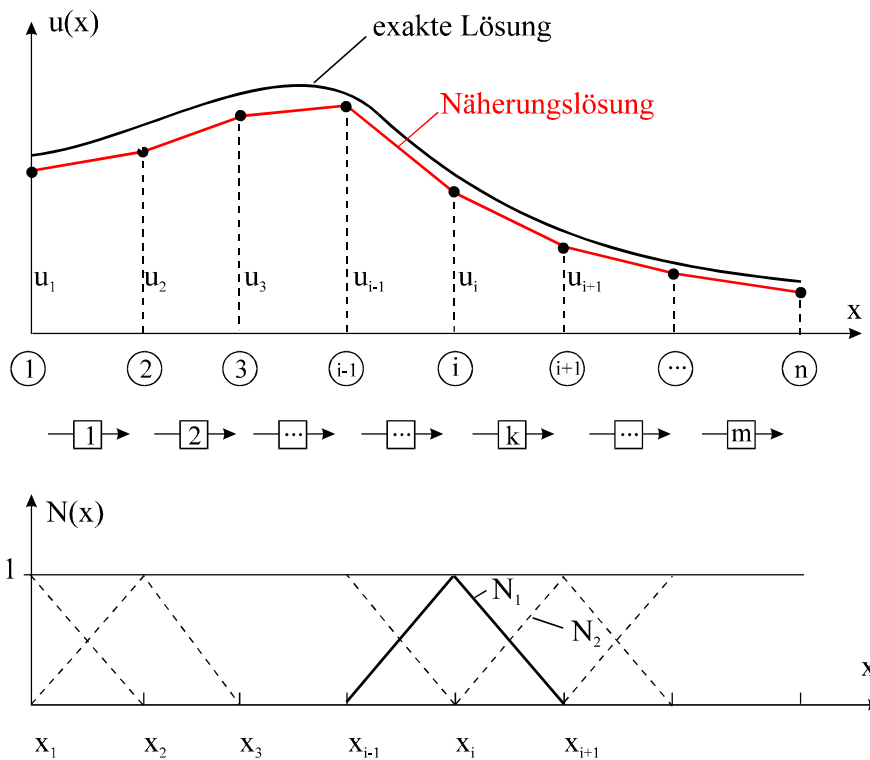


Abb. 9-8 Lineare Verschiebungsansätze

Wir beschaffen uns jetzt eine Näherungswert für das Potential Π , indem wir für die Verschiebungen auf Elementebene den linearen Verschiebungsansatz

$$\hat{u}(\xi) = (1-\xi)u_1 + \xi u_2 = N_1(\xi) u_1 + N_2(\xi) u_2 \tag{Gl. 9-13}$$

wählen. Damit geht das Potential $\Pi(u)$ über in die Näherung $\hat{\Pi}(\hat{u})$. Gl. 9-13 können wir auch kompakter in Matrixschreibweise notieren

$$\hat{\mathbf{u}}(x_e) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x^{(e)}}{\ell^{(e)}} & \frac{x^{(e)}}{\ell^{(e)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1(x^{(e)}) & \mathbf{N}_2(x^{(e)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \quad \text{Gl. 9-14}$$

Über die Elementgrenzen hinweg stellt sich dann ein Verschiebungszustand nach Abb. 9-8 ein, der offensichtlich der geforderten C^0 -Stetigkeit in den Verschiebungen genügt. Die virtuelle Verrückung ist dann

$$\delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}^{(e)} d\mathbf{u}^{(e)} \quad \text{Gl. 9-15}$$

Wir benötigen noch die Ableitung der Verschiebungsfunktion $\hat{\mathbf{u}}$, die der Dehnung ε_{xx} entspricht. Es gilt

$$\hat{\mathbf{u}}'(x^{(e)}) = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{N}_1}{dx^{(e)}} & \frac{d\mathbf{N}_2}{dx^{(e)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell^{(e)}} & \frac{1}{\ell^{(e)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \varepsilon_{xx} \quad \text{Gl. 9-16}$$

Die Matrix

$$\mathbf{B}_e = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2] = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{N}_1}{dx^{(e)}} & \frac{d\mathbf{N}_2}{dx^{(e)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell^{(e)}} & \frac{1}{\ell^{(e)}} \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 9-17}$$

enthält die Ableitungen der Ansatzfunktionen. Die Verzerrungen auf Elementebene lassen sich dann allgemein wie folgt schreiben

$$\mathbf{e}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \quad \text{Gl. 9-18}$$

Einsetzen in Gl. 9-11 liefert

$$\begin{aligned} \delta \hat{\mathbf{W}}^{(e)}(\hat{\mathbf{u}}) &= \int_0^{\ell^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)} \delta \mathbf{u}^{(e)} \mathbf{E}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} A(x^{(e)}) dx^{(e)} \\ &= \delta \mathbf{u}^{(e)T} \underbrace{\int_0^{\ell^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{E}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} A(x^{(e)}) dx^{(e)}}_{=\mathbf{k}^{(e)}} \mathbf{u}^{(e)} = \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} \end{aligned} \quad \text{Gl. 9-19}$$

Bezeichnen A_1 und A_2 die Querschnittsflächen am Stabanfang (Knoten 1) bzw. Stabende (Knoten 2) dann gilt: $A(x^{(e)}) = A_1 + (A_2 - A_1) \frac{x^{(e)}}{\ell^{(e)}}$. Ausmultiplizieren der Matrizen und anschließende Integration liefert die **Elementsteifigkeitsmatrix**

$$\mathbf{k}^{(e)} = \int_0^{\ell^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{E}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} A(x^{(e)}) dx^{(e)} = \frac{E^{(e)}}{\ell^{(e)2}} \int_0^{\ell^{(e)}} \left[\begin{array}{c|c} A_1 + (A_2 - A_1) \frac{x^{(e)}}{\ell^{(e)}} & -A_1 - (A_2 - A_1) \\ \hline -A_1 - (A_2 - A_1) \frac{x^{(e)}}{\ell^{(e)}} & A_1 + (A_2 - A_1) \end{array} \right]$$

Gl. 9-20

$$= \frac{1}{2} \frac{E^{(e)}(A_1 + A_2)}{\ell^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{E^{(e)} A_m^{(e)}}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

die nur von der Länge $\ell^{(e)}$ und der Dehnsteifigkeit $E^{(e)} A_m^{(e)}$ des betrachteten Elementes abhängt. In Gl. 9-20 ist

$$A_m^{(e)} = \frac{1}{2} (A_1 + A_2)$$

Gl. 9-21

der Mittelwert der Querschnittsflächen am Stabanfang und Stabende. Ist die Querschnittsfläche $A^{(e)} = A_1 = A_2$ innerhalb des Elementes konstant, dann geht Gl. 9-20 über in

$$\mathbf{k}^{(e)} = \frac{E^{(e)} A^{(e)}}{\ell^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Gl. 9-22

Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte setzt sich aus zwei Anteilen zusammen:

1. Arbeit der Linienlast n_0 an der virtuellen Verschiebung δu
2. Arbeit der Einzellast F an der virtuelle Verschiebung $\delta u(\ell)$

Wir betrachten zuerst die Arbeit der Linienlast n_0 auf Elementebene. Die Arbeit der Einzellast F wird später berücksichtigt. Mit

$$\delta \hat{A}_a^{(e)} = \sum_{e=1}^n \int_0^{\ell^{(e)}} n_0 \delta \hat{u}(x^{(e)}) dx^{(e)} = \sum_{e=1}^n \delta \hat{A}_a^{(e)}$$

Gl. 9-23

ist der auf das Element bezogene Anteil

$$\delta \hat{A}_a^{(e)} = \int_0^{\ell^{(e)}} n_0 \delta \hat{u}(x^{(e)}) dx^{(e)} = \int_0^{\ell^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)} \delta \mathbf{u}^{(e)} n_0 dx^{(e)} = \delta \mathbf{u}^{(e)T} \underbrace{\int_{x_e=0}^{\ell^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)T} n_0 dx^{(e)}}_{=\mathbf{p}^{(e)}} = \delta \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{p}^{(e)}$$

Gl. 9-24

Die Integration liefert für $n = n_0 = \text{konst.}$ den **Elementlastvektor**

$$\mathbf{p}_e = \int_{x_e=0}^{\ell^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)T} n_0 dx^{(e)} = \frac{n_0 \ell^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 9-25}$$

5. Schritt Aufbau des globalen Gleichungssystems

Die auf Elementebene berechneten Matrizen werden jetzt zum globalen Gleichungssystem zusammengebaut. Der Zusammenbau muß so erfolgen, daß die Kompatibilität in den Verformungen über die Elementgrenzen hinweg gewährleistet ist. Dazu benötigen wir den Zusammenhang zwischen den lokalen Elementknotenverschiebungen (u_1, u_2) und den globalen Systemknotenverschiebungen

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 9-26}$$

Hierzu führen wir auf Elementebene die Zuordnungsmatrix \mathbf{A}_e ein, die sich aus der Elementdatei ermitteln läßt. Es gilt dann

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)} \mathbf{v} \quad \text{Gl. 9-27}$$

Die Matrix $\mathbf{A}^{(e)}$ ist eine Boolesche Matrix, die nur die Informationen 0 oder 1 enthält (s.h. Beispiel Fachwerk). Für das Element 2 erhalten wir zum Beispiel

$$\mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{v} \quad \text{Gl. 9-28}$$

Das Potential des Elementes ist dann

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell^{(e)}} \mathbf{E}^{(e)} \mathbf{A}(x^{(e)}) \hat{u}'^2(x^{(e)}) dx^{(e)} - \int_0^{\ell^{(e)}} n_0 \hat{u}(x^{(e)}) dx^{(e)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} - \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{p}^{(e)} \quad \text{Gl. 9-29}$$

Am Gesamtpotential fehlt jetzt noch die Arbeit der äußeren eingepprägten Kraft F an der Verschiebung $u(\ell)$. Die Kraft F kann nur über den Systemknoten "3" in die Konstruktion eingeleitet werden. Führen wir mit

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 9-30}$$

den **Knotenlastvektor** ein, dann ist die Arbeit der eingprägten Kräfte

$$\hat{A}_{a,F} = \mathbf{F}^T \mathbf{v}$$

Die Gesamtenergie des Stabes ist dann endgültig

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(\hat{\mathbf{u}}) &= \sum_{e=1}^n \Pi^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^n [\mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} - 2\mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{p}^{(e)}] - \mathbf{F}^T \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^n \mathbf{v}^T [\mathbf{A}^{(e)T} \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{A}^{(e)} \mathbf{v} - 2\mathbf{A}^{(e)T} \mathbf{p}^{(e)}] - \mathbf{v}^T \mathbf{F} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{P} = \text{Extremum} \end{aligned} \quad \text{Gl. 9-31}$$

mit der **globalen Systemsteifigkeitsmatrix**

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \mathbf{A}^{(e)T} \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{A}^{(e)} \quad \text{Gl. 9-32}$$

und dem **globalen Knotenlastvektor**

$$\mathbf{P} = \sum_{e=1}^n \mathbf{A}^{(e)T} \mathbf{p}^{(e)} + \mathbf{F} \quad \text{Gl. 9-33}$$

Das Prinzip der virtuellen Verrückung fordert

$$\delta \hat{\Pi} = \frac{1}{2} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{v} - \delta \mathbf{v}^T \mathbf{P} = \delta \mathbf{v}^T [\mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{P}] = 0 \quad \text{Gl. 9-34}$$

In Gl. 9-34 wurde die Symmetrie der Systemsteifigkeitsmatrix berücksichtigt¹. Wegen der Beliebigkeit von $\delta \mathbf{v}$ muß dann

$$\mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{P} \quad \text{Gl. 9-35}$$

¹ Dann gilt: $\mathbf{v}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{v} = \delta \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v}$

erfüllt sein.

6. Schritt Aufbau des modifizierten Gleichungssystems, Einbau der Randbedingungen

Mit Hilfe der Zuordnungsmatrizen \mathbf{A}_e läßt sich nun das Gleichungssystem für das noch nicht gefesselte System aufbauen. Wir beginnen mit der Systemmatrix \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^2 \mathbf{A}^{(e)T} \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{A}^{(e)} = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{A}^{(1)T} \mathbf{k}^{(1)} \mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)T} \mathbf{k}^{(2)} \mathbf{A}^{(2)} \quad \text{Gl. 9-36}$$

Zur Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{k}^{(e)}$ benötigen wir gemäß Gl. 9-21 neben den Elastizitätsmoduli die Mittelwerte der Elementquerschnittsflächen $A_m^{(e)}$

Element	Elastizitätsmodul [kN/cm ²]	$A_m^{(e)}$ [cm ²]	Elementlänge [cm]
1	3000.0	0.5 (10 + 5.5) = 7.75	50
2	3000.0	0.5 (5.5 + 1.0) = 3.25	50

Tabelle 9-4 Elementgrößen, zwei Elemente gleicher Länge

Damit erhalten wir nach Gl. 9-20 die Elementsteifigkeitsmatrizen

$$\mathbf{k}^{(1)} = \frac{E^{(1)} A_m^{(1)}}{\ell^{(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 465 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}^{(2)} = \frac{E^{(2)} A_m^{(2)}}{\ell^{(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 195 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

sowie unter Beachtung von Gl. 9-32 die globalen Elementmatrizen

$$\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{A}^{(1)T} \mathbf{k}^{(1)} \mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 465 & -465 \\ -465 & 465 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 465 & -465 & 0 \\ -465 & 465 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{A}^{(2)T} \mathbf{k}^{(2)} \mathbf{A}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 195 & -195 \\ -195 & 195 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 195 & -195 \\ 0 & -195 & 195 \end{bmatrix}$$

Der Zusammenbau liefert die globale Systemsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 465 & -465 & 0 \\ -465 & 465+195 & -195 \\ 0 & -195 & 195 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 465 & -465 & 0 \\ -465 & 660 & -195 \\ 0 & -195 & 195 \end{bmatrix}$$

Nun wird die rechte Seite aufgebaut. Es gilt

$$\mathbf{P} = \sum_{e=1}^n \mathbf{A}^{(e)T} \mathbf{p}^{(e)} + \mathbf{F} = \mathbf{A}^{(1)T} \mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)T} \mathbf{p}^{(2)} + \mathbf{F} = 1.25 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1.25 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 2.50 \\ 21.25 \end{bmatrix}$$

Die Systemgleichung Gl. 9-35 lautet dann

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 465 & -465 & 0 & 1.25 \\ -465 & 660 & -195 & 2.50 \\ 0 & -195 & 195 & 21.25 \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 2.50 \\ 21.25 \end{bmatrix}$$

Wie man leicht zeigen kann, ist die Systemmatrix \mathbf{K} singulär ($\det \mathbf{K} = 0$). Das System ist offensichtlich kinematisch, denn wir haben noch nicht berücksichtigt, daß der Stab bei $x = 0$ festgehalten ist. Wegen $v_1 = 0$ und damit auch $\delta v_1 = 0$ können die 1. Spalte und die 1. Zeile des Gleichungssystems gestrichen werden. Es verbleibt dann die reduzierte Systemgleichung

$$\begin{bmatrix} 660 & -195 \\ -195 & 195 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,50 \\ 21,25 \end{bmatrix}$$

mit der Lösung

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0511 \\ 0,1600 \end{bmatrix} [\text{cm}]$$

Aufgrund des kinematischen Zwangs $v_1 = 0$ reagiert das System am linken Rand mit einer Reaktionskraft R (Abb. 9-9). Soll diese Reaktionskraft berechnet werden, dann muß das kinematische Modell durch das entsprechende statische Modell ersetzt werden. Die Rechte Seite wird um die unbekannte Auflagerkraft R erweitert

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1,25 + R \\ 2,50 \\ 21,25 \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 9-37}$$

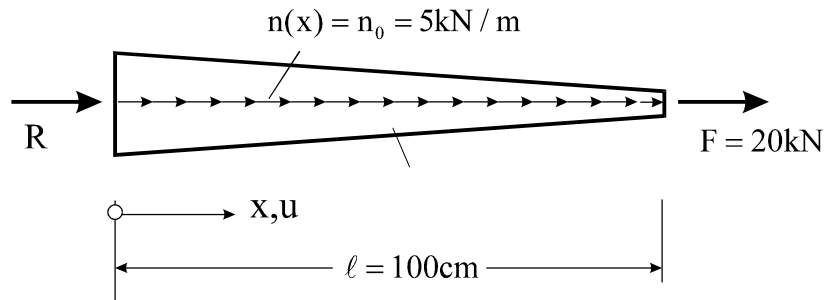


Abb. 9-9 Statisches Modell zur Berechnung der Reaktionskraft R

Die Systemmatrix erscheint dann in folgender Form

$$\begin{bmatrix} 465 & -465 & 0 \\ -465 & 660 & -195 \\ 0 & -195 & 195 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,25 + R \\ 2,50 \\ 21,25 \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 9-38}$$

Mit den bereits bekannten Knotenverschiebungen v_2 und v_3 erhalten wir aus der ersten Gleichung

$$-465v_2 = 1,25 + R$$

und damit

$$R = -465 \cdot 0,0511 - 1,25 = -25,0 \text{ kN}$$

7. Schritt Rückrechnung

Mit den Knotenverschiebungen liegen dann auch die verbleibenden Zustandsgrößen fest. Da wir einen linearen Verschiebungsansatz gewählt haben, sind die Verzerrungen (und damit auch die Spannungen) innerhalb des Elementes konstant¹. Mit Gl. 9-16 gilt

$$\mathbf{e}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{A}^{(e)} \mathbf{v} \quad \text{Gl. 9-39}$$

Element 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(1)} &= \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell^{(1)}} & \frac{1}{\ell^{(1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{50} & \frac{1}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0511 \\ 0,1600 \end{bmatrix} \\ &= \frac{0,0511}{50} = 1,022\text{E} - 3 \end{aligned}$$

¹ In der angelsächsischen Literatur wird deshalb ein solches Element als **constant strain element** bezeichnet.

Element 2:

$$\mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell^{(2)}} & \frac{1}{\ell^{(2)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{50} & \frac{1}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0511 \\ 0,1600 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{50} (0,16 - 0,0511) = 2,178\text{E} - 3$$

Für die Spannungen gilt

$$\mathbf{s}^{(e)} = E^{(e)} \mathbf{e}^{(e)} \quad \text{Gl. 9-40}$$

Element 1: $\mathbf{s}^{(1)} = E^{(1)} \mathbf{e}^{(1)} = 3,0\text{E} + 3 \cdot 1,022\text{E} - 3 = 3,07 \text{ kN/cm}^2$

Element 2: $\mathbf{s}^{(2)} = E^{(2)} \mathbf{e}^{(2)} = 3,0\text{E} + 3 \cdot 2,178\text{E} - 3 = 6,53 \text{ kN/cm}^2$

Die grafischen Darstellungen der Verschiebungen und Spannungen in Abb. 9-10 und Abb. 9-11 zeigen deutlich ein starkes Anwachsen der Zustandsgrößen in der Nähe des rechten Randes. Das trifft besonders für die Spannungen zu. Die Elementierung des Stabes mit nur zwei Elementen unter Verwendung des Zweiknotenelementes mit linearem Verschiebungsansatz ist offensichtlich nicht in der Lage, insbesondere die Spannungen befriedigend wiederzugeben. Die mit der FEM ermittelten Spannungen entsprechen jedoch exakt den theoretischen Werten in Elementmitte. Diese Mittelung im energetischen Sinne ist charakteristisch für die FE-Methode. Die größte Spannung tritt bei $x = \ell$ auf. Der relative Fehler beträgt immerhin

$$\Delta\sigma = \frac{|\sigma_{\text{an}} - \sigma_{\text{FE}}|}{\sigma_{\text{an}}} = \frac{20 - 6,53}{20} = 67,4\%$$

ein für die sinnvolle Auslegung des Systems zu hoher Wert.

Mit dem vorgestellten 2-Knoten-Element lassen sich die Ergebnisse durch folgende Modifikationen wesentlich verbessern

1. Erhöhung der Elementanzahl bei Beibehaltung der Elementlänge
2. Feinere Elementierung im Bereich starker Änderung der Zustandsgrößen

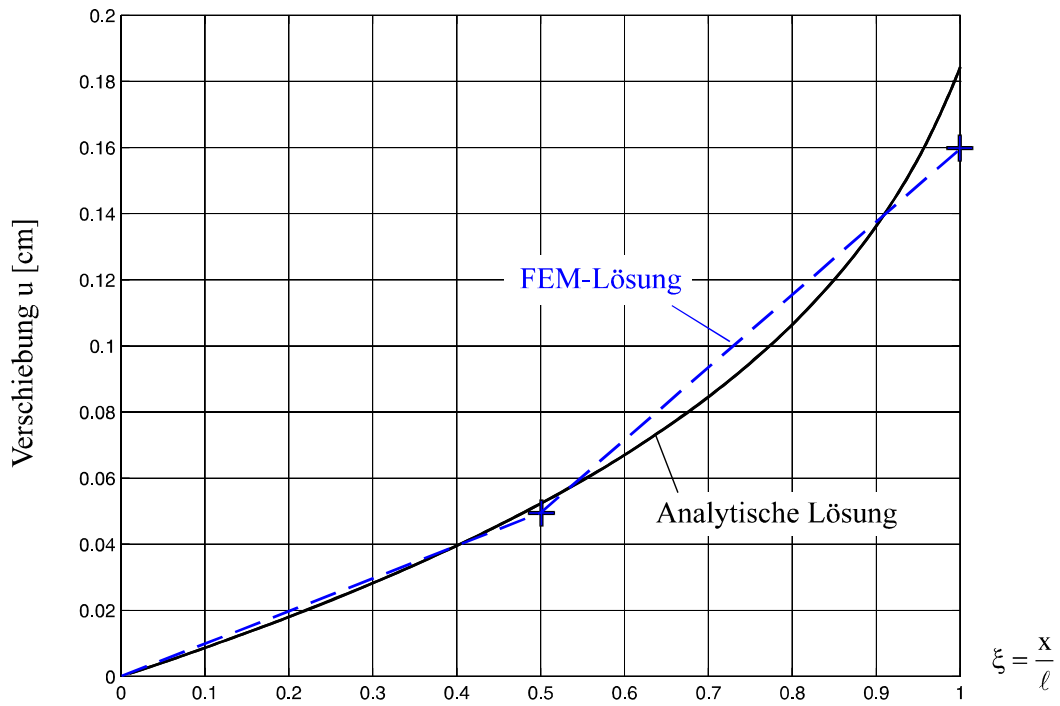


Abb. 9-10 Verschiebung u , Ergebnis für zwei Elemente gleicher Länge

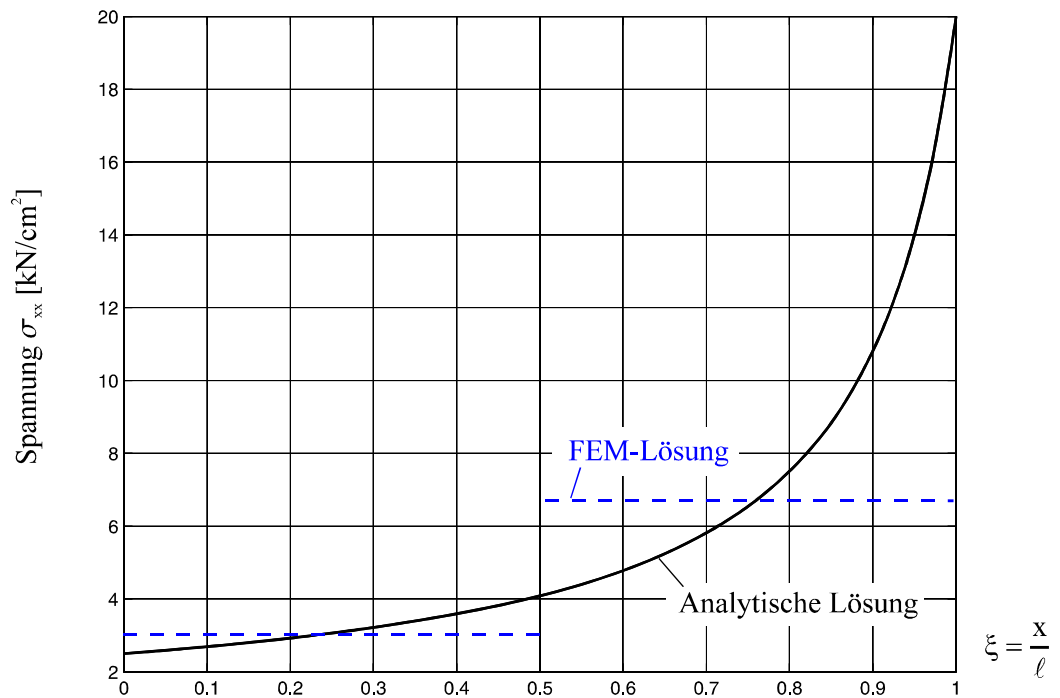


Abb. 9-11 Spannung σ_{xx} , Ergebnis für zwei Elemente gleicher Länge

Wir erhöhen in einem ersten Schritt die Anzahl der Elemente auf vier. Den vier Elementen gleicher Länge sind 5 Systemknoten mit den entsprechenden Freiheitsgraden zugeordnet.

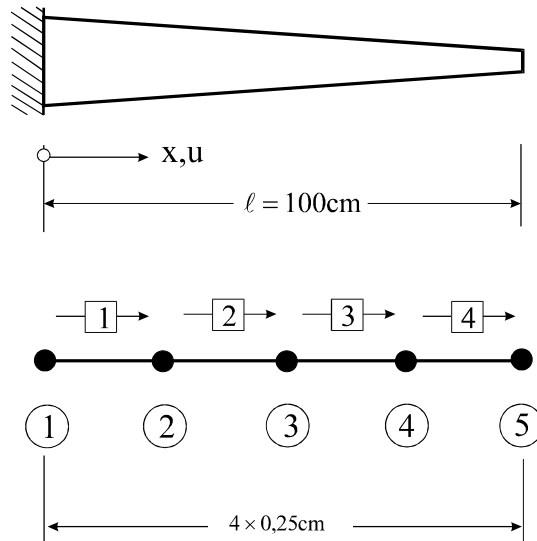


Abb. 9-12 Elementierung eines Dehnstabes, 4 Elemente gleicher Länge

Knotennummer	x-Koordinate [cm]
1	0
2	25
3	50
4	75
5	100

Tabelle 9-5 Knotendatei, 4 Elemente gleicher Länge

Elementnummer	Anfangsknoten	Endknoten
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

Tabelle 9-6 Elementdatei, 4 Elemente gleicher Länge

Zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen benötigen wir wieder die gemittelten Querschnittsflächen $A_m^{(e)}$

Element	Elastizitätsmodul [kN/cm ²]	A _m ^(e) [cm ²]	Elementlänge [cm]
1	3000,0	0.5 (10,0 + 7,75) = 8,875	25
2	3000,0	0.5 (7,75 + 5,50) = 6,625	25
3	3000,0	0.5 (5,50 + 3,25) = 4,375	25
4	3000,0	0.5 (3,25 + 1,00) = 2,125	25

Tabelle 9-7 Elementgrößen, 4 Elemente gleicher Länge

Elementlastvektoren

$$\mathbf{p}^{(e)} = \frac{n_0 \ell_e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5 \cdot 0,25}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,625 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Elementsteifigkeitsmatrizen

$$\mathbf{k}^{(1)} = \frac{E^{(1)} A^{(1)}}{\ell^{(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1065 & -1065 \\ -1065 & 1065 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^{(2)} = \frac{E^{(2)} A^{(2)}}{\ell^{(2)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 795 & -795 \\ -795 & 795 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^{(3)} = \frac{E^{(3)} A^{(3)}}{\ell^{(3)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 525 & -525 \\ -525 & 525 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^{(4)} = \frac{E^{(4)} A^{(4)}}{\ell^{(4)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 255 & -255 \\ -255 & 255 \end{bmatrix}$$

Vektor der rechten Seite

$$\mathbf{P} = \sum_{e=1}^4 \mathbf{A}^{(e)T} \mathbf{p}^{(e)} + \mathbf{F} = 0,625 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0,625 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0,625 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0,625 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,625 \\ 1,250 \\ 1,250 \\ 1,250 \\ 20,625 \end{bmatrix}$$

Systemgleichung

$$\begin{bmatrix} 1065 & -1065 & 0 & 0 & 0 \\ -1065 & 1065 + 795 & -795 & 0 & 0 \\ 0 & -795 & 795 + 525 & -525 & 0 \\ 0 & 0 & -525 & 525 + 255 & -255 \\ 0 & 0 & 0 & -255 & 255 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,625 + R \\ 1,250 \\ 1,250 \\ 1,250 \\ 20,625 \end{bmatrix}$$

Knotenverschiebungen

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0229 \\ 0,0520 \\ 0,0936 \\ 0,1745 \end{bmatrix}$$

Reaktionskraft

$$R = -1065 \cdot 0,02289 - 0,625 = 25,00 \text{ kN}$$

Verzerrungen

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{25}, \frac{1}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0229 \\ 0,0520 \\ 0,0936 \\ 0,1745 \end{bmatrix} = \frac{0,0229}{25} = 9,160 \text{E} - 4$$

$$\mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{25}, \frac{1}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0229 \\ 0,0520 \\ 0,0936 \\ 0,1745 \end{bmatrix} = \frac{0,0520 - 0,0229}{25} = 1,164 \text{E} - 3$$

$$\mathbf{e}^{(3)} = \mathbf{B}^{(3)} \mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{B}^{(3)} \mathbf{A}^{(3)} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{25}, \frac{1}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0229 \\ 0,0520 \\ 0,0936 \\ 0,1745 \end{bmatrix} = \frac{0,0936 - 0,0520}{25} = 1,664 \text{E} - 3$$

$$\mathbf{e}^{(4)} = \mathbf{B}^{(4)} \mathbf{u}^{(4)} = \mathbf{B}^{(4)} \mathbf{A}^{(4)} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{25}, \frac{1}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0229 \\ 0,0520 \\ 0,0936 \\ 0,1745 \end{bmatrix} = \frac{0,1745 - 0,0936}{25} = 3,236 \text{E} - 3$$

Spannungen

$$\mathbf{s}^{(1)} = E^{(1)} \mathbf{e}^{(1)} = 3,0 \text{E} + 3 \cdot 9,160 \text{E} - 4 = 2,75 \text{ kN/cm}^2$$

$$\mathbf{s}^{(2)} = E^{(2)} \mathbf{e}^{(2)} = 3,0 \text{E} + 3 \cdot 1,164 \text{E} - 3 = 3,49 \text{ kN/cm}^2$$

$$\mathbf{s}^{(3)} = E^{(3)} \mathbf{e}^{(3)} = 3,0 \text{E} + 3 \cdot 1,664 \text{E} - 3 = 4,99 \text{ kN/cm}^2$$

$$\mathbf{s}^{(4)} = E^{(4)} \mathbf{e}^{(4)} = 3,0 \text{E} + 3 \cdot 3,236 \text{E} - 3 = 9,71 \text{ kN/cm}^2$$

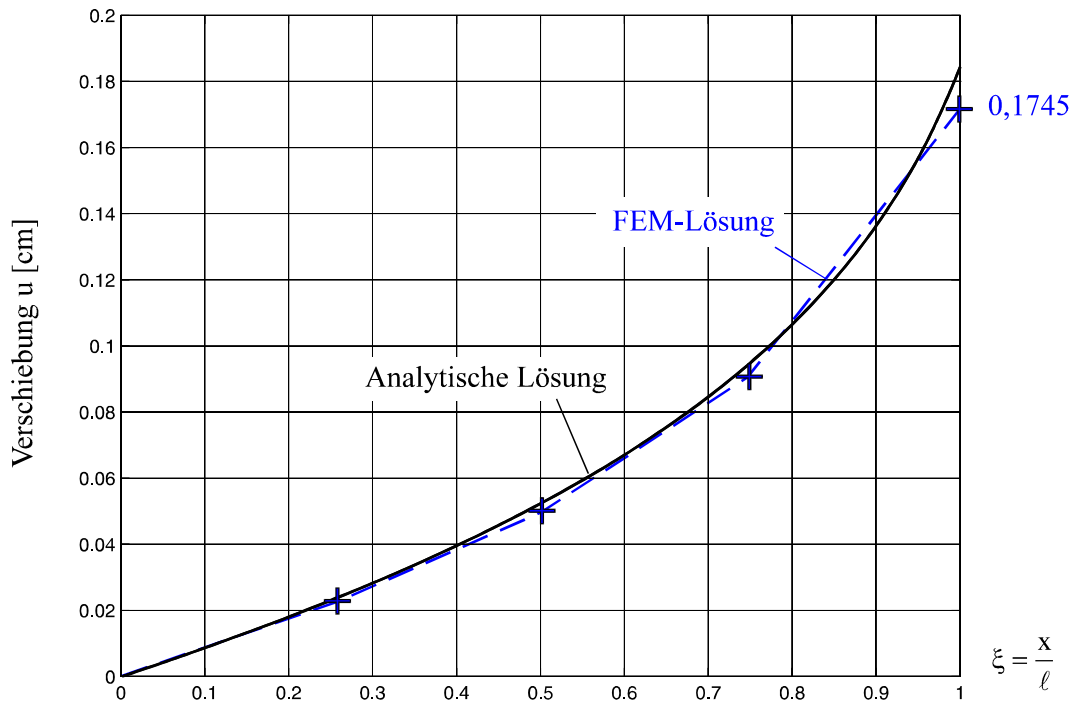


Abb. 9-13 Verschiebung u , Ergebnis für vier Elemente gleicher Länge

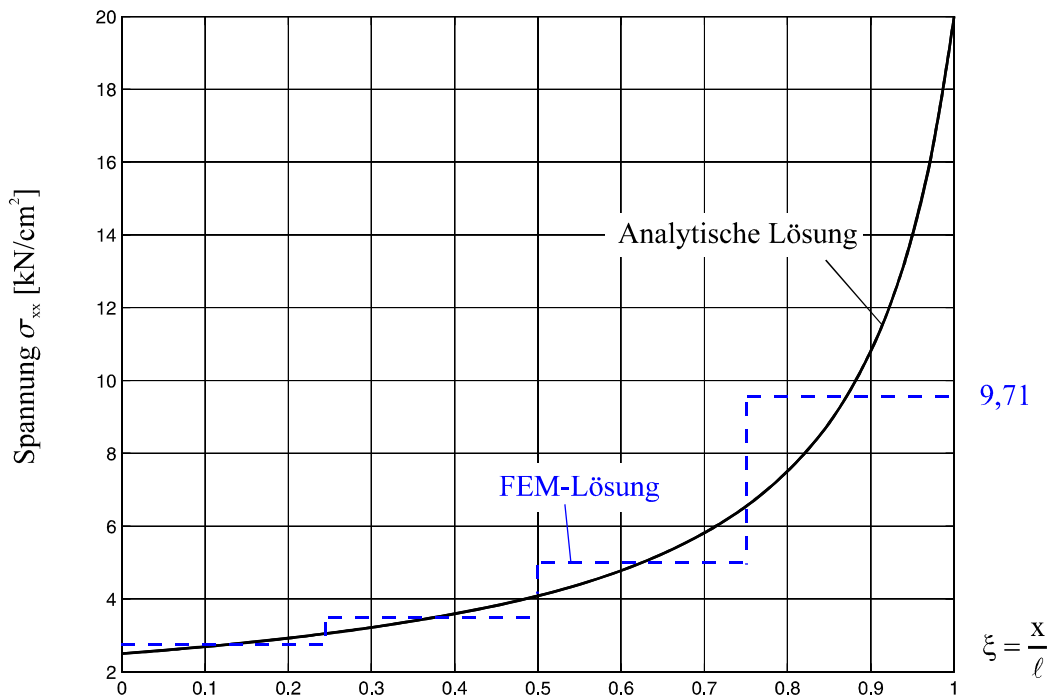


Abb. 9-14 Spannung σ_{xx} , Ergebnis für vier Elemente gleicher Länge

9.2 Stabelement mit quadratischem Verschiebungsansatz

Wird der Grad des Polynoms für die Verschiebungsfunktion $u(\xi)$ erhöht, so sind weitere Zwischenknoten erforderlich. Wählen wir z.B. ein Polynom 2. Ordnung, also

$$u(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 \quad \text{Gl. 9-41}$$

dann können wir den zusätzlichen Freiwert einem weiteren Knoten zuordnen, z.B. im Mittelpunkt des Elementes (Abb. 9-15).

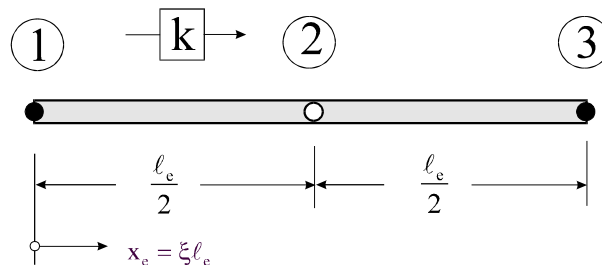


Abb. 9-15 Dehnstab, 3-Knoten-Element

Die drei Konstanten a_0 , a_1 und a_2 werden aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u(0) &= u_1 = a_0 \\ u(1/2) &= u_2 = a_0 + a_1/2 + a_2/4 \\ u(1) &= u_3 = a_0 + a_1 + a_2 \end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned} a_0 &= u_1 \\ a_1 &= -3u_1 + 4u_2 - u_3 \\ a_2 &= 2u_1 - 4u_2 + 2u_3 \end{aligned} \quad \text{Gl. 9-42}$$

ermittelt. Einsetzen dieser Konstanten in Gl. 9-41 liefert

$$u(\xi) = (1 - 3\xi + 2\xi^2) u_1 + 4(\xi - \xi^2) u_2 + (-\xi + 2\xi^2) u_3 \quad \text{Gl. 9-43}$$

Mit den Formfunktionen

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi) &= 1 - 3\xi + 2\xi^2 \\
 N_2(\xi) &= 4\xi(1 - \xi) \\
 N_3(\xi) &= \xi(2\xi - 1)
 \end{aligned}
 \tag{Gl. 9-44}$$

lauten dann die Elementverschiebungen

$$\mathbf{u}(\xi) = N_1(\xi)\mathbf{u}_1 + N_2(\xi)\mathbf{u}_2 + N_3(\xi)\mathbf{u}_3
 \tag{Gl. 9-45}$$

In Abb. 9-16 sind die Formfunktionen für das 3-Knoten-Element dargestellt.

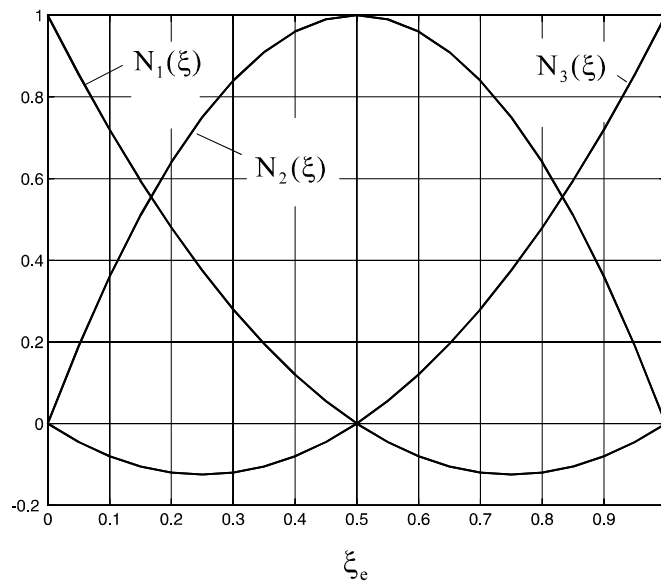


Abb. 9-16 Formfunktionen, quadratischer Ansatz

$$\hat{\mathbf{u}}(x^{(e)}) = [N_1(x^{(e)}), N_2(x^{(e)}), N_3(x^{(e)})] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}
 \tag{Gl. 9-46}$$

Mit diesem Ansatz ist C^0 -Stetigkeit über die Elementgrenzen hinweg gesichert.

$$\delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}^{(e)} \delta \mathbf{u}^{(e)}
 \tag{Gl. 9-47}$$

Wir benötigen wieder die Ableitung der Verschiebungsfunktion $\hat{\mathbf{u}}$. Es gilt

$$\hat{\mathbf{u}}'(x^{(e)}) = \boldsymbol{\varepsilon} = \left[\frac{dN_1}{dx^{(e)}}, \frac{dN_2}{dx^{(e)}}, \frac{dN_3}{dx^{(e)}} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\ell^{(e)}} [4\xi - 3, 4 - 8\xi, 4\xi - 1] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)}
 \tag{Gl. 9-48}$$

Die Querschnittsfläche des Stabes ist linear veränderlich. Bezeichnen A_1 und A_3 die Querschnittsflächen an den entsprechenden Elementknoten, dann gilt:

$$A(x^{(e)}) = A_1 + (A_3 - A_1) \frac{x^{(e)}}{\ell^{(e)}} = (1 - \xi)A_1 + \xi A_3 = [N_1 \quad N_2] \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{A}^{(e)}$$

und für die Elementsteifigkeitsmatrix erhalten wir

$$\mathbf{k}^{(e)} = \int_0^{\ell^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{E}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} A(x^{(e)}) dx^{(e)} = \frac{\mathbf{E}^{(e)}}{6\ell^{(e)}} \begin{bmatrix} 11A_1 + 3A_3 & -4(3A_1 + A_3) & A_1 + A_3 \\ -4(3A_1 + A_3) & 16(A_1 + A_3) & -4(A_1 + 3A_3) \\ A_1 + A_3 & -4(A_1 + 3A_3) & 3A_1 + 11A_3 \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 9-49}$$

Unter der Voraussetzung elementweise konstanter Querschnittsfläche $A_1 = A_3 = A_0 = \text{konst.}$ folgt aus Gl. 9-49

$$\mathbf{k}^{(e)} = \frac{\mathbf{E}^{(e)} A_0}{3\ell^{(e)}} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 9-50}$$

Entsprechend erhalten wir mit $n_0 = \text{konst.}$ den Elementlastvektor

$$\mathbf{p}^{(e)} = \int_0^{\ell^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)T} n_0 dx^{(e)} = n_0 \ell^{(e)} \int_{\xi=0}^1 \begin{bmatrix} 1 - 3\xi + 2\xi^2 \\ 4\xi(1 - \xi) \\ \xi(2\xi - 1) \end{bmatrix} d\xi = \frac{n_0 \ell^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 9-51}$$

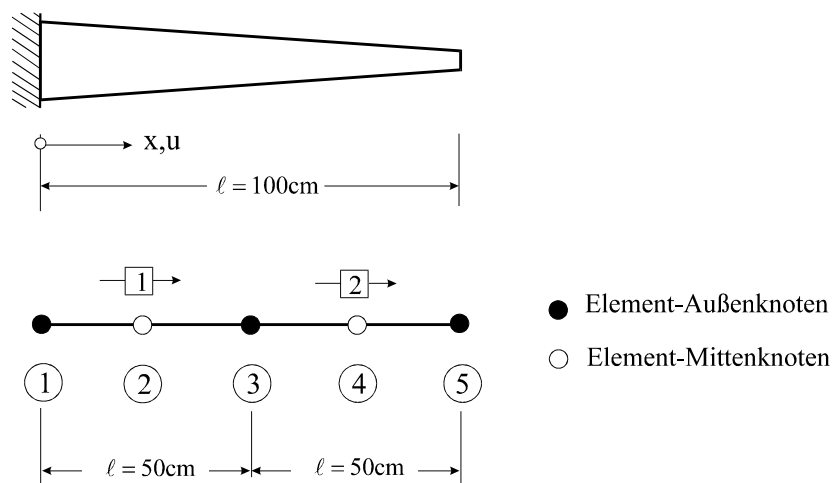


Abb. 9-17 Elementierung eines Dehnstabes, 2 Elemente gleicher Länge (quadratischer Ansatz)

Zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen nach Gl. 9-49 benötigen wir noch die Querschnittsflächen an den Elementrändern.

Element	$E^{(e)}$ [kN/cm ²]	$A_1^{(e)}$ [cm ²]	$A_3^{(e)}$ [cm ²]	$\ell^{(e)}$ [cm]
1	3000	10	5.50	50
2	3000	5.50	1.00	50

Tabelle 9-8 Elementgrößen

$$\mathbf{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1265 & -1420 & 155 \\ -1420 & 2480 & -1060 \\ 155 & -1060 & 905 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} 635 & -700 & 65 \\ -700 & 1040 & -340 \\ 65 & -340 & 275 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}^{(e)} = \frac{n_0 \ell^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5 \cdot 0,5}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,417 \\ 1,667 \\ 0,417 \end{bmatrix}$$

Systemgleichung des gefesselten Systems

$$\begin{bmatrix} 1265 & -1420 & 155 & 0 & 0 \\ -1420 & 2480 & -1060 & 0 & 0 \\ 155 & -1060 & 905+635 & -700 & 65 \\ 0 & 0 & -700 & 1040 & -340 \\ 0 & 0 & 65 & -340 & 275 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,417 + R \\ 1,667 \\ 0,834 \\ 1,667 \\ 20,417 \end{bmatrix}$$

Lösung:

1.) Knotenverschiebungen

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,02302 \\ 0,05228 \\ 0,09571 \\ 0,18022 \end{bmatrix} \text{ [cm]}$$

2.) Reaktionskraft

$$R = -1420 \cdot 0,02302 + 155 \cdot 0,05228 - 0,417 = -24,99 \approx -25 \text{ kN}$$

3.) Elementverschiebungen

Element 1:

$$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{N}^{(1)} \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{N}^{(1)} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{v} = [1 - 3\xi + 2\xi^2, 4\xi(1 - \xi), \xi(2\xi - 1)] \begin{bmatrix} 0 \\ 0,02302 \\ 0,05228 \\ 0,09571 \\ 0,18022 \end{bmatrix}$$

$$= 3,979 \cdot 10^{-2} \xi + 1,248 \cdot 10^{-2} \xi^2 \quad [\text{cm}]$$

Element 2:

$$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{N}^{(2)} \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{N}^{(2)} \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{v} = [1 - 3\xi + 2\xi^2, 4\xi(1 - \xi), \xi(2\xi - 1)] \begin{bmatrix} 0 \\ 0,02302 \\ 0,05228 \\ 0,09571 \\ 0,18022 \end{bmatrix}$$

$$= 5,228 \cdot 10^{-2} + 4,577 \cdot 10^{-2} \xi + 8,216 \cdot 10^{-2} \xi^2 \quad [\text{cm}]$$

4.) Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = E^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = E^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = E^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{A}^{(e)} \mathbf{v}$$

Element 1:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = E^{(1)} \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{v} = \frac{3000}{50} [4\xi - 3, 4 - 8\xi, 4\xi - 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0,02302 \\ 0,05228 \\ 0,09571 \\ 0,18022 \end{bmatrix}$$

$$= 2,388 + 1,499\xi \quad [\text{kN/cm}^2]$$

Element 2:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = E^{(2)} \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{v} = \frac{3000}{50} [4\xi - 3, 4 - 8\xi, 4\xi - 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0,02302 \\ 0,05228 \\ 0,09571 \\ 0,18022 \end{bmatrix}$$

$$= 2,746 + 9,859\xi \quad [\text{kN/cm}^2]$$

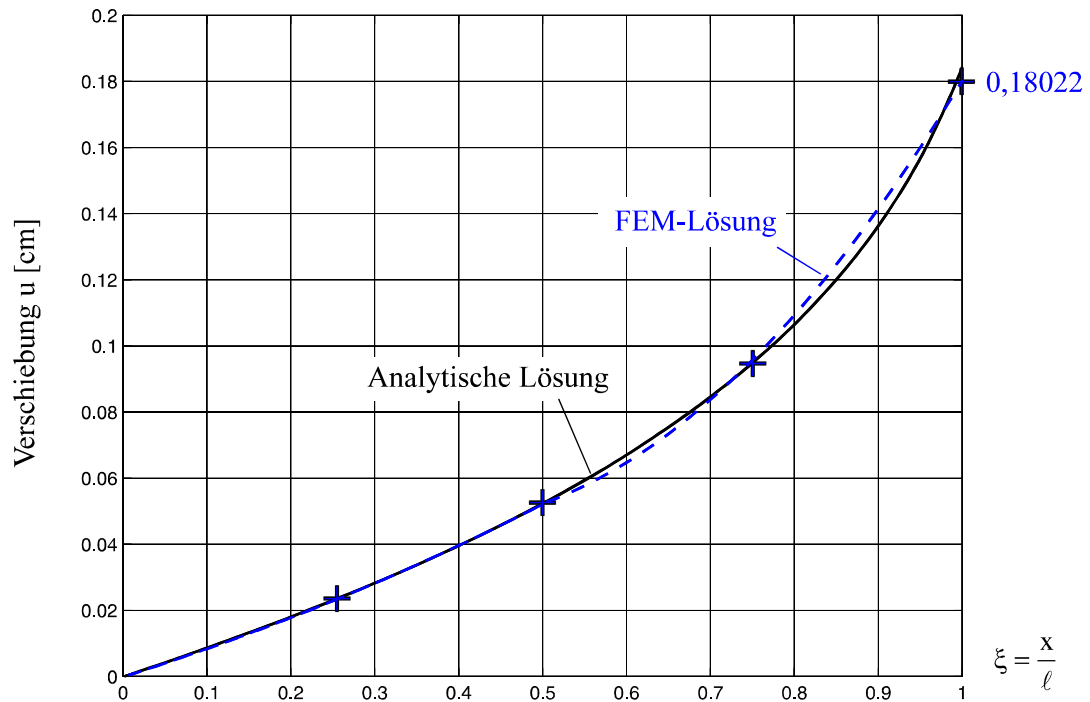


Abb. 9-18 Verschiebung u , Ergebnis für zwei Elemente gleicher Länge (quadratischer Ansatz)

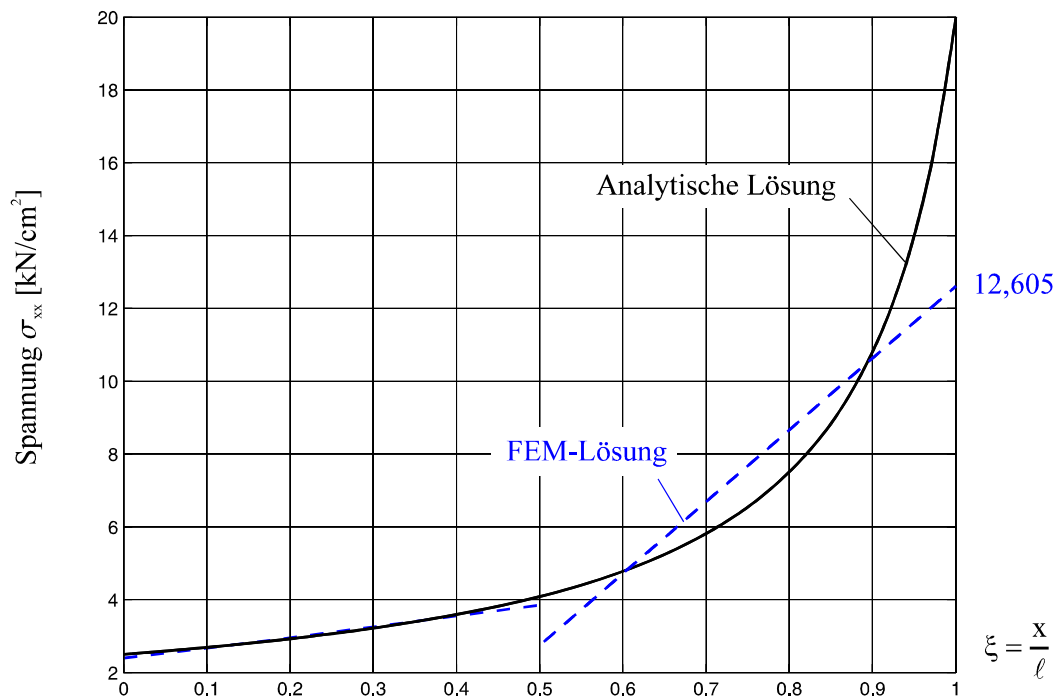


Abb. 9-19 Spannung σ_{xx} , Ergebnis für zwei Elemente gleicher Länge (quadratischer Ansatz)

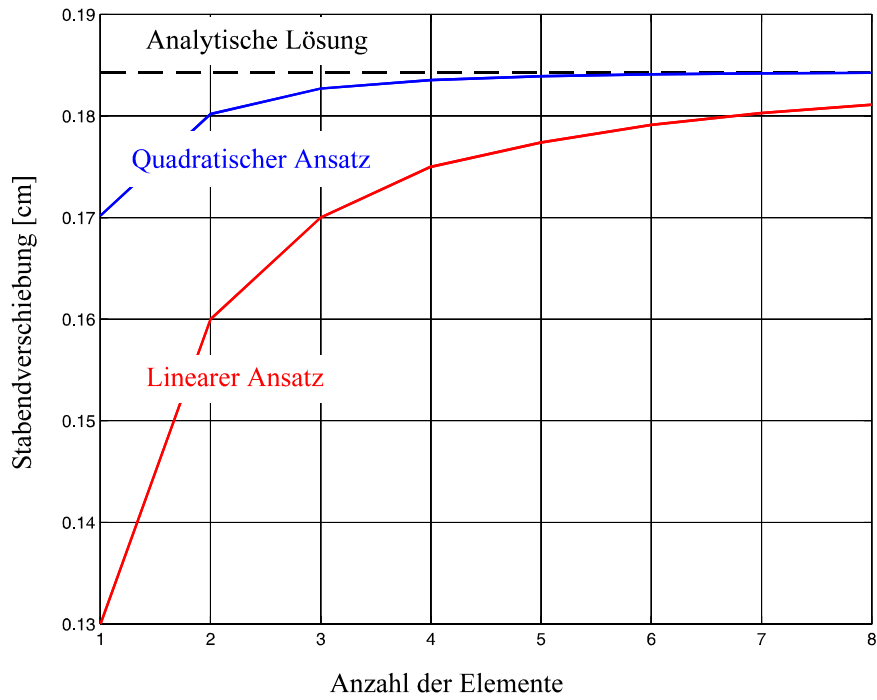


Abb. 9-20 Verschiebung am Stabende in Abhängigkeit von der Elementanzahl

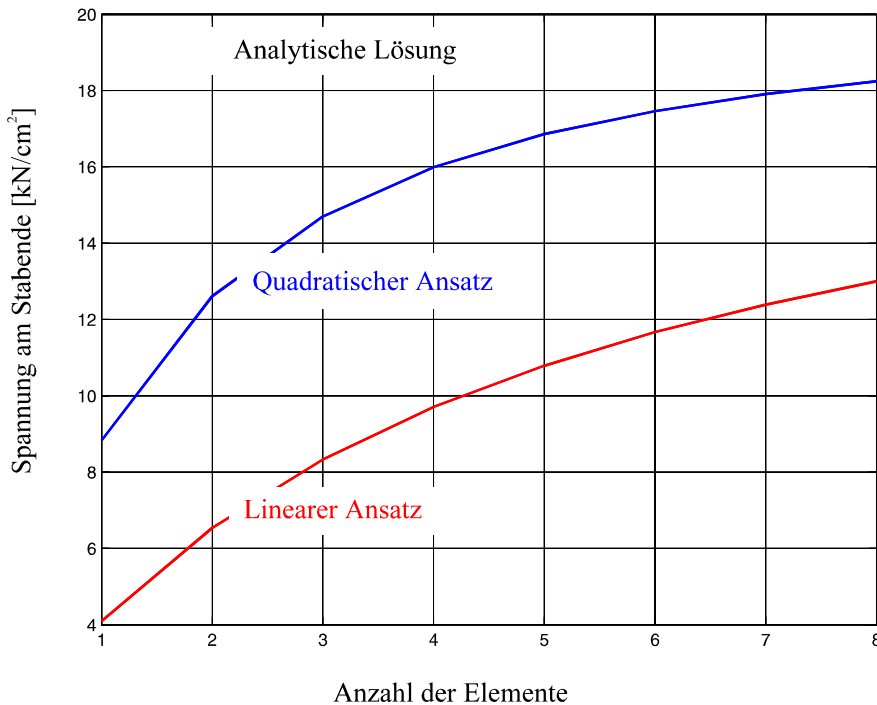


Abb. 9-21 Spannung am Stabende in Abhängigkeit von der Elementanzahl

Ein Blick auf das Verschiebungsfeld in Abb. 9-18 zeigt, daß, obwohl nur zwei Elemente verwendet wurden, bereits eine sehr gute Übereinstimmung mit den analytischen Werten besteht. Für die Spannungen gilt das nur im ersten Element (Abb. 9-19). Dort ist die Spannungsänderung jedoch nicht so stark, wie in der zweiten Hälfte. Am Elementübergang tritt ein Spannungssprung auf. Mit feiner werdender Elementierung lassen sich die Ergebnisse für die Verschiebungen und Spannungen noch erheblich verbessern. Abb. 9-20 und Abb. 9-21 zeigen die Entwicklung Zustandsgrößen bei Verwendung gleicher Elementlängen und zunehmender Anzahl der Elemente. Das Element mit quadratischem Verschiebungsansatz zeigt für beide Zustandsgrößen die besseren Ergebnisse. Allerdings ist beim Element mit quadratischem Verschiebungsansatz infolge des zusätzlichen Mittenknotens, und damit einer zusätzlichen Unbekannten je Element, die Rechenzeit größer als beim linearen Element.

Den analytischen Lösungen für die Verschiebungen und Spannungen ist zu entnehmen, daß die Änderung der Zustandsgrößen (ihre Gradienten) mit Annäherung an den rechten Rand zunehmen. Es liegt daher nahe, auch die Elementierung zum rechten Rand hin zu verdichten. Wir wählen ein Elementnetz entsprechend Abb. 9-22. Die rechte Stabhälfte wurde nochmals in 2 Elemente gleicher Länge (25 cm) unterteilt. Die analytische Lösung des linken Bereichs zeigt eine nahezu lineare Veränderlichkeit der Zustandsgrößen, hier kann also recht grob elementiert werden.

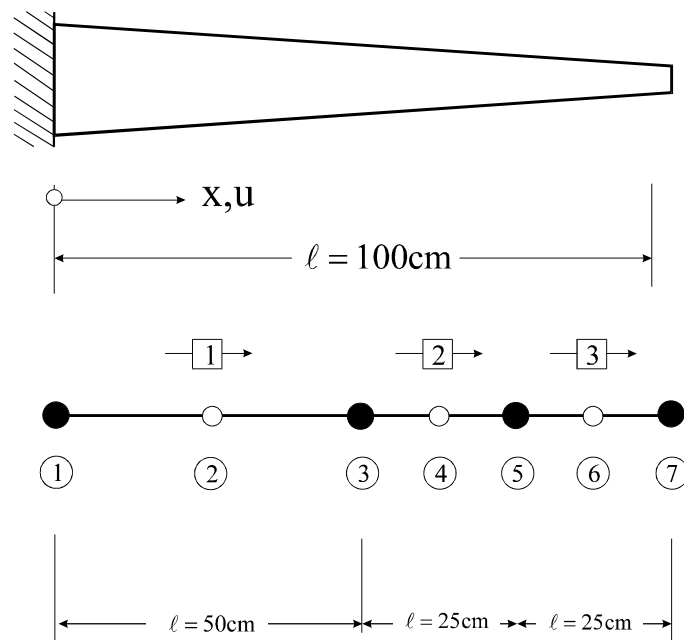


Abb. 9-22 Elementierung eines Dehnstabes, 3 Elemente ungleicher Länge, quadratischer Ansatz

Knotennummer	x-Koordinate [cm]
1	0
2	25
3	50
4	62,5
5	75
6	87,5
7	100

Tabelle 9-9 Knotendatei, 3 Elemente ungleicher Länge, quadratischer Verschiebungsansatz

Elementnummer	Anfangsknoten	Mittenknoten	Endknoten
1	1	2	3
2	3	4	5
2	5	6	7

Tabelle 9-10 Elementdatei, 3 Elemente ungleicher Länge, quadratischer Verschiebungsansatz

Zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen nach Gl. 9-49 benötigen wir wieder die Querschnittsflächen an den Elementrändern.

Element	$E^{(e)}$ [kN/cm ²]	$A_1^{(e)}$ [cm ²]	$A_3^{(e)}$ [cm ²]	$\ell^{(e)}$ [cm]
1	3000	10	5,50	50
2	3000	5,50	3,25	25
3	3000	3,25	1,00	25

Tabelle 9-11 Elementgrößen

Systemgleichung

$$\begin{bmatrix}
 1265 & -1420 & 155 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 2480 & -1060 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 2310 & -1580 & 175 & 0 & 0 \\
 & & & 2800 & -1220 & 0 & 0 \\
 & & & & 1820 & -860 & 85 \\
 & & & & & 1360 & -500 \\
 \text{symm.} & & & & & & 415
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 v_5 \\
 v_6 \\
 v_7
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0,4167 + R \\
 1,6667 \\
 0,6250 \\
 0,8333 \\
 0,4166 \\
 0,8333 \\
 20,2083
 \end{bmatrix}$$

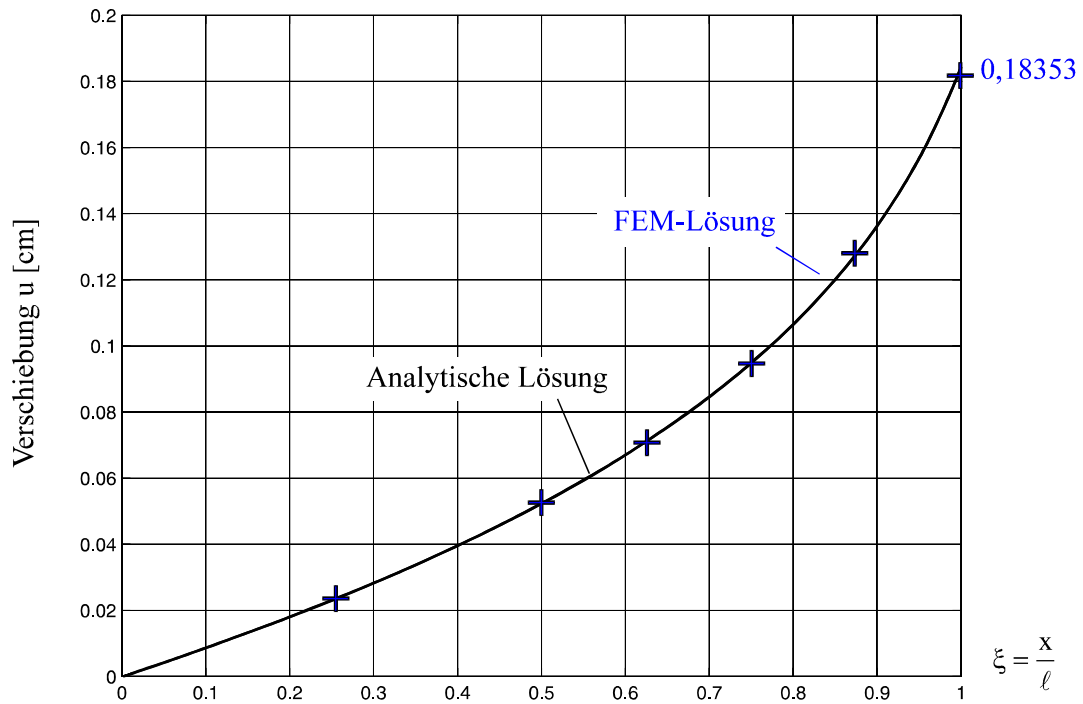


Abb. 9-23 Verschiebungen, 3 Elemente ungleicher Länge, quadratischer Ansatz

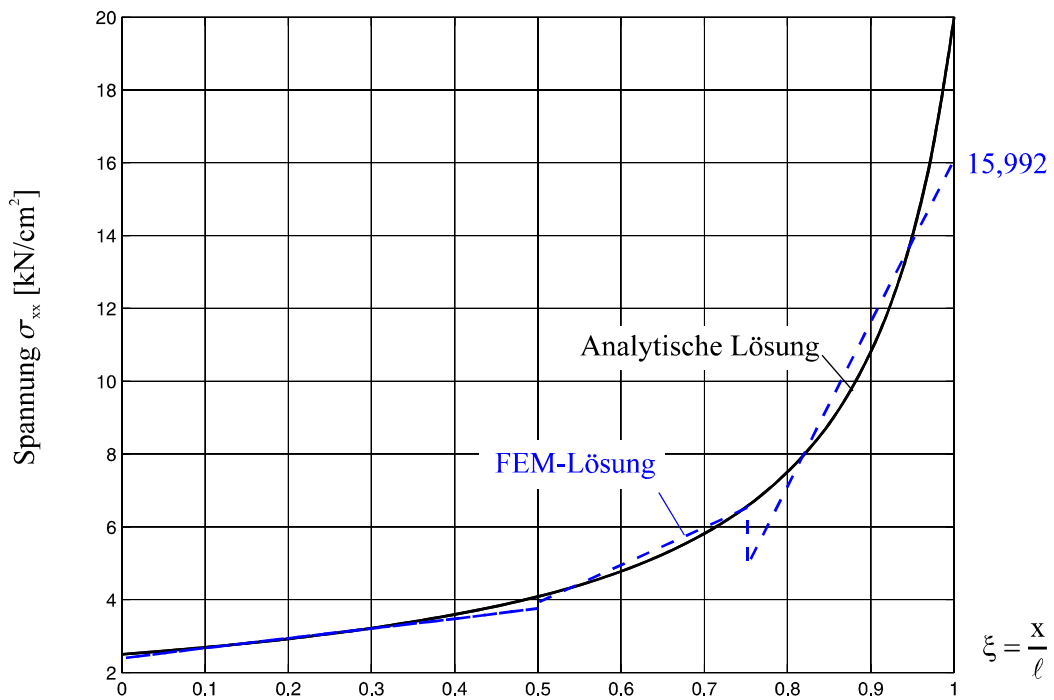


Abb. 9-24 Spannungen, 3 Elemente ungleicher Länge, quadratischer Ansatz

Knotenverschiebungen:

$$\mathbf{v}^T = [0 \quad 0,02302 \quad 0,05228 \quad 0,07110 \quad 0,09479 \quad 0,12802 \quad 0,18353] \quad [\text{cm}]$$

Elementverschiebungen:

$$\text{Element 1: } \xi(0,03979 + 0,01249\xi) \quad [\text{cm}]$$

$$\text{Element 2: } 0,05228 + 0,032763\xi + 0,009738 \xi^2 \quad [\text{cm}]$$

$$\text{Element 3: } 0,09478 + 0,044211\xi + 0,044529 \xi^2 \quad [\text{cm}]$$

Elementspannungen:

$$\text{Element 1: } 2,3876 + 1,4983\xi \quad [\text{kN/cm}^2]$$

$$\text{Element 2: } 3,9316 + 2,3372\xi \quad [\text{kN/cm}^2]$$

$$\text{Element 3: } 5,3053 + 10,6870\xi \quad [\text{kN/cm}^2]$$

Die errechneten Verschiebungen sind praktisch deckungsgleich mit den analytischen Werten. Bei den Spannungen hat sich im rechten Bereich eine wesentliche Verbesserung im Vergleich zu einer äquidistanten Elementierung mit 3 Elementen ergeben. Der Maximalwert am rechten Rand ($\sigma_{FE} = 16,00 \text{ kN/cm}^2$) liegt näher an der analytischen Lösung, der relative Fehler beträgt aber immer noch etwa 20%. Eine Verbesserung der Spannungsergebnisse kann durch feinere Elementierung in der rechten Stabhälfte erzielt werden.

9.3 Statische Kondensation

In den vorangegangenen Untersuchungen wurde gezeigt, daß bei Verwendung eines Polynomansatzes n -ter Ordnung für die Verschiebungen genau $n + 1$ Freiwerte anfallen. Bei einem linearen Verschiebungsansatz waren das genau 2 Freiwerte, die wir den Knotenverschiebungen u_1 und u_2 zuordneten. Bei Verwendung eines Polynoms 2. Ordnung (quadratischer Verschiebungsansatz, 3 Freiwerte) wurde zur Abdeckung des dritten Freiwertes ein zusätzlicher Knoten in Elementmitte eingeführt. Da dieser Knotenfreiwert nur mit den äußeren Knotenwerten des Elementes verknüpft ist, wird im folgenden versucht, diesen inneren Knotenfreiwert bereits auf Elementebene durch die äußeren Knotenwerte zu ersetzen. Dieser Vorgang wird **statische Kondensation**¹ genannt.

¹ spätl. >Verdichtung<

Ausgangspunkt unserer Untersuchungen ist der auf das Element entfallende Anteil des elastischen Potentials

$$\hat{\Pi}_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} - \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{r}^{(e)} \quad \text{Gl. 9-52}$$

Durch Summation über alle Elemente erhalten wir das vollständige Funktional

$$\hat{\Pi} = \sum_{e=1}^n \hat{\Pi}_e = \sum_{e=1}^n \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} - \mathbf{u}^{(e)T} \mathbf{r}^{(e)} \right) = \text{Extremum} \quad \text{Gl. 9-53}$$

Im **Elementlastvektor** $\mathbf{r}^{(e)}$ sind sämtliche Elementbeiträge zum Lastvektor der rechten Seite zusammengefaßt. Die Variation des elastischen Potentials liefert

$$\delta \hat{\Pi} = \sum_{e=1}^n \delta \hat{\Pi}_e = \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}^{(e)T} (\mathbf{k}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} - \mathbf{r}^{(e)}) = 0$$

Für jedes Element ist also

$$\delta \mathbf{u}^{(e)T} (\mathbf{k}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} - \mathbf{r}^{(e)}) = 0 \quad \text{Gl. 9-54}$$

sicherzustellen. Es wird nun eine Umsortierung derart vorgenommen, daß im Elementknotenverschiebungsvektor $\mathbf{u}^{(e)}$ sowie im Vektor der rechten Seite $\mathbf{r}^{(e)}$ die Knotenwerte wie folgt zusammengefaßt werden¹

$$\mathbf{k}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{r}^{(e)} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa}^{(e)} & \mathbf{k}_{ai}^{(e)} \\ \mathbf{k}_{ia}^{(e)} & \mathbf{k}_{ii}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a^{(e)} \\ \mathbf{u}_i^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_a^{(e)} \\ \mathbf{r}_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 9-55}$$

Damit zerfällt das obige Gleichungssystem in die beiden Matrixgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{aa}^{(e)} \mathbf{u}_a^{(e)} + \mathbf{k}_{ai}^{(e)} \mathbf{u}_i^{(e)} &= \mathbf{r}_a^{(e)} \\ \mathbf{k}_{ia}^{(e)} \mathbf{u}_a^{(e)} + \mathbf{k}_{ii}^{(e)} \mathbf{u}_i^{(e)} &= \mathbf{r}_i^{(e)} \end{aligned} \quad \text{Gl. 9-56}$$

Aus der zweiten Gleichung kann $\mathbf{u}_i^{(e)}$ sofort ermittelt werden

$$\mathbf{u}_i^{(e)} = \mathbf{k}_{ii}^{(e)-1} [\mathbf{r}_i^{(e)} - \mathbf{k}_{ia}^{(e)} \mathbf{u}_a^{(e)}] \quad \text{Gl. 9-57}$$

¹ was durch einfache Zeilen- und Spaltentausche immer möglich ist

Setzen wir dieses Ergebnis in die erste Gleichung ein, dann erhalten wir zunächst

$$\mathbf{k}_{aa}^{(e)} \mathbf{u}_a^{(e)} + \mathbf{k}_{ai}^{(e)} \mathbf{k}_{ii}^{(e)-1} [\mathbf{r}_i^{(e)} - \mathbf{k}_{ia}^{(e)} \mathbf{u}_a^{(e)}] = \mathbf{r}_a^{(e)}$$

und zusammengefaßt

$$[\mathbf{k}_{aa}^{(e)} - \mathbf{k}_{ai}^{(e)} \mathbf{k}_{ii}^{(e)-1} \mathbf{k}_{ia}^{(e)}] \mathbf{u}_a^{(e)} + \mathbf{k}_{ai}^{(e)} \mathbf{k}_{ii}^{(e)-1} \mathbf{r}_i^{(e)} - \mathbf{r}_a^{(e)} = 0 \quad \text{Gl. 9-58}$$

Der Gl. 9-58 entnehmen wir die **kondensierten Elementsteifigkeitsmatrix**

$$\hat{\mathbf{k}}^{(e)} = \mathbf{k}_{aa}^{(e)} - \mathbf{k}_{ai}^{(e)} \mathbf{k}_{ii}^{(e)-1} \mathbf{k}_{ia}^{(e)} \quad \text{Gl. 9-59}$$

und den **kondensierten Elementlastvektor** der rechten Seite

$$\hat{\mathbf{r}}^{(e)} = \mathbf{r}_a^{(e)} - \mathbf{k}_{ai}^{(e)} \mathbf{k}_{ii}^{(e)-1} \mathbf{r}_i^{(e)} \quad \text{Gl. 9-60}$$

Mit diesen Abkürzungen können wir Gl. 9-58 auch kürzer schreiben

$$\hat{\mathbf{k}}^{(e)} \mathbf{u}_a^{(e)} - \hat{\mathbf{r}}^{(e)} = 0 \quad \text{Gl. 9-61}$$

Wir wenden die obigen Gleichungen auf das Stabelement mit quadratischem Verschiebungsansatz an.

$$\mathbf{k}^{(e)} = \frac{E_e}{6\ell_e} \begin{bmatrix} 11A_1 + 3A_3 & -4(3A_1 + A_3) & A_1 + A_3 \\ -4(3A_1 + A_3) & 16(A_1 + A_3) & -4(A_1 + 3A_3) \\ A_1 + A_3 & -4(A_1 + 3A_3) & 3A_1 + 11A_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}_e = \frac{n_0 \ell_e}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Das Element besitzt neben den beiden Außenknoten einen zusätzlichen Mittenknoten, den wir durch statische Kondensation auf Elementebene eliminieren wollen. Der herauszukondensierende Knoten ist der Mittenknoten 2. Wir haben also in der Steifigkeitsmatrix die 2. und 3. spalte und Zeile zu tauschen. Nach der Umsortierung erhalten wir

$$\mathbf{k}^{(e)} = \frac{E_e}{6\ell_e} \left[\begin{array}{cc|c} 11A_1 + 3A_3 & A_1 + A_3 & -4(3A_1 + A_3) \\ A_1 + A_3 & 3A_1 + 11A_3 & -4(A_1 + 3A_3) \\ \hline -4(3A_1 + A_3) & -4(A_1 + 3A_3) & 16(A_1 + A_3) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{k}_{aa}^{(e)} & \mathbf{k}_{ai}^{(e)} \\ \mathbf{k}_{ia}^{(e)} & \mathbf{k}_{ii}^{(e)} \end{array} \right] \quad \text{Gl. 9-62}$$

$$\mathbf{u}^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a^{(e)} \\ \mathbf{u}_i^{(e)} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p}^{(e)} = \frac{n_0 \ell_e}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_a^{(e)} \\ p_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 9-63}$$

Gl. 9-62 entnehmen wir die Teilmatrizen

$$\mathbf{k}_{aa}^{(e)} = \frac{E_e}{6\ell_e} \left[\begin{array}{c|c} 11A_1 + 3A_3 & A_1 + A_3 \\ \hline A_1 + A_3 & 3A_1 + 11A_3 \end{array} \right] \quad \mathbf{k}_{ai}^{(e)} = -\frac{2E_e}{3\ell_e} \begin{bmatrix} 3A_1 + A_3 \\ A_1 + 3A_3 \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{ia}^{(e)\text{T}} \quad \text{Gl. 9-64}$$

$$\mathbf{k}_{ii}^{(e)} = \frac{8E_e}{3\ell_e} [A_1 + A_3] \quad \mathbf{k}_{ii}^{(e)-1} = \frac{3\ell_e}{8E_e} [1/(A_1 + A_3)]$$

$$\mathbf{r}_a^{(e)} = \frac{n_0 \ell_e}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{r}_i^{(e)} = \frac{2n_0 \ell_e}{3} [1] \quad \text{Gl. 9-65}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}}^{(e)} &= \mathbf{k}_{aa}^{(e)} - \mathbf{k}_{ai}^{(e)} \mathbf{k}_{ii}^{(e)-1} \mathbf{k}_{ia}^{(e)} \\ &= \frac{E_e}{3(A_1 + A_3)\ell_e} \left[\begin{array}{c|c} A_1^2 + 4A_1A_3 + A_3^2 & -(A_1^2 + 4A_1A_3 + A_3^2) \\ \hline -(A_1^2 + 4A_1A_3 + A_3^2) & A_1^2 + 4A_1A_3 + A_3^2 \end{array} \right] \end{aligned} \quad \text{Gl. 9-66}$$

kondensierter Elementlastvektor der rechten Seite

$$\hat{\mathbf{r}}^{(e)} = \mathbf{r}_a^{(e)} - \mathbf{k}_{ai}^{(e)} \mathbf{k}_{ii}^{(e)-1} \mathbf{r}_i^{(e)} = \frac{n_0 \ell_e}{3(A_1 + A_3)} \begin{bmatrix} 2A_1 + A_3 \\ A_1 + 2A_3 \end{bmatrix} \quad \text{Gl. 9-67}$$

Entsprechend Gl. 9-66 und Gl. 9-67 erhalten wir die Elementgrößen

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 451.9354838 & -451.9354838 \\ -451.9354838 & 451.9354838 \end{bmatrix}; & \hat{\mathbf{r}}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1.370967742 \\ 1.129032258 \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{k}}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 163.8461539 & -163.8461539 \\ -163.8461539 & 163.8461539 \end{bmatrix}; & \hat{\mathbf{r}}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 1.538461539 \\ .9615384615 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{Gl. 9-68}$$

Die Systemgleichung des gefesselten Systems kann dann unter Berücksichtigung der Einzelkraft am Knoten 5 (20kN) leicht aufgebaut werden

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 451.9354838 & -451.9354838 & 0 & & & \\ -451.9354838 & 615.7816377 & -163.8461539 & & & \\ 0 & -163.8461539 & 163.8461539 & & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ v_3 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.370968 + R \\ 2.667494 \\ 20.961538 \end{bmatrix}$$

1.) Knotenverschiebungen

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,05228 \\ 0,18022 \end{bmatrix} [\text{cm}]$$

2.) Reaktionskraft

$$R = -451.9354838 \cdot 0,05228 - 1.370968 = -25 \text{ kN}$$

Für den Sonderfall elementweise konstanter Querschnittsfläche $A_1 = A_3 = A_0 = \text{konst.}$ erhalten wir

$$\hat{\mathbf{k}}^{(e)} = \frac{E^{(e)} A_0}{\ell^{(e)}} \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \right]$$

was Gl. 9-22 entspricht. Die Verschiebung der Elementmittenknoten ergeben sich sofort aus Gl. 9-57.

