Mathematische Hilfsmittel

Lateinische Schrift

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w

x y z ß ä ö ü

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T

U V W X Y Z Ä Ö Ü

Griechische Schrift

α	β	γ	δ	ε	ς	η	ϑ	ι	κ	λ	μ
Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta	Eta	Theta	Jota	Kappa	Lambda	My
ν	ξ	ο	π	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω
Ny	Ksi	Omikron	Pi	Rho	Sigma	Tau	Ypsilon	Phi	Chi	Psi	Omega

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ
Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta	Eta	Theta	Jota	Kappa	Lambda	My
Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω
Ny	Ksi	Omikron	Pi	Rho	Sigma	Tau	Ypsilon	Phi	Chi	Psi	Omega

1 Lineare Algebra

1.1 Mengen

Definition 1-1

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte werden Elemente der Menge genannt.

Definition 1-2

Die leere Menge ist eine Menge, die kein Element enthält.

Definition 1-3

Die Mengen A und B heißen **gleich**, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und umgekehrt.

Definition 1-4

B ist eine **Teilmenge** von A, wenn jedes Element von B auch Element von A ist: $B \subseteq \mathrm{A}$.

Definition 1-5

Die Vereinigungsmenge von A und B ($A \cup B$) ist die Menge, die aus allen Elementen besteht, die zu A oder B, oder beiden gehören.

Zahlenmengen

Menge der natürlichen Zahlen	$\mathbb{N} = \{1,2,3...\}$
Menge der ganzen Zahlen	$\mathbb{Z} = \{...-2,-1,0,1,2..\}$
Menge der rationalen Zahlen	$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{Z}\}$

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ besteht aus den rationalen Zahlen und den irrationalen Zahlen.

1.2 Koordinaten

Definition 1-6

Koordinaten[1] dienen dazu, Punkte in der Ebene oder im Raum festzulegen. Dazu ist ein *Koordinatensystem* erforderlich. Das am häufigsten verwendete ist das *kartesische*[2] (rechtwinklige) Koordinatensystem. Im einfachsten Fall, der Ebene, besteht es aus zwei zueinander senkrechten Zahlengeraden, den *Koordinatenachsen*, die sich im Nullpunkt schneiden. Sie bilden das *Achsenkreuz*. Der gemeinsame Ursprung wird *Nullpunkt* oder *Koordinatenanfangspunkt* genannt (Abb. 1-1).

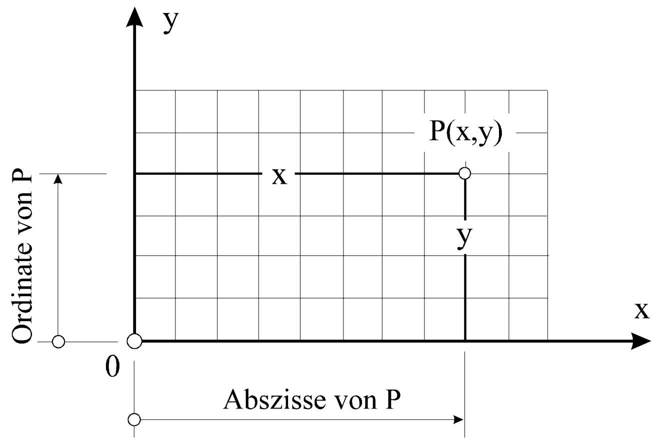


Abb. 1-1 Kartesische Koordinaten eines Punktes *P*

Definition 1-7

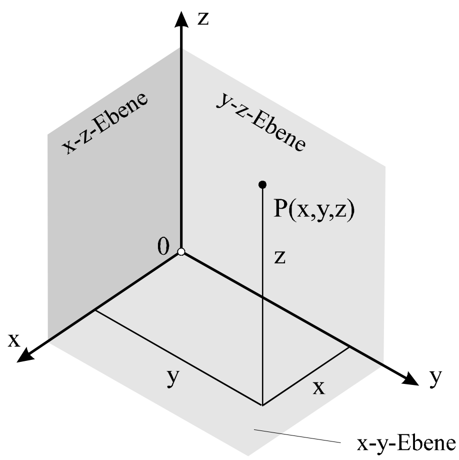


Abb. 1-2: Räumliche kartesische Koordinaten

Im Fall **räumlich kartesischer Koordinaten** ist die Orientierung der Achsen ist wie folgt festgelegt: Schauen wir gegen die *z*-Richtung (also von oben), so geht die positive *x*-Achse durch eine Linksdrehung um 90° in die positive *y*-Achse über. Die drei Achsen bilden ein *Rechtssystem*. Je zwei Achsen spannen eine Ebene im Raum auf, diese bilden ein ebenes kartesisches Koordinatensystem. Es gibt die *x*-*y*-Ebene, die *x*-*z*-Ebene und die *y*-*z*-Ebene (Abb. 1-2)

[1] zu kon ... und lat. ordinare = ordnen, also etwa ›einander Zugeordnete‹
[2] René Descartes, latinisiert Renatus Cartesius, frz. Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler, 1596-1650

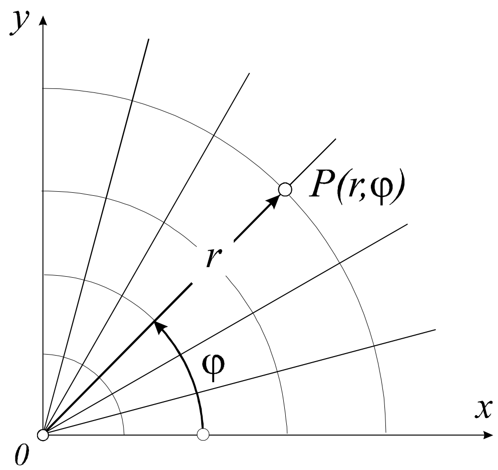


Abb. 1-3: Ebene Zylinderkoordinaten

Definition 1-8

Das ebene **Polarkoordinatensystem** besteht aus einem Punkt 0 (dem Pol) der Ebene und einem von 0 ausgehenden Fahrstrahl, der Polarachse. Die Darstellung eines Punktes P erfolgt durch das ebene Polarkoordinatenpaar (r, φ), wobei *r* der Abstand von P zum 0-Punkt und φ der Winkel ist, den die x-Achse mit dem Fahrstrahl 0-P einschließt (Abb. 1-3).

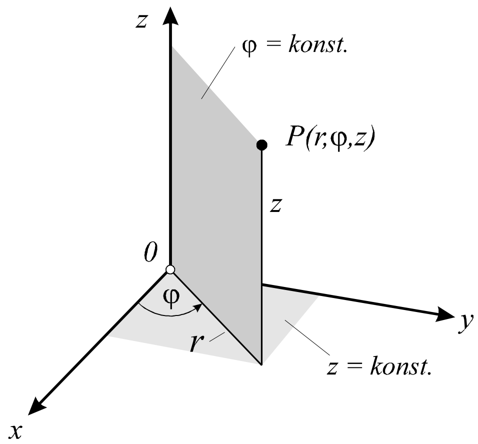


Abb. 1-4: Räumliche Zylinderkoordinaten

Definition 1-9

Im räumlichen Zylinderkoordinatensystem (Abb. 1-4) sind die Koordinatenflächen einmal die zur z-Achse senkrechten Ebenen (z = konst.), die von der z-Achse ausgehenden Halbebenen (φ = konst.) und die Zylinderflächen, deren Achse die z-Achse ist (r = konst.).

Definition 1-10

Im **räumlichen Polarkoordinatensystem** ist neben einem Punkt *0* als Pol und einer von *0* ausgehenden Polarachse eine Ebene (*Polarebene*) angegeben, die die Polarachse enthält.

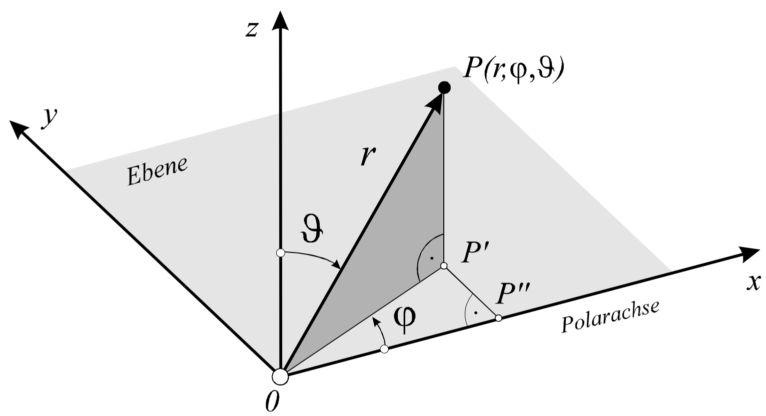


Abb. 1-5: Räumliche Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten)

Ein Punkt im Raum wird durch das Tripel (r, φ, ϑ) eindeutig bestimmt. Dabei ist *r* der Abstand des Punktes P vom Punkt 0, φ der Winkel zwischen der Polarachse und der Projektion der Strecke $\overline{0P}$ in die x-y- Ebene und ϑ der Winkel zwischen $\overline{0P}$ und dem von *0* ausgehenden, auf der x-y-Ebene senkrecht stehenden Strahl, der zusammen mit der Polarachse ein Rechtssystem bildet.

Definition 1-11

Unter einer **Koordinatentransformation**[1] wird der Übergang von einem Koordinatensystem mit den Koordinaten zu einem anderen Koordinatensystem mittels Transformationsgleichungen verstanden.

Definition 1-12

Transformation ebener kartesischer Koordinaten bei einer **Parallelverschiebung** des Koordinatensystems (Abb. 1-6).

$$\begin{aligned} x &= u - b \\ y &= v - a \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} u &= x + b \\ v &= y + a \end{aligned}$$

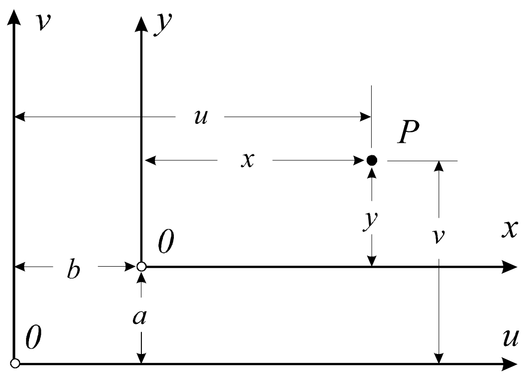


Abb. 1-6: Parallelverschiebung kartesischer Koordinaten

Definition 1-13

Transformation ebener kartesischer Koordinaten bei einer **Drehung** des Koordinatensystems (Abb. 1-7).

$$\begin{aligned} x &= u\cos\varphi - v\sin\varphi \\ y &= u\sin\varphi + v\cos\varphi \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} u &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ v &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned}$$

[1] lat. transferre = hinübertragen, hinüberbringen

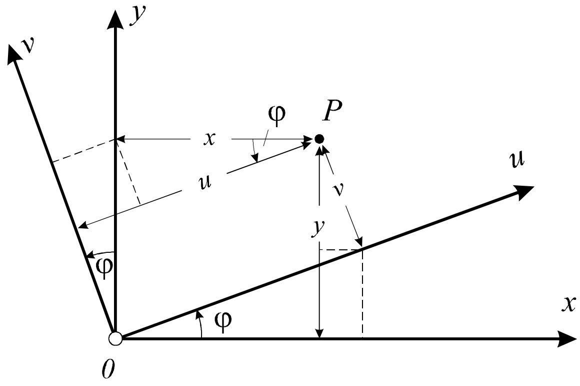


Abb. 1-7: Drehung eines kartesischen Koordinatensystems

Definition 1-14

Transformation kartesischer Koordinaten in **räumliche Zylinderkoordinaten**

$$x = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r\sin\varphi \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$
$$z = z \qquad z = z$$

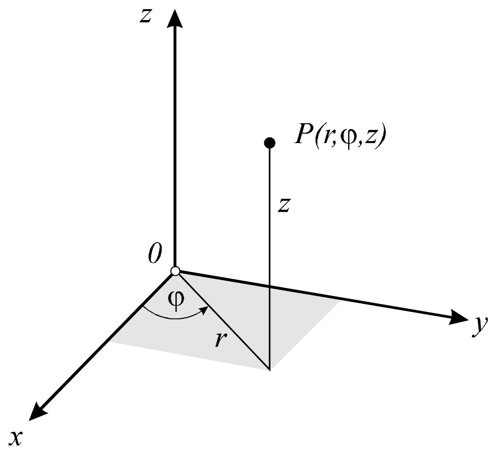


Abb. 1-8: Räumliche Zylinderkoordinaten, ebene Polarkoordinaten und *z*-Richtung

Definition 1-15

Transformation kartesischer Koordinaten in **räumliche Polarkoordinaten** (**Kugelkoordinaten**)

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$y = r\sin\varphi\sin\vartheta \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$
$$z = r\cos\vartheta \qquad \vartheta = \arctan\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

Definitionsbereiche:
$$0 \le r \le \infty$$
$$-\pi < \varphi \le \pi$$
$$0 \le \vartheta \le \pi$$

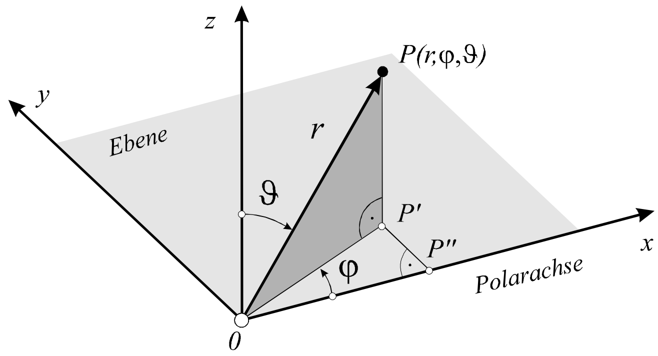


Abb. 1-9 Räumliche Polarkoordinaten, Kugelkoordinaten

2 Definitionen und Rechenregeln für Vektoren

Definition 2-1
Ein **Skalar**[1] ist eine reelle Zahl.

Definition 2-2
Ein Vektor[2] entspricht einer physikalischen Größe, die einen Betrag und eine Richtung hat[3]. Eine Vektorgröße kann zur geometrischen Interpretation durch einen Pfeil dargestellt werden, dessen Länge den Betrag und dessen Spitze die Richtung und die Orientierung angibt. Beispiele für vektorielle physikalische Größen sind Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung. Die Definition zeigt, dass für die Angabe einer vektoriellen Größe mehr als eine Zahl erforderlich ist und dass sich eine vektorielle Größe beim Übergang in ein anderes Koordinatensystem in bestimmter Weise **transformiert**.

Definition 2-3

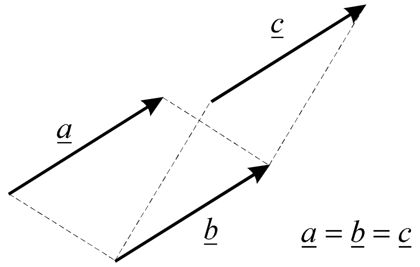


Abb. 2-1 Freie Vektoren

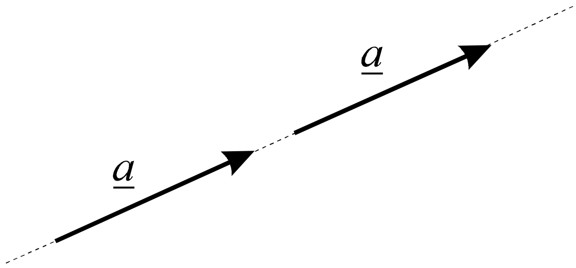


Abb. 2-2 Linienflüchtige Vektoren

---
[1] zu lat. scalaris = zur Leiter, Treppe gehörig
[2] lat. vector = Träger, Fahrer, zu lat. vehere = fahren
[3] William Rowan Hamilton, irischer Mathematiker und Physiker, 1805-1865

Aus der Definition geht hervor, dass sich ein Vektor bei der Parallelverschiebung nicht ändert (Abb. 2-1). Diese Vektoren werden als **freie Vektoren** bezeichnet. Ein **linienflüchtiger Vektor** (Abb. 2-2) darf nur längs seiner Wirkungslinie verschoben werden (eingeschränkte Parallelverschiebung).

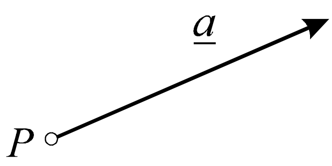


Abb. 2-3 Gebundener Vektor

Definition 2-4

Ein **gebundener Vektor** hat einen festen Anfangspunkt P, er darf überhaupt nicht verschoben werden (Abb. 2-3).

Beispiel 2-1

Freier Vektor:	An einem starren Körper angreifendes Drehmoment.
Linienflüchtiger Vektor:	An einem starren Körper angreifende Kraft.
Gebundener Vektor:	Ortsvektor, an einem deformierbaren Körper angreifende Kräfte und Momente.

Definition 2-5

Die **Länge** eines Vektors ist sein Betrag, und wir schreiben: $|\underline{a}| = a \geq 0$

Definition 2-6

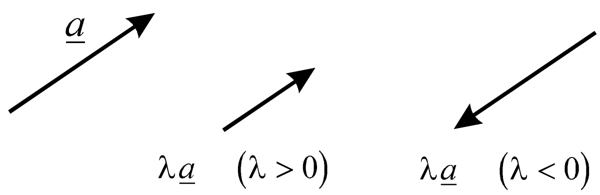


Abb. 2-4 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Ist $\underline{a}$ ein Vektor und λ eine reelle Zahl, so bezeichnet das Symbol $\lambda\underline{a}$ einen Vektor mit folgenden Eigenschaften (Abb. 2-4):

1. Der Vektor $\lambda\underline{a}$ ist parallel zu $\underline{a}$
2. $\lambda > 0 \Rightarrow \underline{a}$ und $\lambda\underline{a}$ sind gleichgerichtet
3. $\lambda < 0 \Rightarrow \underline{a}$ und $\lambda\underline{a}$ sind entgegengesetzt gerichtet
4. Der Betrag von $\lambda\underline{a}$ ist: $|\lambda\underline{a}| = |\lambda|\,|\underline{a}|$

Es bedeuten weiterhin:

$\lambda = 1$: Der Vektor $\underline{a}$ bleibt unverändert.

$\lambda = 0$: Es entsteht ein Vektor vom Betrag 0, der **Null-Vektor**, der keine bestimmte Richtung hat.

$\lambda = -1$: Der Richtungssinn von $\underline{a}$ wird umgekehrt.

Zwei parallele Vektoren können sich damit nur um einen skalaren Faktor unterscheiden.

Definition 2-7

Ein **Einheitsvektor** $\underline{e}$ ist durch $|\underline{e}| = 1$ definiert. Zu jedem Vektor $\underline{a}$ kann damit ein gleichgerichteter Einheitsvektor gefunden werden (Abb. 2-5)

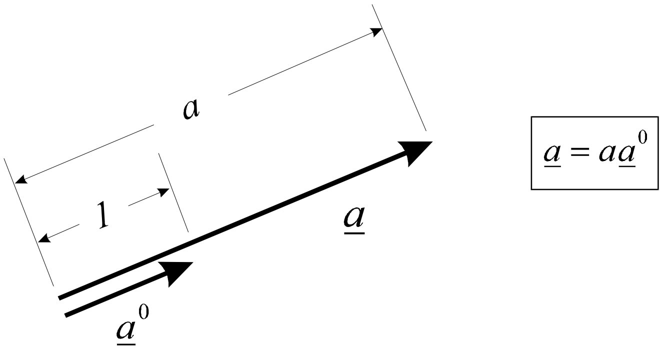


Abb. 2-5 Der Einheitsvektor

Da $\frac{1}{a}\underline{a}$ den Betrag $\frac{1}{a}|\underline{a}| = \frac{a}{a} = 1$ hat, gilt: $\underline{a}^0 = \frac{\underline{a}}{a}$

Jeder Vektor lässt sich somit in der Form *Betrag* mal *zugehöriger Einheitsvektor* darstellen:

$$\underline{a} = a\,\underline{a}^0$$

Definition 2-8

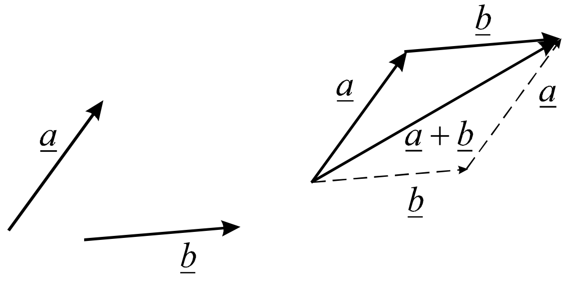


Abb. 2-6 Vektoraddition, Parallelogrammgesetz

Zwei Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ wird durch den Operator „+“ ein neuer Vektor zugeordnet, den man die **Vektorsumme** von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ nennt. Zur Bildung von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ wird $\underline{b}$ durch Parallelverschiebung im Endpunkt von $\underline{a}$ angetragen. Der Vektor $\underline{a} + \underline{b}$ weist vom Anfangspunkt von $\underline{a}$ zum Endpunkt von $\underline{b}$.

Entsprechend Abb. 2-6 lässt sich die Vektorsumme auch derart bilden, dass der Vektor $\underline{a}$ durch Parallelverschiebung im Endpunkt von $\underline{b}$ angetragen wird. Der Vektor $\underline{a} + \underline{b}$ weist vom Anfangspunkt von $\underline{b}$ zum Endpunkt von $\underline{a}$.

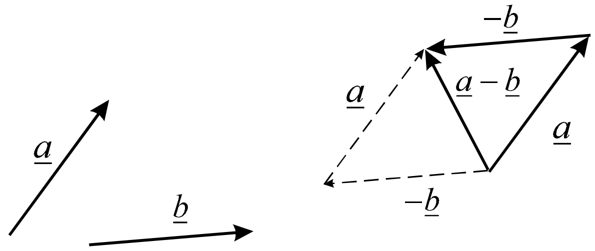


Abb. 2-7 Subtraktion von Vektoren

Auf diese Weise entsteht ein Parallelogramm mit den orientierten Seiten $\underline{a}$ und $\underline{b}$ und der orientierten Diagonalen $\underline{a} + \underline{b}$, das in der Mechanik die Anwendung beim **Kräfteparallelogramm** findet. In entsprechender Weise lässt sich die Differenz $\underline{a}-\underline{b}=\underline{a}+(-\underline{b})$ bilden.

Definition 2-9

Es gilt:

a) $\underline{a}-\underline{a}=\underline{0}$

b) $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$

c) $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})=\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$ Assoziativ-Gesetz (Abb. 2-8)

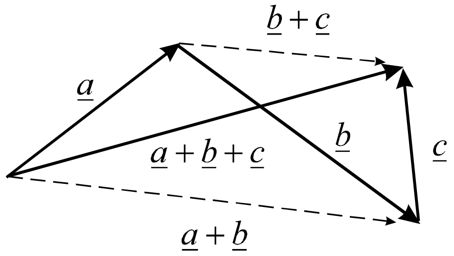


Abb. 2-8 Assoziativgesetz der Addition

Definition 2-10

Mit *n* Vektoren $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \ldots \underline{a}_n$, und mit den Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, welche als reelle Zahlen variabel sind, können wir eine lineare Schar von Vektoren bilden:

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \lambda_3 \underline{a}_3 + \ldots\ldots + \lambda_n \underline{a}_n$$

Wir nennen *n* Vektoren **linear unabhängig,** wenn sich aus ihnen durch Linearkombination der Nullvektor

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \lambda_3 \underline{a}_3 + \ldots\ldots + \lambda_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

nur durch

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots.. = \lambda_n = 0$$

bilden lässt. Andernfalls sind die Vektoren linear abhängig. Lineare Abhängigkeit bedeutet also, dass die obige Gleichung für wenigstens einen nicht verschwindenden Skalar λ_i erfüllt ist und damit nach einem Vektor aufgelöst werden kann. Unterstellen wir $\lambda_1 \neq 0$, erhalten wir $\underline{a}_1$ als *Linearkombination*, *Überlagerung* oder *Superposition:*

$$\underline{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\underline{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\underline{a}_3 - .... - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\underline{a}_n$$

Die geometrische Bedeutung der *linearen Abhängigkeit* erkennen wir aus den folgenden Beispielen.

Beispiel 2-2 $\quad n = 2 \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

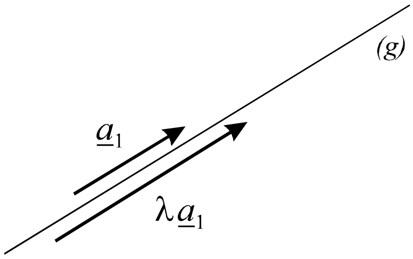


Abb. 2-9 Kollineare Vektoren

Aus $\lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 = \underline{0}$ folgt, dass $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ ein und derselben Geraden parallel sind. Die Vektoren $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ heißen dann **kollinear**. Alle Vektoren, die zu einer Geraden (der Wirkungslinie von $\underline{a}_1$) parallel sind, lassen sich in der Form $\underline{a}_g = \lambda\underline{a}_1$ darstellen (Abb. 2-9).

Beispiel 2-3

$n = 3, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0; \qquad \underline{a}_1, \underline{a}_2$ linearunabhängig. Aus $\lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 + \lambda_3\underline{a}_3 = \underline{0}$ folgt, dass $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ in einer Ebene liegen. Wir sagen: $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ sind komplanar[1].

Definition 2-11

Jeder Vektor, der zu derjenigen Ebene parallel ist, die durch die beiden linear unabhängigen Vektoren $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ aufgespannt wird, lässt sich in der Form $\underline{a}_e = \ell_1\underline{a}_1 + \ell_2\underline{a}_2$ darstellen (Abb. 2-10)

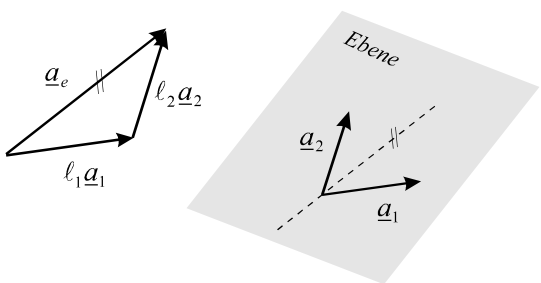


Abb. 2-10 Komplanare Vektoren

[1] zu lat. complanare = einebnen

Beispiel 2-4

$n = 4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \neq 0;$ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ linear unabhängig

Im dreidimensionalen Raum gilt der

Satz 2-1

Mehr als 3 Vektoren sind stets linear abhängig. Zwischen 4 beliebigen Vektoren besteht also immer eine Beziehung

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \lambda_3 \underline{a}_3 + \lambda_4 \underline{a}_4 = \underline{0}$$

Beispiel 2-5

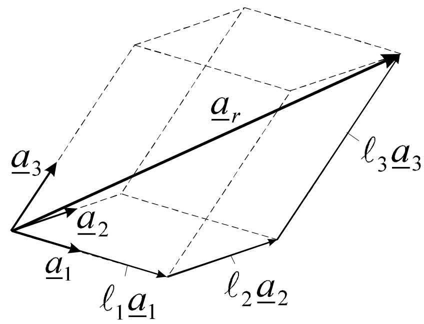


Abb. 2-11 Basissystem im räumlichen Fall

Sind $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ drei linear unabhängige Vektoren, so lässt sich jeder beliebige Vektor des dreidimensionalen Raumes durch Linearkombination in $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ darstellen, also:

$$\underline{a}_r = \ell_1 \underline{a}_1 + \ell_2 \underline{a}_2 + \ell_3 \underline{a}_3$$

Satz 2-2

Drei linear unabhängige Vektoren bilden im Raum ein **Basissystem**

Hinweis: Die zahlenmäßige Darstellung vektorieller Größen muss so erfolgen, dass wir verschiedene Vektoren auch ohne geometrische Anschauung miteinander vergleichen können. Dazu müssen wir im Raum ein Basissystem vorgeben. Da je drei beliebige, linear unabhängige Vektoren eine Basis bilden, gibt es für die Darstellung ein und derselben vektoriellen Größe unendlich viele verschiedene Möglichkeiten. Im Unterschied dazu ist die zahlenmäßige Angabe einer skalaren Größe von der Wahl des Bezugssystems unabhängig.

Definition 2-12

Ist die Basis durch die Vektoren $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3$ gegeben, so heißt die Gleichung

$$\underline{a} = a_1 \underline{g}_1 + a_2 \underline{g}_2 + a_3 \underline{g}_3$$

die **Komponentendarstellung**[1] des Vektors $\underline{a}$ zur Basis $\underline{g}_i\,(i = 1,2,3)$.

$$\begin{aligned} a_1, a_2, a_3 &= \text{Koordinaten des Vektors } \underline{a} \\ a_1\underline{g}_1, a_2\underline{g}_2, a_3\underline{g}_3 &= \text{Komponenten des Vektors } \underline{a} \end{aligned}$$

Je nach Anordnung der Basisvektoren $\underline{g}_i$ unterscheiden wir (Abb. 2-12) zwischen einem Rechts- oder Linkssystem.

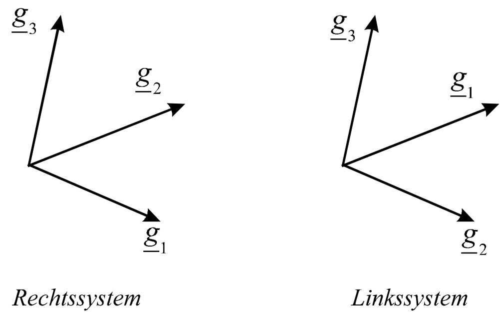


Abb. 2-12 Rechts- bzw. Linkssystem

Definition 2-13

Die Drehung von $\underline{g}_1$ auf dem kürzesten Wege in $\underline{g}_2$ und die Richtung von $\underline{g}_3$ bilden ein Rechtssystem.

Definition 2-14

Es seien $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$ drei Einheitsvektoren, die zueinander orthogonal sind (*orthonormierte Basis*). und in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Ein Vektor $\underline{a}$ kann dann als Summe der *3* Vektoren $a_x\underline{e}_x, a_y\underline{e}_y, a_z\underline{e}_z$ dargestellt werden (Abb. 2-13).

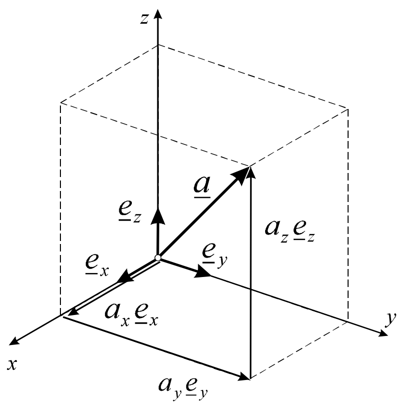


Abb. 2-13 Kartesische Koordinaten

Wir schreiben:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= a_x\underline{e}_x + a_y\underline{e}_y + a_z\underline{e}_z \\ &= \{a_x, a_y, a_z\} \quad < \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z > \end{aligned}$$

Hinweis: Die in Spitzklammern hinzugefügte Basis kann entfallen, wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind. Für die Basisvektoren folgt dann die Komponentendarstellung

[1] zu lat. componere = zusammenstellen

$$\underline{e}_x = \{1,0,0\}; \quad \underline{e}_y = \{0,1,0\}; \quad \underline{e}_z = \{0,0,1\}$$

Den Betrag des Vektors $\underline{a}$ entnehmen wir der Abb. 2-13

$$a = |\underline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

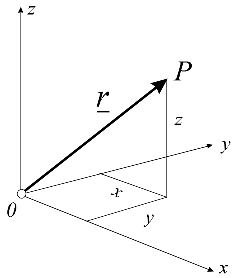


Abb. 2-14 Der Ortsvektor

Der Ortsvektor

$$\underline{r} = x\,\underline{e}_x + y\,\underline{e}_y + z\,\underline{e}_z = \{x, y, z\}$$

ist ein gebundener Vektor. Er dient dazu, die Lage eines Punktes P im Raum anzugeben.

Definition 2-15

Den Zylinderkoordinaten r, φ, z werden die Basisvektoren $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\varphi$, $\underline{e}_z$ zugeordnet, die wie $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$, $\underline{e}_z$ eine Orthonormalbasis bilden (Abb. 2-15). Dabei gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\underline{e}_r &= \cos\varphi\,\underline{e}_x + \sin\varphi\,\underline{e}_y &&= \{\cos\varphi, \sin\varphi, 0\} \\
\underline{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\underline{e}_x + \cos\varphi\,\underline{e}_y &&= \{-\sin\varphi, \cos\varphi, 0\} \\
\underline{e}_z &= \underline{e}_z &&= \{0,0,1\}
\end{aligned}$$

und umgekehrt:

$$\begin{aligned}
\underline{e}_x &= \cos\varphi\,\underline{e}_r - \sin\varphi\,\underline{e}_\varphi &&= \{\cos\varphi, -\sin\varphi, 0\} \\
\underline{e}_y &= \sin\varphi\,\underline{e}_r + \cos\varphi\,\underline{e}_\varphi &&= \{\sin\varphi, \cos\varphi, 0\} \\
\underline{e}_z &= \underline{e}_z &&= \{0,0,1\}
\end{aligned}$$

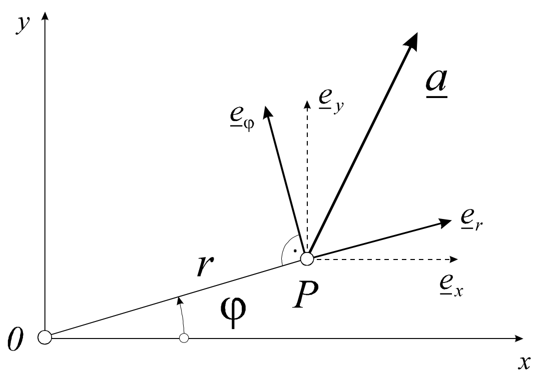


Abb. 2-15 Zylinderkoordinaten

Ein beliebiger Vektor $\underline{a}$ kann dann sowohl auf die Basis $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$, $\underline{e}_z$ als auch auf die Basis $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\varphi$, $\underline{e}_z$ bezogen werden. Statt

$$\underline{a} = a_x\,\underline{e}_x + a_y\,\underline{e}_y + a_z\,\underline{e}_z = \{a_x, a_y, a_z\}$$

ist dann

$$\underline{a} = a_r\underline{e}_r + a_\varphi\underline{e}_\varphi + a_z\underline{e}_z = \{a_r, a_\varphi, a_z\}$$

zu schreiben, und für den Betrag des Vektors $\underline{a}$ erhalten wir:

$$a = |a| = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2 + a_z^2}$$

Mit den obigen Gleichungen folgt dann

$$\begin{aligned} a_r &= a_x \cos\varphi + a_y \sin\varphi \\ a_\varphi &= -a_x \sin\varphi + a_y \cos\varphi \\ a_z &= a_z \end{aligned}$$

und umgekehrt:

$$\begin{aligned} a_x &= a_r \cos\varphi - a_\varphi \sin\varphi \\ a_y &= a_r \sin\varphi + a_\varphi \cos\varphi \\ a_z &= a_z \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass ein Vektor $\underline{a}$, je nachdem welchem Punkt im Raum wir ihn zuordnen, zwar stets die gleichen Koordinaten a_x, a_y, a_z , jedoch jeweils andere Koordinaten a_r, a_φ besitzt, da die Einheitsvektoren $\underline{e}_r$ und $\underline{e}_\varphi$ von φ abhängen (Abb. 2-16).

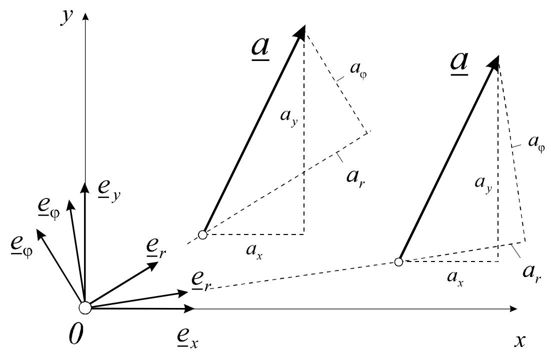


Abb. 2-16 Abhängigkeit des Vektors $\underline{a}$ von den Einheitsvektoren

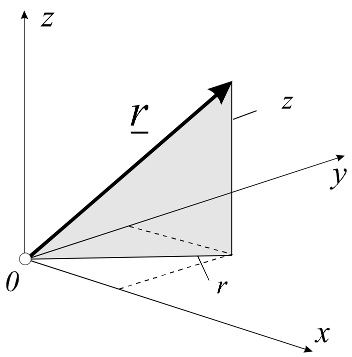


Abb. 2-17 Ortsvektor in Zylinderkoordinaten

Der Ortsvektor $\underline{r}$ hat in Zylinderkoordinaten, d.h. bei Bezugnahme auf die Orthonormalbasis $\underline{e}_r$, $\underline{e}_\varphi$, $\underline{e}_z$ die Form:

$$\underline{r} = r\underline{e}_r + z\underline{e}_z \quad \text{bzw.:} \quad \underline{r} = \{r,0,z\}$$

Achtung: Die Polarkoordinate *r* ist nicht mit dem Betrag des Ortsvektors zu verwechseln (Abb. 2-17).

Definition 2-16

Zwei **Vektoren** sind gleich, wenn sie komponentenweise gleich sind

$$\underline{a} = \underline{b} \Leftrightarrow \qquad a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z$$

Einer Vektorgleichung im Raum entsprechen somit drei skalare Gleichungen.

Definition 2-17

Ein Vektor wird mit einem Skalar multipliziert, indem alle seine Komponenten mit dem Skalar multipliziert werden.

$$\lambda\underline{a} = \lambda\{a_x, a_y, a_z\} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$$

Definition 2-18

Für die Summe bzw. Differenz zweier Vektoren gilt:

$$\underline{a} \pm \underline{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}$$

Definition 2-19

$$\underline{0} = \{0,0,0\}$$

Der **Nullvektor** hat in *jedem* Bezugssystem die Koordinaten 0.

Definition 2-20

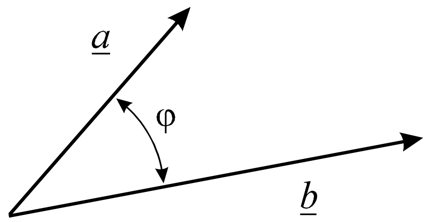


Abb. 2-18 Skalarprodukt zweier Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$

Das **skalare Produkt** (oder auch **innere Produkt**) $\underline{a} \cdot \underline{b}$ der beiden Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ liefert einen Skalar, der wie folgt definiert ist:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = ab\cos\varphi$$

Definition 2-21

Für die Basisvektoren folgt:

$\cdot$	$\underline{e}_x$	$\underline{e}_y$	$\underline{e}_z$
$\underline{e}_x$	1	0	0
$\underline{e}_y$	0	1	0
$\underline{e}_z$	0	0	1

oder kurz

$$\underline{e}_j \cdot \underline{e}_k = \delta_{jk} \qquad j,k = x,y,z$$
$$\delta_{jk} = 1 \qquad \text{für}\, j = k$$
$$\delta_{jk} = 0 \ \text{ sonst}$$

Definition 2-22

Mit der Definition sind:

a) $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$

b) $(\lambda \underline{a}) \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot (\lambda \underline{b}) = \lambda \underline{a} \cdot \underline{b}$

c) $(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c}$

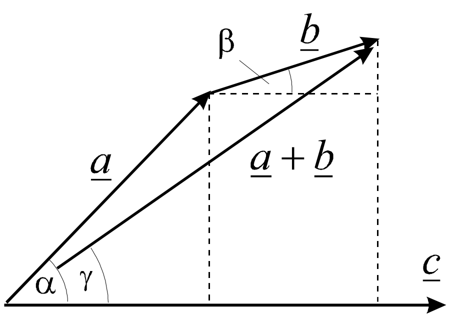


Abb. 2-19 Distributivgesetz

denn es gilt (Abb. 2-19):

$|\underline{a} + \underline{b}|\cos\gamma = |\underline{a}|\cos\alpha + |\underline{b}|\cos\beta$ und damit

$$\begin{aligned}(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} &= |\underline{a} + \underline{b}| \cdot |\underline{c}|\cos\gamma \\ &= |\underline{a}||\underline{c}|\cos\alpha + |\underline{b}||\underline{c}|\cos\beta = \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c}\end{aligned}$$

womit das Skalarprodukt auf die Koordinaten zurückgeführt werden kann:

$$\underline{a}\cdot\underline{b}=\left(a_x\underline{e}_x+a_y\underline{e}_y+a_z\underline{e}_z\right)\cdot\left(b_x\underline{e}_x+b_y\underline{e}_y+b_z\underline{e}_z\right)=$$

$$\begin{array}{lll} a_x b_x \underline{e}_x\cdot\underline{e}_x & +a_x b_y \underline{e}_x\cdot\underline{e}_y & +a_x b_z \underline{e}_x\cdot\underline{e}_z + \\ a_y b_x \underline{e}_y\cdot\underline{e}_x & +a_y b_y \underline{e}_y\cdot\underline{e}_y & +a_y b_z \underline{e}_y\cdot\underline{e}_z + \\ a_z b_x \underline{e}_z\cdot\underline{e}_x & +a_z b_y \underline{e}_z\cdot\underline{e}_y & +a_z b_z \underline{e}_z\cdot\underline{e}_z \end{array}$$

und damit

$$\underline{a}\cdot\underline{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$$

$$\cos\varphi=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

Insbesondere gilt: $\underline{a}\cdot\underline{a}=\underline{a}^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2=|\underline{a}|^2=a^2$

Definition 2-23

Die **Orthogonalitätsbedingung** für zwei Vektoren $(\underline{a},\underline{b}\neq\underline{0})$:

$$a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0$$

Definition 2-24

Projektion eines Vektors auf eine vorgegebene Richtung

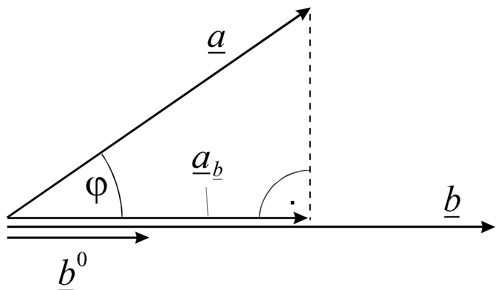


Abb. 2-20 Projektion von $\underline{a}$ auf die Richtung von $\underline{b}$

Wir entnehmen der Abb. 2-20:

$$\underline{a}_{\underline{b}}=a_{\underline{b}}\underline{b}^0=a\cos\varphi\frac{\underline{b}}{b}\frac{b}{b}=\frac{ab\cos\varphi}{b^2}\underline{b}$$

bzw.

$$\underline{a}_{\underline{b}}=\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{\underline{b}^2}\underline{b}$$

und damit der Betrag des Vektors $\underline{a}_{\underline{b}}$

$$a_{\underline{b}}=|\underline{a}_{\underline{b}}|=a\cos\varphi\frac{b}{b}=\frac{ab\cos\varphi}{\sqrt{\underline{b}^2}}=\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{\sqrt{\underline{b}^2}}$$

Liegt statt $\underline{b}$ ein Einheitsvektor $\underline{e}$ vor, so ist wegen $|\underline{e}|=1$

$$\underline{a}_{\underline{e}}=(\underline{a}\cdot\underline{e})\underline{e}$$

und

$$a_{\underline{e}} = \underline{a} \cdot \underline{e}$$

Insbesondere gilt

$$a_x = \underline{a} \cdot \underline{e}_x \qquad a_y = \underline{a} \cdot \underline{e}_y \qquad a_z = \underline{a} \cdot \underline{e}_z$$

Für die Winkel zwischen einem Vektor $\underline{a}$ und den Basisvektoren gilt dann:

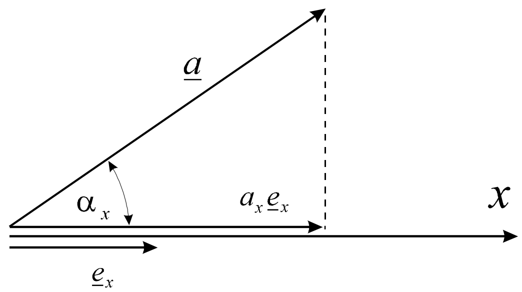


Abb. 2-21 Winkel zwischen $\underline{a}$ und dem Basisvektor $\underline{e}_x$

$$\cos\alpha_x = \frac{a_x}{a} \cos\alpha_y = \frac{a_y}{a} ;\cos\alpha_z = \frac{a_z}{a}$$

Richtungskosinusse

$$\cos^2\alpha_x + \cos^2\alpha_y + \cos^2\alpha_z = 1$$

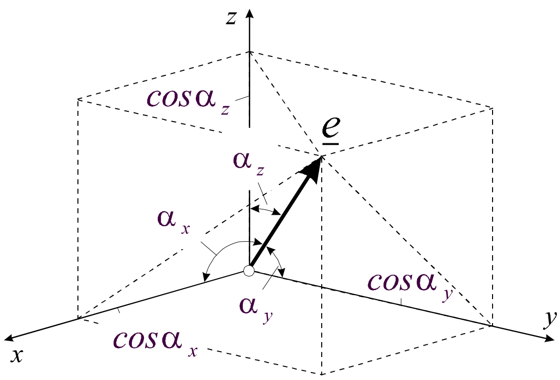


Abb. 2-22 Richtungskosinusse des Einheitsvektors

Die Komponenten eines Einheitsvektors im orthonormierten Basissystem sind die Kosinusse der Winkel zwischen dem Einheitsvektor und den Koordinatenachsen:

$$\underline{e} = \{\cos\alpha_x, \cos\alpha_y, \cos\alpha_z\}$$

Definition 2-25

Das **vektorielle Produkt** (oder **äußere Produkt**) zweier Vektoren $\underline{a}$ *und* $\underline{b}$ wird $\underline{a}\times\underline{b}$ geschrieben und wie folgt definiert (Abb. 2-23)

1. $\underline{a}\times\underline{b}$ ist ein Vektor.
2. $\underline{a}\times\underline{b}$ steht senkrecht auf $\underline{a}$ und senkrecht auf $\underline{b}$.
3. $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{a}\times\underline{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.
4. Es ist $|\underline{a}\times\underline{b}| = a\,b\sin\varphi$, also gleich dem Flächeninhalt A des von $\underline{a}$ und $\underline{b}$ gebildeten Parallelogramms.

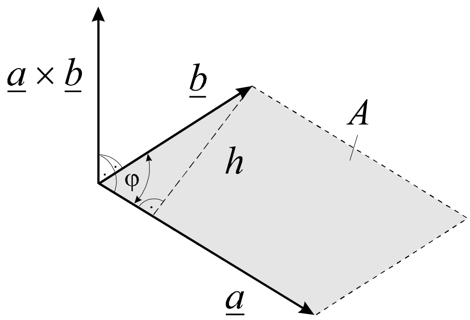


Abb. 2-23 Das Vektorprodukt zweier Vektoren

Nach Definition *3* gilt für das Vektorprodukt das kommutative Gesetz nicht, vielmehr ist

$$\underline{a}\times\underline{b} = -\underline{b}\times\underline{a}$$

Sind die beiden Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ parallel, so ist φ = 0 oder φ = π, dann ist $\underline{a}\times\underline{b} = \underline{0}$.

Es ist also $\underline{a}\times\underline{b} = \underline{0}$ für:

$$\begin{array}{lll} \underline{a} = \underline{0} & \text{und} & \underline{b} \neq \underline{0} \\ \underline{a} \neq \underline{0} & \text{und} & \underline{b} = \underline{0} \\ \underline{a} = \underline{0} & \text{und} & \underline{b} = \underline{0} \\ \underline{a} \| \underline{b} & & (\varphi = 0 \text{ oder } \pi) \end{array}$$

Insbesondere ist also:

$$\underline{a}\times\underline{a} = \underline{0}$$

Für die Einheitsvektoren gilt:

$\times$	$\underline{e}_x$	$\underline{e}_y$	$\underline{e}_z$
$\underline{e}_x$	$\underline{0}$	$\underline{e}_z$	$-\underline{e}_y$
$\underline{e}_y$	$-\underline{e}_z$	$\underline{0}$	$\underline{e}_x$
$\underline{e}_z$	$\underline{e}_y$	$-\underline{e}_x$	$\underline{0}$

Definition 2-26
Es gilt

a) $\lambda(\underline{a}\times\underline{b}) = (\lambda\underline{a})\times\underline{b} = \underline{a}\times(\lambda\underline{b}) = \lambda\underline{a}\times\underline{b}$

b) $(\underline{a}+\underline{b})\times\underline{c} = \underline{a}\times\underline{c} + \underline{b}\times\underline{c}$

Definition 2-27
Zurückführung des Vektorproduktes auf die Koordinaten:

$$\underline{a}\times\underline{b} = (a_x\underline{e}_x + a_y\underline{e}_y + a_z\underline{e}_z)\times(b_x\underline{e}_x + b_y\underline{e}_y + b_z\underline{e}_z) =$$

$$\begin{array}{ccccc} a_x b_x \underline{e}_x\times\underline{e}_x & + & a_x b_y \underline{e}_x\times\underline{e}_y & + & a_x b_z \underline{e}_x\times\underline{e}_z \\ a_y b_x \underline{e}_y\times\underline{e}_x & + & a_y b_y \underline{e}_y\times\underline{e}_y & + & a_y b_z \underline{e}_y\times\underline{e}_z \\ a_z b_x \underline{e}_z\times\underline{e}_x & + & a_z b_y \underline{e}_z\times\underline{e}_y & + & a_z b_z \underline{e}_z\times\underline{e}_z \end{array}$$

und

$$\underline{a}\times\underline{b} = \{a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x\}$$

dafür kann auch folgende Merkregel verwandt werden

$$\underline{a}\times\underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Achtung: Merkregel gilt so nur bei Bezugnahme auf eine orthogonale normierte Vektorbasis.

Definition 2-28
Das **Spatprodukt** $[\underline{a},\underline{b},\underline{c}]$ ist definiert als das Volumen V des von den Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ gebildeten Parallelepipeds (Abb. 2-24)

$$V = Ah = |\underline{a}\times\underline{b}||\underline{c}|\cos\varphi = (\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c}$$

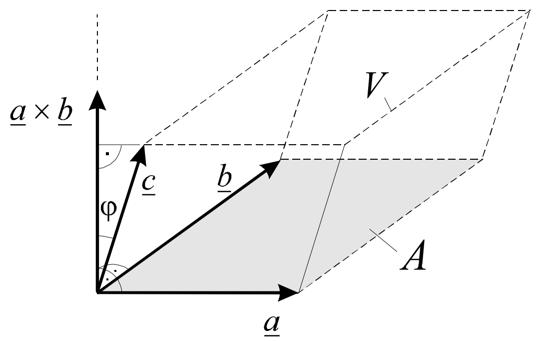


Abb. 2-24 Das Spatprodukt

Wir hätten auch

$$V = (\underline{b} \times \underline{c}) \cdot \underline{a}$$
$$V = (\underline{c} \times \underline{a}) \cdot \underline{b}$$

erhalten können. Insgesamt ist dann

$$[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] = (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = (\underline{b} \times \underline{c}) \cdot \underline{a} = (\underline{c} \times \underline{a}) \cdot \underline{b}$$

und es gilt die Regel von der zyklischen Vertauschbarkeit

$$[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] = [\underline{b}, \underline{c}, \underline{a}] = [\underline{c}, \underline{a}, \underline{b}]$$

und wegen $(\underline{b} \times \underline{c}) \cdot \underline{a} = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) \equiv (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ die (sinnvolle) Vertauschbarkeit von $\cdot$ *und* $\times$

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})$$

Durch Ausrechnen von $(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c}$ erhalten wir

$$[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] = (a_y b_z - a_z b_y) c_x + (a_z b_x - a_x b_z) c_y + (a_x b_y - a_y b_x) c_z$$

wofür wir auch

$$[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

hätten schreiben können. Für das Spatprodukt weisen wir noch die Beziehung

$$[\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3]\,[\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3] = \begin{vmatrix} \underline{a}_1\cdot\underline{b}_1 & \underline{a}_1\cdot\underline{b}_2 & \underline{a}_1\cdot\underline{b}_3 \\ \underline{a}_2\cdot\underline{b}_1 & \underline{a}_2\cdot\underline{b}_2 & \underline{a}_2\cdot\underline{b}_3 \\ \underline{a}_3\cdot\underline{b}_1 & \underline{a}_3\cdot\underline{b}_2 & \underline{a}_3\cdot\underline{b}_3 \end{vmatrix}$$

nach, die für $\underline{b}_1 = \underline{a}_1, \underline{b}_2 = \underline{a}_2, \underline{b}_3 = \underline{a}_3$, in die Form

$$[\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3]^2 = \begin{vmatrix} \underline{a}_1\cdot\underline{a}_1 & \underline{a}_1\cdot\underline{a}_2 & \underline{a}_1\cdot a_3 \\ \underline{a}_2\cdot\underline{a}_1 & \underline{a}_2\cdot\underline{a}_2 & \underline{a}_2\cdot\underline{a}_3 \\ \underline{a}_3\cdot\underline{a}_1 & \underline{a}_3\cdot\underline{a}_2 & \underline{a}_3\cdot\underline{a}_3 \end{vmatrix}$$

übergeht. Der Beweis erfolgt durch Ausrechnen mit $\underline{a}_1 = \{a_{1x}, a_{1y}, a_{1z}\}$ usw.

Definition 2-29

Zerlegung eines Vektors in der Ebene nach zwei Richtungen. Der Vektor $\underline{a}$ in Abb. 2-25 soll in die vorgegebenen Richtungen $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ zerlegt werden, also $\underline{a} = \lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2$ mit noch unbekannten λ_1 *und* λ_2.

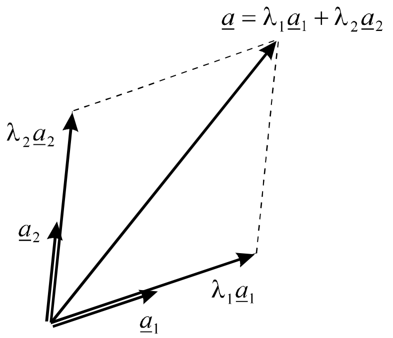


Abb. 2-25 Zerlegung eines Vektors in der Ebene

$$\begin{aligned} \underline{a} &= \lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 && |\times\underline{a}_2 \\ \underline{a}\times\underline{a}_2 &= \lambda_1\underline{a}_1\times\underline{a}_2 && |\cdot(\underline{a}_1\times\underline{a}_2) \\ (\underline{a}\times\underline{a}_2)\cdot(\underline{a}_1\times\underline{a}_2) &= \lambda_1(\underline{a}_1\times\underline{a}_2)^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\lambda_1 = \frac{(\underline{a}\times\underline{a}_2)\cdot(\underline{a}_1\times\underline{a}_2)}{(\underline{a}_1\times\underline{a}_2)^2}$$

entsprechend erhalten wir λ_2 und damit insgesamt

$$\lambda_1 = \frac{(\underline{a}\times\underline{a}_2)\cdot(\underline{a}_1\times\underline{a}_2)}{(\underline{a}_1\times\underline{a}_2)^2}; \qquad \lambda_2 = \frac{(\underline{a}_1\times\underline{a})\cdot(\underline{a}_1\times\underline{a}_2)}{(\underline{a}_1\times\underline{a}_2)^2}$$

Wenn $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ parallel sind, so ist $\underline{a}_1\times\underline{a}_2 = \underline{0}$, in diesem Falle ist keine Zerlegung möglich. Sind in der Ebene mehr als zwei Richtungen vorgegeben, so ist die Zerlegung nicht eindeutig.

Definition 2-30

Zerlegung eines Vektors im Raum nach drei vorgegebenen Richtungen.

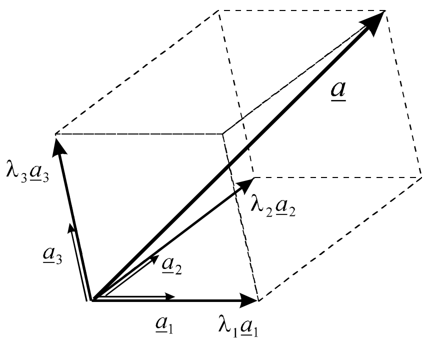


Abb. 2-26 Zerlegung eines Vektors im Raum

Für $\underline{a}$ gilt nach Abb. 2-26

$$\underline{a} = \lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 + \lambda_3\underline{a}_3$$

mit noch unbekannten λ_1,λ_2 und λ_3.

$$\underline{a} = \lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 + \lambda_3\underline{a}_3 \qquad |(\underline{a}_2\times\underline{a}_3)\cdot$$

$$(\underline{a}_2\times\underline{a}_3)\cdot\underline{a} = \lambda_1(\underline{a}_2\times\underline{a}_3)\cdot\underline{a}_1$$

$$\lambda_1 = \frac{[\underline{a}_2,\underline{a}_3,\underline{a}]}{[\underline{a}_2,\underline{a}_3,\underline{a}_1]} = \frac{[\underline{a},\underline{a}_2,\underline{a}_3]}{[\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3]}$$

Entsprechend folgen λ_2 und λ_3 und somit insgesamt

$$\lambda_1 = \frac{[\underline{a},\underline{a}_2,\underline{a}_3]}{[\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3]}; \qquad \lambda_2 = \frac{[\underline{a}_1,\underline{a},\underline{a}_3]}{[\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3]}; \qquad \lambda_3 = \frac{[\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}]}{[\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3]}$$

Wenn die Vektoren $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ und $\underline{a}_3$ komplanar sind, so gilt $[\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3] = 0$, und eine Zerlegung ist in diesem Falle nicht möglich. Sind mehr als drei Richtungen vorgegeben, so ist die Zerlegung nicht eindeutig.

Definition 2-31 (Mehrfache Produkte)

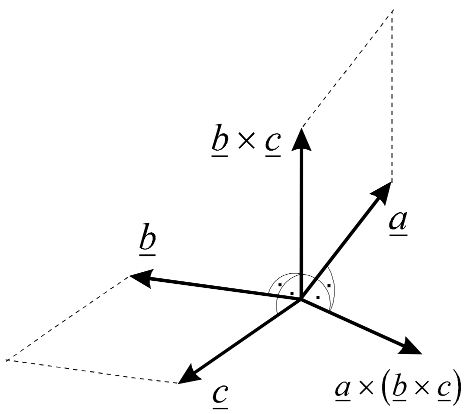


Abb. 2-27 Das zweifache Vektorprodukt

Für vektorielle Produkte aus drei Vektoren gilt die Beziehung

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\cdot\underline{b})\underline{c}$$

wofür wir auch unter Berücksichtigung von

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \begin{vmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_yc_z - b_zc_y & b_zc_x - b_xc_z & b_xc_y - b_yc_x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \quad & \underline{e}_x[a_y(b_xc_y - b_yc_x) - a_z(b_zc_x - b_xc_z)] + \\ & \underline{e}_y[a_z(b_yc_z - b_zc_y) - a_x(b_xc_y - b_yc_x)] + \\ & \underline{e}_z[a_x(b_zc_x - b_xc_z) - a_y(b_yc_z - b_zc_y)] \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = & \underline{e}_x[a_y(b_xc_y - b_yc_x) - a_z(b_zc_x - b_xc_z)] + \\ & \underline{e}_y[a_z(b_yc_z - b_zc_y) - a_x(b_xc_y - b_yc_x)] + \\ & \underline{e}_z[a_x(b_zc_x - b_xc_z) - a_y(b_yc_z - b_zc_y)] \end{aligned}$$

schreiben können. Geometrisch ist sofort einleuchtend, dass der Vektor $\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c})$ in der durch $\underline{b}$ und $\underline{c}$ aufgespannten Ebene liegt, da er zu $\underline{b}\times\underline{c}$ orthogonal ist. Für zweifache Vektorprodukte gilt das Assoziativgesetz nicht: $\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) \neq (\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{c}$

Definition 2-32

Es gilt:

a) $(\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{c}\times\underline{d}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})(\underline{b}\cdot\underline{d}) - (\underline{a}\cdot\underline{d})(\underline{b}\cdot\underline{c})$

b) $(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{c}\times\underline{d}) = [\underline{a},\underline{c},\underline{d}]\underline{b} - [\underline{b},\underline{c},\underline{d}]\underline{a}$
$\qquad = [\underline{a},\underline{b},\underline{d}]\underline{c} - [\underline{a},\underline{b},\underline{c}]\underline{d}$

c) $\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) + \underline{b}\times(\underline{c}\times\underline{a}) + \underline{c}\times(\underline{a}\times\underline{b}) = \underline{0}$

d) $(\underline{a}\times\underline{b})^2 = \underline{a}^2\underline{b}^2 - (\underline{a}\cdot\underline{b})^2$

Definition 2-33

Zerlegung eines Vektors $\underline{a}$ in zwei Komponenten, von denen eine parallel zu einem vorgegebenen Vektor $\underline{e}$ und die andere Komponente dazu senkrecht steht (Abb. 2-28), also

$$\underline{a} = \underline{a}_{\parallel} + \underline{a}_{\perp}$$

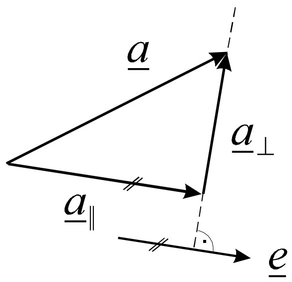


Abb. 2-28 Vektorzerlegung parallel und senkrecht zu einer vorgegebenen Richtung

Mit $\underline{a}_{\parallel} = (\underline{a}\cdot\underline{e})\underline{e}$ gilt: $\underline{a}_{\perp} = \underline{a} - \underline{a}_{\parallel} = \underline{a} - (\underline{a}\cdot\underline{e})\underline{e} = (\underline{e}\cdot\underline{e})\underline{a} - (\underline{a}\cdot\underline{e})\underline{e} = \underline{e}\times(\underline{a}\times\underline{e})$

und somit (Abb. 2-28)

$$\underline{a} = \underbrace{(\underline{a}\cdot\underline{e})\underline{e}}_{\parallel \underline{e}} + \underbrace{\underline{e}\times(\underline{a}\times\underline{e})}_{\perp \underline{e}}$$

3 Definitionen und Rechenregeln für Matrizen

Definition 3-1

Eine Matrix[1] ist ein geordnetes Schema von Zahlen a_{ik} mit m Zeilen und n Spalten der Form

$$\underset{(m\times n)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Außer dem Zahlenwert eines Elementes $a_{ik} \in \mathbb{R}$ der Matrix A ist auch seine durch den Doppelindex i,k festgelegte Stellung im Schema, seine Zeilennummer i und seine Spaltennummer k entscheidend. Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten ist eine Matrix vom Typ $m\times n$ (gesprochen: m-Kreuz-n) oder kurz eine $m\times n$-Matrix. Einzeilige Matrizen A($1\times n$) werden **Zeilenvektoren** und einspaltige Matrizen A($m\times 1$) werden **Spaltenvektoren** genannt und mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Es ist $\underline{a}_i^T$ der i-te Zeilenvektor

$$\underline{a}_i^T = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in})$$

und $\underline{a}_k$ der *k-te* Spaltenvektor

$$\underline{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \cdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen

a) **Nullmatrix** $\underset{(m\times n)}{0}$ alle $a_{ij} = 0, i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n$

b) **Quadratische Matrix** m = n

c) **Diagonalmatrix** m = n, $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$

---

[1] lat. Quelle, Ursache

$$\underset{(m\times m)}{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{mm} \end{pmatrix}$$

d) **Einheitsmatrix** der Ordnung *m* $\underset{(m\times m)}{I}$, $a_{ij} = 0, i \neq j, a_{ii} = 1$

$$\underset{(m\times m)}{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Definition 3-2

Zwei Matrizen sind gleich, wenn sie in allen Elementen übereinstimmen:

$$\underset{(m\times n)}{A} = \underset{(m\times n)}{B} \qquad \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \text{ für alle i,j}$$

Definition 3-3

Zu jeder Matrix *A* wird eine **transponierte**[1] **Matrix** A^T nach folgender Vorschrift gebildet:

$$\underset{(m\times n)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \underset{(n\times m)}{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

oder kurz $\qquad A = (a_{ik}) \qquad A^T = (a_{ki})$

$$\underset{(3\times 2)}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \underset{(2\times 3)}{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Satz 3-1

Es gilt: $\qquad (A^T)^T = A$

[1] lat. transponere = übersetzen, hinüberschaffen lassen

Definition 3-4

Es gilt die folgende Rechenregel*:* $(A+B)^T = A^T + B^T$

Definition 3-5

Eine quadratische Matrix, für die $A = A^T$ gilt, heißt **symmetrisch**.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Definition 3-6

Eine quadratische Matrix *A* heißt **antimetrisch** (**schiefsymmetrisch***)*, wenn gilt:

$$A^T = -A$$

Die Definition erfordert offensichtlich, dass die Hauptdiagonalelemente verschwinden.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 3-7

Eine quadratische Matrix, in der alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen Null sind heißt **obere Dreiecksmatrix** (**Rechtsdreiecksmatrix)**.

$$\underset{(n\times n)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definition 3-8

Eine quadratische Matrix, in der alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen Null sind heißt **untere Dreiecksmatrix** (**Linksdreiecksmatrix)**.

$$\underset{(n\times n)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definition 3-9

Zwei Matrizen gleicher Dimension werden **addiert** (**subtrahiert**), indem ihre entsprechenden Elemente addiert (subtrahiert) werden.

$$\underset{(m\times n)}{C} = \underset{(m\times n)}{A} \pm \underset{(m\times n)}{B} \qquad \Leftrightarrow \qquad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}\,;\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n$$

Definition 3-10

Eine Matrix *A* wird mit einem **Skalar λ multipliziert**, indem jedes Element der Matrix mit λ multipliziert wird:

$$\underset{(m\times n)}{B} = \lambda \underset{(m\times n)}{A} \quad \Leftrightarrow \quad b_{ij} = \lambda a_{ij}, \qquad i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n$$

$$B = \lambda A = A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Satz 3-2

Für Matrizen gleicher Dimension gilt:

a) $A + 0 = 0 + A = A$ b) $A + (-A) = 0$

c) $A + B = B + A$ d) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$

e) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ f) $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$

Definition 3-11

Es sei *A* eine $m \times n$ und *B* eine $n \times p$ Matrix, dann gilt für die **Produktmatrix** $C = A \cdot B$, dass sie die Dimension $m \times p$ hat und dass sich ihre Elemente c_{ij} als Skalarprodukt aus dem *i*-ten Zeilenvektor von *A* und dem *j*-ten Spaltenvektor von *B* ergeben:

$$\underset{(m\times n)}{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1^T \\ \underline{a}_2^T \\ \vdots \\ \underline{a}_m^T \end{pmatrix} \qquad \underset{(n\times p)}{B} = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_p)$$

$$c_{ij} = \underline{a}_i^T \underline{b}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\,, \qquad i = 1,2,\ldots,m\,;\ j = 1,2,\ldots,p$$

Beispiel 3-1

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 26 & 10 & -14 \\ -3 & -39 & -15 & 21 \end{pmatrix}$$

oder auch

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 26 & 10 & -14 \\ -3 & -39 & -15 & 21 \end{pmatrix}$$

Für die Matrizenmultiplikation gilt <u>nicht</u> das Kommutativgesetz, d.h., i.a. ist:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix};\ B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Einheitsmatrizen reproduzieren beim Multiplizieren, sie spielen also die Rolle der **1** beim Multiplizieren reeller Zahlen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz 3-3

Es gilt:

$$\left(\underset{(m\times n)}{A} + \underset{(m\times n)}{B}\right) \cdot \underset{(n\times p)}{C} = \underset{(m\times p)}{A \cdot C} + \underset{(m\times p)}{B \cdot C} \qquad \underset{(m\times n)}{A} \cdot \left(\underset{(n\times p)}{B} + \underset{(n\times p)}{C}\right) = \underset{(m\times p)}{A \cdot B} + \underset{(m\times p)}{A \cdot C}$$

Definition 3-12

Der Zeilenrang (Spaltenrang) einer Matrix ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen (Spalten) der Matrix.

Satz 3-4

Der Zeilenrang einer beliebigen Matrix ist immer gleich dem Spaltenrang. Es gilt, dass der Rang von A nie größer ist als das Minimum aus Zeilenzahl und Spaltenzahl:

$$\mathrm{rg}(A) \le \min(m, n).$$

Andernfalls heißt *A* **singulär**.

Definition 3-13

Unter der Voraussetzung, dass die Produkte herstellbar sind, gilt für die Matrizenmultiplikation das Assoziativgesetz:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Definition 3-14

Eine Matrix *A* wird mit einem Faktor λ multipliziert, indem jedes Element der Matrix mit λ multipliziert wird:

$$\lambda A = \lambda(a_{ik}) = (\lambda a_{ik})$$

bzw.:

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definition 3-15

Für das Transponieren von Matrizenprodukten gilt:

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T, \quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Hinweis: Das Produkt zweier Matrizen kann die Nullmatrix sein, ohne dass einer der beiden Faktoren die Nullmatrix ist.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

daraus folgt mit dem Distributivgesetz für die Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 6 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass es <u>nicht</u> möglich ist, generell *eine Division für Matrizen* zu erklären, denn dann könnten wir in der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

durch die von der Nullmatrix verschiedene Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$

dividieren, was offensichtlich zu einem Widerspruch führen würde.

3.1 Die inverse Matrix

Wir betrachten zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= a_1 \\ 2x_1 + 7x_2 &= a_2 \end{aligned}$$

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ gegeben. In Matrizenschreibweise lässt sich das Gleichungssystem mit Einführung

von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

in der Form

$$A \cdot \underline{x} = \underline{a}$$

schreiben. Die Lösung lautet:

$$x_1 = 7a_1 - 3a_2$$
$$x_2 = -2a_1 + a_2$$

die mit

$$X = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

die Gestalt

$$\underline{x} = X \cdot \underline{a}$$

annimmt. Also haben wir einerseits

$$A \cdot \underline{x} = A \cdot X \cdot \underline{a} = \underline{a}$$

und andererseits

$$\underline{x} = X \cdot \underline{a} = X \cdot A \cdot \underline{x}$$

so dass offenbar $A \cdot X$ das $\underline{a}$ und $X \cdot A$ das $\underline{x}$ beim Multiplizieren reproduziert. Durch Ausrechnen bestätigen wir sofort:

$$A \cdot X = X \cdot A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition 3-16

Die quadratische $m \times m$ Matrix X mit der Eigenschaft $X \cdot A = A \cdot X = I$ heißt **inverse Matrix** von A. Dabei ist A eine reguläre $m \times m$ Matrix und I die $m \times m$ Einheitsmatrix.
Wir schreiben:

$$X = A^{-1}$$

Definition 3-17

Die Inverse A^{-1} der Matrix A kann aus der Definitionsgleichung

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

berechnet werden.

Beispiel 3-2

Für $n = 3$ und $X = A^{-1}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der obigen Gleichung entsprechen 3 lineare Gleichungssysteme zur Bestimmung der Koeffizienten x_{ij} von A^{-1}:

$$\begin{array}{r|r|r} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} = 1 & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{32} = 0 & a_{11}x_{13} + a_{12}x_{23} + a_{13}x_{33} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} = 0 & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{32} = 1 & a_{21}x_{13} + a_{22}c_{23} + a_{23}x_{33} = 0 \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} = 0 & a_{31}x_{12} + a_{32}x_{22} + a_{33}x_{32} = 0 & a_{31}x_{13} + a_{32}x_{23} + a_{33}x_{33} = 1 \end{array}$$

Satz 3-5

Die Inverse einer oberen (unteren) Dreiecksmatrix ist wieder eine obere (untere) Dreiecksmatrix.

Beispiel 3-3 (obere Dreiecksmatrix, *n = 3*):

Aus der obigen Gleichung folgt

$$\begin{array}{r|r|r} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} = 1 & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{32} = 0 & a_{11}x_{13} + a_{12}x_{23} + a_{13}x_{33} = 0 \\ a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} = 0 & a_{22}x_{22} + a_{23}x_{32} = 1 & a_{22}x_{23} + a_{23}x_{33} = 0 \\ a_{33}x_{31} = 0 & a_{33}x_{32} = 0 & a_{33}x_{33} = 1 \end{array}$$

und durch rekursive Auflösung

$$\begin{array}{l|l|l} x_{31} = 0 & x_{32} = 0 & x_{33} = \dfrac{1}{a_{33}} \\ x_{21} = 0 & x_{22} = \dfrac{1}{a_{22}} & x_{23} = -\dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_{33} \\ x_{11} = \dfrac{1}{a_{11}} & x_{12} = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_{22} & x_{13} = -\dfrac{1}{a_{11}} \left(a_{13}x_{33} + a_{12}x_{23} \right) \end{array}$$

also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix}$$

Besonders einfach ist die **Invertierung einer Diagonalmatrix**. Aus

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{folgt} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} \end{pmatrix}$$

Satz 3-6

Es gilt:

a) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ b) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ c) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

d) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}, \lambda \neq 0$ e) $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$

Satz 3-7

Die inverse Matrix A^{-1} einer regulären $m \times m$ Matrix A berechnet sich folgendermaßen:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} +|A_{11}| & -|A_{21}| & +|A_{31}| & \cdots & (-1)^{m+1}|A_{11}| \\ -|A_{12}| & +|A_{22}| & -|A_{32}| & \cdots & (-1)^{m+2}|A_{11}| \\ +|A_{13}| & -|A_{23}| & +|A_{33}| & \cdots & (-1)^{m+3}|A_{11}| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (-1)^{1+m}|A_{1m}| & \cdots & \cdots & \cdots & |A_{mm}| \end{pmatrix}$$

Satz 3-8

Eine quadratische $m \times m$ Matrix A besitzt dann und nur dann eine Inverse, wenn

a) ihre Determinante von Null verschieden ist,

b) der *Rang* von A gleich m ist,

c) A regulär ist,

d) die Spalten und Zeilen von A eine Basis im $\mathbb{R}^n$ bilden.

4 Determinanten

Definition 4-1

Eine **n-reihige Determinante**[1] ist eine Zahl, die aus gegebenen n^2 Zahlen a_{ik} nach einer noch zu bestimmenden Vorschrift gebildet wird.

$$D = \det(a_{ik}) = \left|a_{ik}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{a_{i1}} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Zeilen und Spalten heißen allgemein Reihen.

Definition 4-2 (Rechenvorschrift zur Bestimmung der Determinante)

Im Fall $n = 1$ wird $\det(a_{11}) = \left|a_{11}\right| = a_{11}$

Für die Fälle n = 2, 3, 4,... wird der Begriff der n-reihigen Determinante durch die Vorschrift

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

auf den Begriff der (n-1)-reihigen Determinante oder auch **Unterdeterminante** zurückgeführt.

[1] Gottfried Wilhelm Leibniz, deutsch. Mathematiker und Philosoph, 1646-1716

Beispiel 4-1 (n = 2):

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot |d| - b \cdot |c| = ad - bc$$

Definition 4-3

Entfernen wir aus dem Zahlenschema $|a_{ik}|$ die *i*-te Zeile und die *k*-te Spalte und rücken die verbleibenden Elemente wieder zu einer Determinante zusammen, so entsteht die zum Element a_{ik} gehörige Unterdeterminante D_{ik}. Sie ist von der Ordnung *n-1*.

Beispiel 4-2 (n = 3):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \qquad D_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Aus den n^2 Elementen einer n-reihigen Determinante lassen sich n^2 Unterdeterminanten der Ordnung n-1 bilden.

Definition 4-4

Unter dem **Rang einer Matrix** versteht man die höchste Ordnung, die deren nicht verschwindende Unterdeterminanten haben können.

Hinweis: Um den Rang einer Matrix zu bestimmen, sind alle Unterdeterminanten der Ordnung l zu betrachten, wobei l entweder die kleinere der beiden Zahlen m und n für $m \neq n$ oder $l = m = n$ ist. Ist wenigstens eine dieser Determinanten $\neq 0$, so ist der Rang der Matrix A gleich *l*. Verschwinden sie jedoch alle, dann sind die Unterdeterminanten *l* - 1 zu betrachten usw. In der praktischen Anwendung ist es jedoch besser, umgekehrt zu verfahren, d.h., von Unterdeterminanten geringerer Ordnung zu denen höherer Ordnung überzugehen, und dabei folgende Regel zu beachten: Hat man eine nichtverschwindende Unterdeterminante k-ter Ordnung gefunden, so sind nur noch die Unterdeterminanten der Ordnung (k + 1) zu betrachten, sich durch *Ränderung* von D_k ergeben

$$\begin{vmatrix} D_k & \vdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \vdots & D_k \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ D_k & \vdots \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \vdots & D_k \end{vmatrix}$$

Sind dann alle diese Unterdeterminanten der Ordnung (k + 1) gleich Null, dann ist der Rang der Matrix gleich k.

Beispiel 4-3

Gesucht wird der Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A enthält in der oberen linken Ecke eine Unterdeterminante zweiter Ordnung $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Es existiert jedoch eine Unterdeterminante zweiter Ordnung, die nicht verschwindet: $D_2' = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Rändern dieser Unterdeterminante links und unten liefert: $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Durch Rändern von D_3 erhalten wir[1]

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{und} \qquad D_4' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Somit ist der Rang von A gleich 3

Definition 4-5

Es existieren *2n* Möglichkeiten zur Berechnung einer *n*-reihigen Determinante. Entwicklung nach den Elementen der *i*-ten Zeile (= *n* Möglichkeiten)

$$D = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} D_{ik} \qquad 1 \leq i \leq n$$

Entwicklung nach den Elementen der *k*-ten Spalte (= *n* Möglichkeiten)

$$D = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} D_{ik} \qquad 1 \leq k \leq n$$

[1] das ist nur auf zwei verschiedene Arten möglich

Beispiel 4-4 (n = 3): Entwicklung nach der ersten Zeile

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Schachbrettregel für das Vorzeichen:

+	−	+	−
−	+	−	+
+	−	+	−
−	+	−	+

<u>Hinweis</u>: In den folgenden Sätzen kann das Wort *Reihe* sowohl durch das Wort *Zeile* als auch durch das Wort *Spalte* ersetzt werden.

Satz 4-1

Eine Determinante ändert ihren Wert <u>nicht</u> bei Vertauschung ihrer Zeilen mit ihren Spalten (Spiegelung an der Hauptdiagonalen)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Satz 4-2

Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen bei Vertauschung zweier paralleler Reihen.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Satz 4-3

Wenn die Elemente der k-ten Reihe einer Determinante D Summen von zwei Summanden sind, so lässt sich D als Summe zweier Determinanten darstellen, deren Elemente in der entsprechenden k-ten Reihe jene Summanden sind und in den übrigen Reihen mit D übereinstimmen.

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & a_1+b_1 & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & a_2+b_2 & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & a_3+b_3 & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & a_4+b_4 & c_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & a_1 & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & a_2 & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & a_3 & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & a_4 & c_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & b_1 & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & b_2 & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & b_3 & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & b_4 & c_{44} \end{vmatrix}$$

Satz 4-4

Ein den Elementen einer Reihe gemeinsamer Faktor darf vor die Determinante gezogen werden.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Satz 4-5

Sind die Elemente einer Reihe lauter Nullen, so hat die Determinante den Wert Null.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Satz 4-6

Sind die Elemente zweier paralleler Reihen zueinander proportional, oder stimmen zwei Reihen überein, so hat die Determinante den Wert Null.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

Satz 4-7

Sind *A* und *B* beliebige quadratische *n*-reihige Matrizen, so gilt:

$$|A \cdot B| = |A|\,|B|$$

Beispiel 4-5

Berechnung der Determinante einer *oberen Dreiecksmatrix*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \left| a_{33} \right| = a_{11} a_{22} a_{33}$$

Satz 4-8

Besitzt eine *n*-reihige Determinante obere oder untere Dreiecksgestalt, so errechnet sich die Determinante aus dem Produkt der Hauptdiagonalglieder:

$$D = \det(a_{ik}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

5 Lineare Gleichungssysteme

Definition 5-1

Unter einem **linearen Gleichungssystem** (LGS) verstehen wir m lineare Gleichungen, in denen n Unbekannte $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ auftreten. Hierbei sind die **Koeffizienten** a_{ij} (i = 1...m, j = 1...n) und die **Absolutglieder** der rechten Seite $b_i = i = 1, \ldots, m$ gegeben.

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

Mit den Vektoren

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ldots, \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

erhalten wir die vektorielle Darstellung des LGS

$$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \ldots + \underline{a}_n x_n = \underline{b}$$

$$\text{Mit } A = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ und } \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

folgt die Matrixdarstellung des LGS

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Ein LGS heißt **homogen**, wenn $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ sind. Andernfalls heißt es **inhomogen**.

Beispiel 5-1 (Inhomogenes LGS mit 3 Gleichungen für 3 Unbekannte x_1, x_2, x_3)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & -5 \end{array}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Definition 5-2

Ein Zahlentupel $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) \in R^n$, welches alle m Gleichungen des LGS erfüllt, heißt **Lösung** des LGS. Die Menge aller Lösungen heißt **Lösungsmenge** des LGS.

Satz 5-1

Bei homogenen LGS ist jedes Vielfache der Lösung wieder eine Lösung.

Satz 5-2

Ein inhomogenes LGS von *n* Gleichungen mit *n* Unbekannten besitzt bei regulärer Koeffizientenmatrix genau eine Lösung.

Satz 5-3

Ein homogenes LGS von *n* Gleichungen mit *n* Unbekannten besitzt bei regulärer Koeffizientenmatrix nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Satz 5-4 (Die **Cramer*sche* Regel**)

Gegeben sei ein inhomogenes LGS von *n* Gleichungen mit *n* Unbekannten mit einer regulärer Koeffizientenmatrix in der vektoriellen Darstellung

$$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \ldots + \underline{a}_n x_n = \underline{b} \ ,$$

dann hat der Lösungsvektor die Komponenten

$$x_k = \frac{\left|\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{k-1}, \underline{b}, \underline{a}_{k+1}, \ldots, \underline{a}_n\right|}{\left|\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k, \ldots, \underline{a}_n\right|} = \frac{|A_k|}{|A|}, \qquad k = 1,2,\ldots,n.$$

wobei $|A|$ die Determinante von A und $|A_k|$ diejenige Determinante ist, die aus A entsteht, wenn wir in A die k-te Spalte durch die Spalte der rechten Seite ersetzten[1].

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & -5 \end{array}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 10 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 20 \qquad D = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 10$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{10}{10} = 1; \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-10}{10} = -1; \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{20}{10} = 2$$

Definition 5-3

Zwei Gleichungssysteme heißen **äquivalent**, wenn sie die gleiche Lösungsmenge besitzen.

[1] Gabriel Cramer, schweizer. Mathematiker, 1704-1752

Satz 5-5

Zwei LGS sind genau dann äquivalent, wenn sie sich durch

a) Vertauschen zweier Gleichungen (Zeilen) miteinander,
b) Multiplikation einer Gleichung (Zeile) mit einer reellen Zahl $\alpha \neq 0$,
c) Addition des Vielfachen einer Gleichung (Zeile) zu einer anderen Gleichung (Zeile)

ineinander überführen lassen.

Gaußscher Algorithmus
Ein LGS wird durch äquivalente Umformungen auf Dreiecksgestalt gebracht. Dieses äquivalente Gleichungssystem lässt sich rekursiv lösen.

Satz 5-6

Ein homogenes LGS von *n* Gleichungen mit *n* Unbekannten besitzt genau dann nichttriviale Lösungen, wenn der Rang *r* der Koeffizientenmatrix kleiner als *n* ist. Die Lösungsmenge enthält *n-r* freie Parameter. Sie hat die Dimension *n-r*.

Satz 5-7

Ein inhomogenes LGS von n Gleichungen mit n Unbekannten und Rang von A gleich $r < n$ besitzt nur dann Lösungen, wenn der Rang von $\left(A|\underline{b}\right)$ auch gleich r ist.

Satz 5-8

Ein LGS mit *m* Gleichungen und *n* Unbekannten hat genau dann mindestens eine Lösung, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix *A* und der Rang der erweiterten Matrix $\left(A|\underline{b}\right)$ übereinstimmen.

Definition 5-4

Für ein homogenes LGS von n Gleichungen mit n Unbekannten heißt jede Zahl λ_i, für die die Gleichung

$$\left(A - \lambda E\right) \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

nichttriviale Lösungen besitzt, **Eigenwert von *A***. Notwendige Bedingung dafür ist

$$\left|A - \lambda E\right| = 0\,,$$

oder:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Die nichttrivialen Lösungen $\underline{x}$ des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda E)\cdot \underline{x} = \underline{0}$ können bei bekannten Eigenwerten λ_i (i = 1, n) berechnet werden. Sie werden **Eigenvektoren $\mathbf{x_i}$ der Matrix A zum Eigenwert $\boldsymbol{\lambda_i}$** genannt. Der k-te Eigenvektor genügt der Gleichung

$$(A - \lambda_k E)\cdot x_k = 0$$

Beispiel 5-2 (n = 3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Ausmultiplizieren führt auf die *charakteristische Gleichung von A*:

$$\lambda^3 - A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3 = 0$$

mit den **Invarianten**

$$A_1 = \sum_{k=1}^{3} a_{kk}\,; \quad A_2 = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\left(a_{jj}a_{kk} - a_{jk}a_{kj}\right); \quad A_3 = |A|$$

Beispiel 5-3 (*n = 2*)

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Ausmultiplizieren liefert die quadratische Gleichung:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0$$

Satz 5-9

Die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix A (A = A^T) sind reell.

Beispiel 5-4

Gesucht sind die Eigenwerte der symmetrischen Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Das charakteristische Polynom: $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$

hat die Lösungen: $\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 5$. Das sind die Eigenwerte von *A*.

Beispiel 5-5

Gesucht sind die Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 5$. Für den ersten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3-1 & 2 \\ 2 & 3-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

also

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Wir wählen $x_1 = t \in$, dann folgt $x_2 = -t$. Damit ist jeder Vektor $\underline{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$. Für den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = 5$ erhalten wir entsprechend

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3-5 & 2 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

also

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Mit $x_1 = s$ beliebig reell folgt $x_2 = s$. Damit ist jeder Vektor $\underline{x}_2 = s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ Eigenvektor zu $\lambda_2 = 5$. Die auf den Betrag 1 normierten Eigenvektoren sind:

$$\underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}; \quad \underline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Satz 5-10

Die Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix sind orthogonal.

Definition 5-5

Die *n* unabhängigen Eigenvektoren $\underline{x}_i$ lassen sich in folgender Reihenfolge zu der regulären Matrix

$$X = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n),$$

die **Eigenvektormatrix** oder auch **Modalmatrix** genannt wird, zusammenfassen.

Definition 5-6

Für die Modalmatrix gilt: $X^{-1} \cdot A \cdot X = \Lambda$, wobei

$$\Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \lambda_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(\lambda_{ii})$$

Diagonalmatrix der Eigenwerte genannt wird.

$$A = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}; \ \underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}; \quad \underline{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}; \ X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}; \quad X^{-1} = 2\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix};$$

$$X^{-1} \cdot A \cdot X = \Lambda = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

6 Analysis

Definition 6-1

Unter einer **Funktion** *f* verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Element *x* einer gegebenen Menge *D* genau ein Element *y* aus einer Menge *W* zuordnet. *D* heißt **Definitionsbereich** und *W* heißt **Wertebereich**. Schreibweise: $f : D \to W \ mit \ y = f(x)$

Definition 6-2

Es sei $f : D \to W$ eine Funktion.

a) *f* ist **geradsymmetrisch**, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

b) *f* ist **ungeradsymmetrisch** (punktsymmetrisch zum Ursprung), wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Definition 6-3

Es ist $I \subseteq$ ein Intervall. Eine Funktion f: $I \to W$ heißt

a) **monoton wachsend** in *I*, wenn für alle $x_1 < x_2$ aus *I* gilt, daß $f(x_1) \le f(x_2)$ ist

b) **streng monoton wachsend** in *I*, wenn für alle $x_1 < x_2$ aus *I* gilt, daß $f(x_1) < f(x_2)$ ist,

c) **monoton fallend** in *I*, wenn für alle $x_1 < x_2$ aus I gilt, daß $f(x_1) \ge f(x_2)$ ist,

d) **streng monoton fallend** in *I*, wenn für alle $x_1 < x_2$ aus *I* gilt, daß $f(x_1) > f(x_2)$ ist.

Definition 6-4

Es ist $I \subseteq$ ein Intervall. Eine Funktion *f*: $I \to W$ heißt

a) **konvex** in *I*, wenn ihr Graph mit größer werdenden *x*-Werten eine Linkskurve beschreibt,

b) **konkav** in *I*, wenn ihr Graph mit größer werdenden *x*-Werten eine Rechtskurve beschreibt

Definition 6-5

Die **Umkehrfunktion** (**inverse Funktion**) f^{-1} ordnet jedem Element *f(x)* des Wertebereiches *W* das Element *x* des Definitionsbereiches *D* zu.

Satz 6-1

Jede streng monotone Funktion besitzt ein Umkehrfunktion

Definition 6-6

Eine Funktion der Form

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \qquad a_n \neq 0,$$

mit $a_i \in$, $i = 0,1,\ldots,n$, fest, heißt **ganze rationale Funktion** oder **Polynom vom Gerade n.**

Satz 6-2

Ein Polynom *n*-ten Grades hat genau *n* Nullstellen, d.h. Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$. Ist n ungerade, dann gibt es mindestens eine reelle Nullstelle.

Definition 6-7

Ist *g(x)* ein Polynom vom Grade *n* und *h(x)* ein Polynom vom Grade $m > 0$, dann heißt die Funktion

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m} = \frac{g(x)}{h(x)}$$

eine **gebrochen rationale Funktion**.

Satz 6-3

Der größtmögliche Definitionsbereich einer gebrochen rationalen Funktion ist

$D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{x | h(x) = 0\}$

Definition 6-8

Nullstellen des Nenners einer gebrochen rationalen Funktion, die nicht gleichzeitig Nullstellen des Zählers sind, heißen **Pole**.

Definition 6-9

Die Funktion $f(x) = e^x$ heißt **Exponentialfunktion**. Sie ist auf $\mathbb{R}$ definiert und e = 2,718281... ist die Euler*sche* Zahl.

Definition 6-10

Die Umkehrfunktion von e^x wird mit $f(x) = \ln x$ bezeichnet. Sie heißt (natürliche) **Logarithmusfunktion** und ist für x > 0 definiert.

Satz 6-4

Es sei $x_1 \in (0,\infty)$, $x_2 \in (0,\infty)$, $x \in (0,\infty)$ und $a \in \mathbb{R}$, dann gilt:

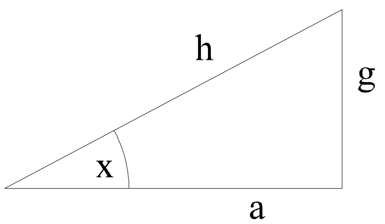
a) $\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$

b) $\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln x_1 - \ln x_2$

c) $\ln(x^a) = a \ln x$

Definition 6-11

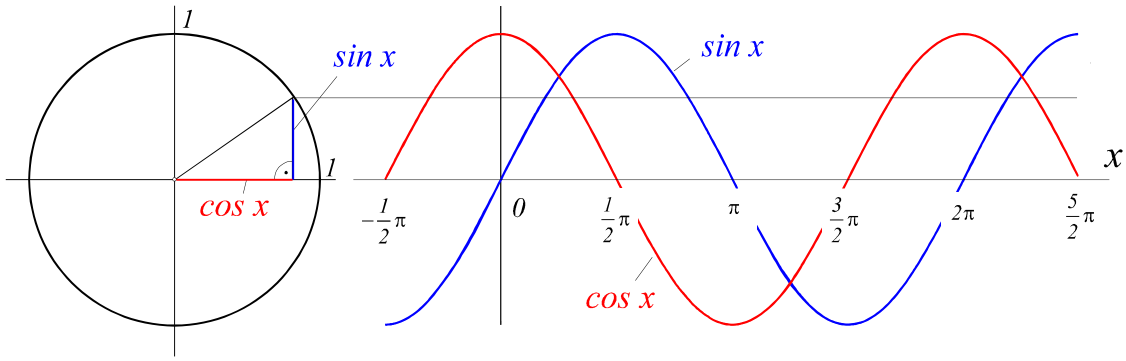
Der **Sinus** eines Winkels x wird am rechtwinkligen Dreieck erklärt als das Verhältnis von Gegenkathete zu Hypothenuse . Der **Cosinus** von *x* ist das Verhältnis von Ankathete zu Hypothenuse



$$\sin x = \frac{g}{h}$$

$$\cos x = \frac{a}{h}$$

Am Einheitskreis werden diese Funktionen auf beliebige (im Bogenmaß gemessene) Winkel ausgedehnt.



Beide Funktionen haben die Periode 2π. Der Definitionsbereich ist und der Wertebereich ist [-1,1]. Es gilt:

a) $\sin(-x) = -\sin x$ b) $\cos(-x) = \cos(x)$

c) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ d) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$

Definition 6-12

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ für alle } x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \; \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ für alle } x \neq k\pi, \qquad k = \ldots -1,0,1\ldots$$

6.1 Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen

Definition 6-1

Gegeben ist eine Funktion $f: D \to W$. Wenn bei der Annäherung von *x* gegen x_0 die Funktionswerte einem Wert *g* beliebig nahe kommen, dann heißt *g* der **Grenzwert** von $y = f(x)$ für *x* gegen x_0. Wir schreiben dann $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$.

Definition 6-2

$f(x)$ hat für $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$ den Grenzwert *G*, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Wert $\bar{x}_\varepsilon$ gibt, so daß für alle $x > \bar{x}_\varepsilon$ $(x < \bar{x}_\varepsilon)$ gilt, daß $|f(x) - G| < \varepsilon$ ist.

Definition 6-3

f(x) hat den Grenzwert *g* an der Stelle x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein δ_ε derart existiert, daß $|f(x) - g| < \varepsilon$ für alle *x* mit $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ erfüllt ist.

Definition 6-4

Es sei $f : D \to W$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Die Funktion *f* heißt **stetig in *x₀***, wenn

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ist.

Die Funktion heißt **stetig in *D***, wenn sie für alle $x_0 \in D$ stetig ist.

Satz 6-1

Für die elementaren Funktionen gilt:

- Polynome sind stetig,
- e^x und $\ln x$ sind stetig,
- *sin x* und *cos x* sind stetig,
- gebrochen rationale Funktionen sind stetig für alle *x*, für die das Nennerpolynom nicht verschwindet.

Satz 6-2

Es sei die Funktion $f : [a,b] \to W$ stetig und es sei $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ [oder $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$], dann existiert mindestens ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = 0$.

6.2 Ableitung von Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen

Definition 6-1

Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in I$: Als Differenzenquotient von *f* bezeichnen wir den Ausdruck

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ für } x \neq x_0$$

Definition 6-2

Sei $I \in$ ein Intervall und $x_0 \in I$. Die Funktion *f* heißt **differenzierbar in x_0**, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet und heißt **Ableitung** oder **Differentialquotient** von f in x_0. f heißt differenzierbar, falls $f'(x_0)$ für alle $x_0 \in I$ existiert.

Ableitungen spezieller Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$a = konst.$	0	x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc}\cot x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$
$\operatorname{ar}\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{ar}\tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{ar}\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{ar}\coth x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Satz 6-1

Es sei $f : D \to W_f$ und $g : D \to W_g$. Existieren die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$ für alle x aus D, dann sind auch kf mit $k \in$, $f \pm g$, fg und $\frac{f}{g}$ (für $g \neq 0$) differenzierbar und es gilt:

a) $[kf(x)]' = kf'(x)$

b) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

c) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

d) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Satz 6-2

Sind *f(x)* und *g(x)* differenzierbar und kann *g(x)* in *f(x)* eingesetzt werden, dann ist auch *f(g(x))* differenzierbar und es gilt

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\, g'(x)$$

Satz 6-3

Für die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Satz 6-4

Ist *f* differenzierbar in x_0, dann ist *f* auch stetig in x_0 .

Definition 6-3

Ist $f'(x)$ differenzierbar, dann heißt die Ableitung von $f' : [f'(x)]' = f''(x)$ zweite Ableitung von *f*. Allgemein läßt sich schreiben

$$[f^{(n-1)}(x)]' = f^{(n)}(x), \quad n = 2,3,\ldots$$

Satz 6-5

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to W$ eine Funktion. Es sei $I \subseteq D$ ein Intervall und *f* differenzierbar auf *I*. Dann gilt:

a) *f* ist genau dann **monoton wachsend** auf *I*, wenn für alle $x \in I\ f'(x) \geq 0$ ist.

b) *f* ist genau dann **monoton fallend** auf *I*, wenn für alle $x \in I\ f'(x) \leq 0$ ist.

c) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ bis auf endlich viele *x*, dann ist *f* **streng monoton wachsend** auf *I*.

d) Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$ bis auf endlich viele *x*, dann ist *f* **streng monoton fallend** auf *I*.

Satz 6-6

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to W$ eine Funktion. Es sei $I \subseteq D$ ein Intervall und *f* zweimal differenzierbar auf *I*. Dann gilt:

a) *f* ist genau dann konvex auf *I*, wenn $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$ (Linkskurve).

b) *f* ist genau dann konkav auf *I*, wenn $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$ (Rechtskurve).

6.3 Spezielle Anwendungen der Differentialrechnung

Definition 6-1

Unter dem (**totalen**, **vollständigen**) Differential einer differenzierbaren Funktion $f: D \to W$ verstehen wir die Größe $dy = f'(x)\,dx$ für beliebige Zahlen (Zuwächse) *dx*.

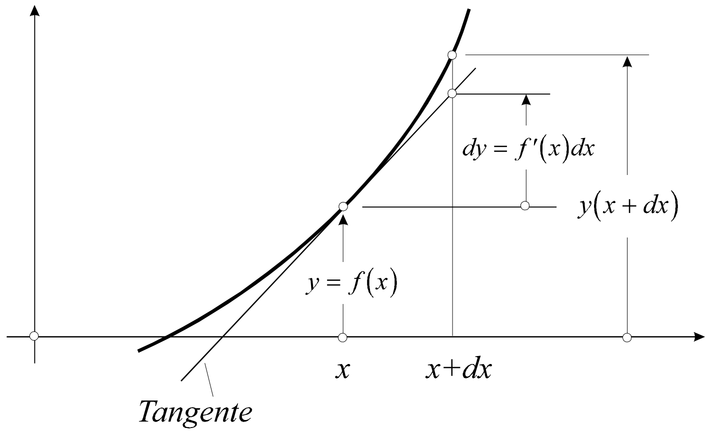


Abb. 6-1 Linearer Zuwachs dy einer Funktion y(x)

Satz 6-1 (Regel von Bernoulli-L'Hospital)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in D$. Es seien $f, g: D \setminus \{x_0\} \to W$ differenzierbare Funktionen. Es gelte: $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0, \lim_{x \to x_0} g(x) = 0,$ oder $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$.

Ferner sei $g'(x) \neq 0$ für $x \in D$. Existiert dann der Grenzwert von $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ für $x \to x_0$, dann existiert auch der Grenzwert von $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ für $x \to x_0$ und es ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

6.4 Extremwerte bei Funktionen einer Veränderlichen

Definition 6-1

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \to W$ eine Funktion. Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt **lokales (relatives) Maximum (Hochpunkt)** von f [**lokales(relatives)Minimum(Tiefpunkt)** von f], wenn es eine Zahl $h > 0$ gibt mit

$$f(x) \le f(x_0) \text{ für alle } x \in D \text{ mit } x_0 - h < x < x_0 + h$$
$$[\ f(x) \ge f(x_0) \text{ für alle } x \in D \text{ mit } x_0 - h < x < x_0 + h\ ]$$

Satz 6-1

Es sei $f: D \to W$ eine Funktion, die an einer **inneren** Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar ist. Wenn f in x_0 einen Extremwert besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$. (Notwendige Bedingung für ein Extremum)

Definition 6-2

Es sei $f: D \to W$ eine differenzierbare Funktion, dann heißt jede Lösung der Gleichung

$$f'(x) = 0$$

stationärer Punkt der Funktion f.

Satz 6-2

Es sei $f: D \to W$ eine differenzierbare Funktion.

a) (Notwendige Bedingung für einen inneren Extremwert)
Ist x_0 ein innerer Extremwert, dann gilt $f'(x_0) = 0$

b) (Hinreichende Bedingung für Hoch- oder Tiefpunkt)

(i) Es gilt $f'(x_0) = 0$ und mit $h > 0$ gilt weiter
$f'(x) > 0$ für $x_0 - h < x < x_0$ und
$f'(x) < 0$ für $x_0 < x < x_0 + h$
dann hat f am Punkte x_0 einen **Hochpunkt**.

(ii) Es gilt $f'(x_0) = 0$ und mit $h > 0$ gilt weiter

$f'(x) < 0$ für $x_0 - h < x < x_0$ und

$f'(x) > 0$ für $x_0 < x < x_0 + h$

dann hat f am Punkte x_0 einen **Tiefpunkt**.

c) (Hinreichende Bedingung für Hoch- oder Tiefpunkt)
Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, dann hat f an der Stelle x_0

(i) einen **Hochpunkt** (Maximum), wenn $f''(x_0) < 0$

(ii) einen **Tiefpunkt** (Minimum), wenn $f''(x_0) > 0$ ist.

Satz 6-3

Ist $f: D \to W$ eine differenzierbare Funktion, die in D konkav (konvex) verläuft, und die einen inneren Punkt $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) = 0$ hat, dann besitzt f in x_0 ein **globales** Maximum (Minimum).

Definition 6-3

Ein Punkt, in dem eine Rechts- und eine Linkskurve (oder eine Links- und eine Rechtskurve) ohne Knick ineinander übergehen, heißt **Wendepunkt**.

Satz 6-4

Es sei $f: D \to W$ eine mindestens dreimal differenzierbare Funktion. Gilt für einen inneren Punkt $x_0 \in D$ $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, so ist x_0 ein Wendepunkt von f.

6.5 Funktionen von mehreren Veränderlichen

Definition 6-1

Es sei n eine natürliche Zahl. Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$, dann heißt eine Vorschrift $f: D \to W$, die jedem n-dimensionalen Vektor $\underline{x} \in D$ genau ein Element $y \in W$ mit $W \subseteq \mathbb{R}$ zuordnet eine **Funktion mit *n* Veränderlichen (Variablen).**

Definition 6-2

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$, und $f : D \to W$ eine Funktion mit zwei Veränderlichen, $y = f(x_1, x_2)$. **Höhenlinien** oder **Niveaulinien** sind die geometrischen Orte aller Punkte (x_1,x_2), für die $y = \bar{y}$ konstant ist. Die Gleichung der Höhenlinie ist implizit gegeben durch

$$f(x_1, x_2) - \bar{y} = 0 .$$

Definition 6-3

f(x̲) ist **homogen vom Grade *r***, wenn gilt: $f(\lambda \underline{x}) = \lambda^r f(\underline{x}), \lambda > 0$.

Beispiel 6-1

$$f(\underline{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \ \to f(\lambda \underline{x}) = f(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 = \lambda^2 f(\underline{x}),$$

d.h. f(x) ist homogen vom Grade 2

6.6 Partielle Ableitungen

Definition 6-1

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to W$ und $\underline{x}_0 \in D$. Für ein *i*, $1 \le i \le n$ heißt der Grenzwert (falls er existiert)

$$\lim_{x_i - x_i^0} \frac{f\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, \ldots x_n^0\right) - f\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0, \ldots x_n^0\right)}{x_i - x_i^0}$$

die *i*-te partielle Ableitung der Funktion im Punkte $\underline{x}^0$. Für diese Ableitung schreiben wir $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ oder f_{x_i} , $i = 1,2,\ldots,n$. *f* heißt (**partiell**) **differenzierbar**, wenn f_{x_i} für alle $\underline{x}^0 \in D$ und alle $i = 1,2,\ldots,n$ existiert.

Definition 6-2

Eine (partiell) differenzierbare Funktion mit *n* Veränderlichen besitzt *n* partielle Ableitungen (1. Ordnung). Jede dieser *n* partiellen Ableitungen ist wieder eine Funktion von *n* Veränderlichen. Sind diese Funktionen wieder differenzierbar, dann können wieder partielle Ableitungen (2. Ordnung, insgesamt n^2) gebildet werden. Analog können partielle Ableitungen 3., 4. und höherer Ordnung gebildet werden.

Satz 6-1

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f: D \to W$ eine Funktion mit $z = f(x,y)$. f sei zweimal partiell differenzierbar. Sind die Ableitungen f_{xy} und f_{yx} stetig, so gilt

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) \text{ für alle } (x,y) \in D$$

Definition 6-3

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: D \to W$ mit $y = f(\underline{x})$. Das **vollständige (totale) Differential** von f ist gegeben durch

$$dy = df(\underline{x}) = f_{x_1}\, dx_1 + f_{x_2}\, dx_2 + \ldots + f_{x_n}\, dx_n$$

6.7 Extremwerte bei Funktionen von mehreren Veränderlichen

Satz 6-1

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}^0$ ein **innerer** Punkt von D und $f: D \to W$ sei partiell differenzierbar in $\underline{x}^0$. Wenn f in $\underline{x}^0$ einen Extremwert besitzt, dann gilt

$$f_{x_1}\left(\underline{x}^0\right) = f_{x_2}\left(\underline{x}^0\right) = \ldots = f_{x_n}\left(\underline{x}^0\right) = 0$$

(Notwendige Bedingung für ein relatives Extremum)

Definition 6-1

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: D \to W$ eine partiell differenzierbare Funktion. Die Lösungen des Gleichungssystems

$$f_{x_1}(\underline{x}) = 0, \quad f_{x_2}(\underline{x}) = 0, \ldots, \quad f_{x_n}(\underline{x}) = 0$$

heißen **stationäre Punkte**.

Satz 6-2

(Hinreichende Bedingung für einen relativen Extremwert im Fall $n = 2$)
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f: D \to W$ mit $z = f(x,y)$ eine Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen 2. Ordnung und (x_0, y_0) sei ein **innerer** Punkt aus D. Gilt

a) $f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) = 0$ und

b) $\Delta(x_0, y_0) := \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$,

dann hat *f* an der Stelle (x_0, y_0) ein relatives Extremum.

Diese ist ein **Maximum**, falls $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ist und ein **Minimum**, falls $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ist. Gilt dagegen a) und $\Delta(x_0, y_0) < 0$, dann ist (x_0, y_0) kein Extremum, sondern es liegt ein **Sattelpunkt** vor.

Satz 6-3

(Hinreichende Bedingung für einen relativen Extremwert im Fall n > 2)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to W$ mit $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen 2. Ordnung und $\underline{x}^0$ sei ein **innerer** Punkt aus *D*. Es gelte

a) $$f_{x_1}(\underline{x}^0) = 0, \quad f_{x_2}(\underline{x}^0) = 0, \ldots, \quad f_{x_n}(\underline{x}^0) = 0$$

Gilt

b) $$\Delta_i(\underline{x}^0) = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(\underline{x}^0) & f_{x_1x_2}(\underline{x}^0) & \cdots & f_{x_1x_i}(\underline{x}^0) \\ f_{x_2x_1}(\underline{x}^0) & f_{x_2x_2}(\underline{x}^0) & \cdots & f_{x_2x_i}(\underline{x}^0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_ix_1}(\underline{x}^0) & f_{x_ix_2}(\underline{x}^0) & \cdots & f_{x_ix_i}(\underline{x}^0) \end{vmatrix} > 0$$

für alle $i = 1, 2, \ldots, n$, dann hat *f* an der Stelle $\underline{x}^0$ ein **Minimum**.

c) Gilt $(-1)^i \Delta_i(\underline{x}^0) > 0$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$, dann hat *f* an der Stelle $\underline{x}^0$ ein **Maximum**.

d) Ist $f_{x_ix_i}(\underline{x}^0) < 0$ und $f_{x_jx_j}(\underline{x}^0) > 0$, $1 \le i, j \le n$, dann hat *f* an der Stelle $\underline{x}^0$ keinen Extremwert.

$\Delta_n(\underline{x}^0)$ heißt **Determinante der Hesse-Matrix** von *f* im Punkt $\underline{x}^0$.

6.8 Extremwerte bei Nebenbedingungen

Satz 6-1 (Lagrangesche Multiplikatorregel für n = 2)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f: D \to W$ eine partiell differenzierbare Funktion mit $y = f(x_1, x_2)$ und die Nebenbedingung laute $g(x_1, x_2) = 0$.

Die notwendigen Bedingungen für relative Extremwerte von *f* unter der Nebenbedingung *g* ergeben sich als stationäre Punkte der **Lagrangefunktion**

$$L(\lambda, x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$$

λ heißt **Lagrangemultiplikator**. Es muss also folgendes Gleichungssystem gelöst werden

$$\begin{array}{ll} L_\lambda: & g(x_1, x_2) = 0 \\ L_{x_1}: & f_{x_1}(x_1, x_2) + \lambda g_{x_1}(x_1, x_2) = 0 \\ L_{x_2}: & f_{x_2}(x_1, x_2) + \lambda g_{x_2}(x_1, x_2) = 0 \end{array}$$

Hinreichende Bedingungen:

Ist die Determinante der Hesse-Matrix von *L* am stationären Punkt positiv, so liegt ein Maximum vor, ist sie negativ, dann liegt ein Minimum vor.

$$|H| = \begin{vmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x_1} & L_{\lambda x_2} \\ L_{x_1\lambda} & L_{x_1 x_1} & L_{x_1 x_2} \\ L_{x_2\lambda} & L_{x_2 x_1} & L_{x_2 x_2} \end{vmatrix}$$

Satz 6-2 (Lagrange*sche* Multiplikatorregel für n > 2)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: D \to W$ eine partiell differenzierbare Funktion mit $y = f(\underline{x})$ und die m(< n) Nebenbedingungen lauten $g_1(\underline{x}) = 0, g_2(\underline{x}) = 0, \ldots, g_m(\underline{x}) = 0$. Die **notwendigen** Bedingungen für relative Extremwerte von *f* unter den *m* Nebenbedingungen ergeben sich als stationäre Punkte der Lagrangefunktion

$$L(\underline{\lambda}, \underline{x}) = f(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\underline{x})$$

Zur Bestimmung der **hinreichenden** Bedingungen sind die Unterdeterminanten entlang der Hauptdiagonalen -beginnend mit der Ordnung *2m+1* - der Hesse Matrix von *L*.

$$H = \begin{pmatrix} L_{\lambda_1\lambda_1} & L_{\lambda_1\lambda_2} & \ldots & L_{\lambda_1 x_1} & \ldots & L_{\lambda_1 x_n} \\ L_{\lambda_2\lambda_1} & L_{\lambda_2\lambda_2} & \ldots & L_{\lambda_2 x_1} & \ldots & L_{\lambda_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ L_{x_n\lambda_1} & L_{x_n\lambda_2} & \ldots & L_{x_n x_1} & \ldots & L_{x_n x_n} \end{pmatrix}$$

an den stationären Punkten zu untersuchen.

Weisen die Unterdeterminanten alternierende Vorzeichen beginnend mit $(-1)^{m+1}$ auf, so liegt ein **Maximum** vor.
Weisen die Unterdeterminanten alle ein einheitliches Vorzeichen gegeben durch $(-1)^{m}$ auf, so liegt ein **Minimum** vor.

6.9 Integralrechnung

Definition 6-1

Es seien in einem Intervall $f(x)$ und $F(x)$ gegeben. Es sei $F(x)$ dort differenzierbar und es sei dort stets

$$F'(x) = f(x).$$

Dann heißt $F(x)$ eine **Stammfunktion** oder ein **unbestimmtes Integral** von $f(x)$ und wird mit

$$\int f(x)\,dx$$

bezeichnet.

Satz 6-1

Ist in einem Intervall $F(x)$ Stammfunktion (unbestimmtes Integral) von $f(x)$, so hat jede andere Stammfunktion von $f(x)$ die Form $F(x)+C$ mit $C \in \mathbb{R}$.

Satz 6-2

$$\int\sum_{i=1}^{n} k_i\, f_i(x)dx = \sum_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x)dx = \sum_{i=1}^{n} k_i F_i(x) + C$$

Satz 6-3

a) $$\int [f(x)]^{\alpha} f'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}[f(x)]^{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

b) $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C, \quad f(x) \neq 0$$

Tabelle von Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
x^{α}	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \ (\alpha\neq -1)$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C, \quad x\neq 0$
e^x	$e^x + C$	$\ln x$	$x(\ln x - 1) + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\tan x$	$-\ln\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\cot x$	$\ln\sin x + C$
$\arcsin x$	$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$	$\arctan x$	$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
$\arccos x$	$x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$	$\mathrm{arc}\cot x$	$x\,\mathrm{arc}\cot x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$
$\sinh x$	$\cosh x + C$	$\tanh x$	$\ln\cosh x + C$
$\cosh x$	$\sinh x + C$	$\coth x$	$\ln\sinh x + C$
$\mathrm{ar}\sinh x$	$x\,\mathrm{ar}\sinh x - \sqrt{x^2+1} + C$	$\mathrm{ar}\tanh x$	$x\,\mathrm{ar}\tanh x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$
$\mathrm{ar}\cosh x$	$x\,\mathrm{ar}\cosh x - \sqrt{x^2-1} + C$	$\mathrm{ar}\coth x$	$x\,\mathrm{ar}\coth x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1) + C$

Satz 6-4 **(Partielle Integration oder Produktintegration)**

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Satz 6-5 **(Hauptsatz der Differential- u. Integralrechnung**

Ist $f(x)$ in $[a,b]$ stetig und $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Satz 6-6

a) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

b) $\int_a^a f(x)dx = 0$

c) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $a < c < b$

d) $\int_a^b [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]dx = k_1 \int_a^b f_1(x)dx + k_2 \int_a^b f_2(x)dx$

Definition 6-2

Ist $f(x)$ über jedem endlichen Intervall integrierbar, dann sind die **uneigentlichen Integrale** von $f(x)$ bei Existenz folgender Grenzwerte definiert als:

a) $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{u\to-\infty} \int_u^b f(x)dx$

b) $\int_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{u\to\infty} \int_a^u f(x)dx$

c) $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim\limits_{u\to-\infty} \int_u^c f(x)dx + \lim\limits_{t\to\infty} \int_c^t f(x)dx$ für beliebiges c.

7 Komplexe Zahlen

Definition 7-1

Komplexe Zahlen[1] sind Ausdrücke der Form

$$z = x + iy \qquad (x, y \in \quad)$$

Das Symbol *i* bedeutet die imaginäre Einheit: $i^2 = -1 \qquad (i \notin \quad)$. Es sind *x* der **Realteil** und *y* der **Imaginärteil** der komplexen Zahl *z*

$$x = \mathrm{Re}(z); \qquad y = \mathrm{Im}(z);$$
$$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$$

Ist speziell y = 0, dann wird mit $z = x + i \cdot 0$ die reelle Zahl x identifiziert; ist x = 0 und $y \neq 0$, dann ist $z = 0 + iy = iy$ eine **rein imaginäre** Zahl.

Definition 7-2

Zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ sind nur dann einander gleich

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ gilt, also Real- und Imaginärteil je für sich gleich sind.

Definition 7-3

Die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ wird definiert durch:

$$\bar{z} = x - iy$$

Damit sind:

a) $\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z)$;

b) $\mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$

c) $z = \bar{z} \quad \Leftrightarrow \qquad z \in$

d) $\bar{\bar{z}} = z$

e) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

[1] Geronimo Cardano, latinisiert Hieronymus Cardanus, italien. Mathematiker, Arzt u. Philosoph, 1501-1576

Definition 7-4

Der **Betrag** von z wird definiert durch: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

Definition 7-5

Die Summe $z_1 + z_2$ der beiden komplexen Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ ist die komplexe Zahl: $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Beispiel 7-1

$z_1 = 3 + 2i; \quad z_2 = 1 - 4i \quad \to z_1 + z_2 = 4 - 2i; \quad z_1 - z_2 = 2 + 6i$

Definition 7-6

Das Produkt $z_1 z_2$ zweier komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ ist die komplexe Zahl: $z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

Damit sind:

a) $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$

b) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

Beispiel 7-2

$z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = 1 - 4i$; $\quad z_1 z_2 = (3 + 2i)(1 - 4i) = 3 - 12i + 2i - 8i^2 = 11 - i10$

$z_1 \bar{z}_1 = 3^2 + 2^2 = 13$

Definition 7-7 (Division komplexer Zahlen)

Unter der Voraussetzung $z_2 \neq 0$ suchen wir diejenige Zahl *z*, für die bei vorgelegter Zahl z_1 gilt: $z_2 z = z_1$. Erweiterung mit $\bar{z}_2$ liefert $z_2 z\, \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_2$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Beispiel 7-3

$z_1 = 3 + 2i\ ;\ z_2 = 1 - 4i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{1-4i} = \frac{(3+2i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} = \frac{3+12i+2i+8i^2}{1+16} = \frac{-5+14i}{17} = -\frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$$

Definition 7-8

Der komplexen Zahl $z = x + iy$ wird derjenige Punkt der **Gauß*schen* Zahlenebene** zugeordnet (Abb. 7-1), der in einem kartesischen Koordinatensystem die Abszisse $x = \mathrm{Re}(z)$ und die Ordinate y = Im(z) besitzt.

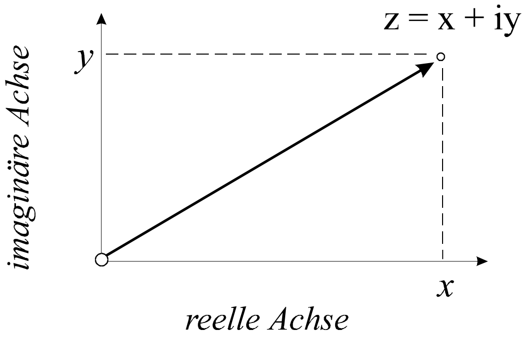


Abb. 7-1 Gauß*sche* Zahlenebene

Die Menge der reellen Zahlen entspricht also den komplexen Zahlen z mit Im(z) = 0, weshalb die Abszissenachse auch als **reelle Achse** bezeichnet wird. Den rein imaginären Zahlen z, also allen Zahlen z mit Re(z) = 0, entspricht die Ordinatenachse, die deshalb auch als **imaginäre Achse** bezeichnet wird.

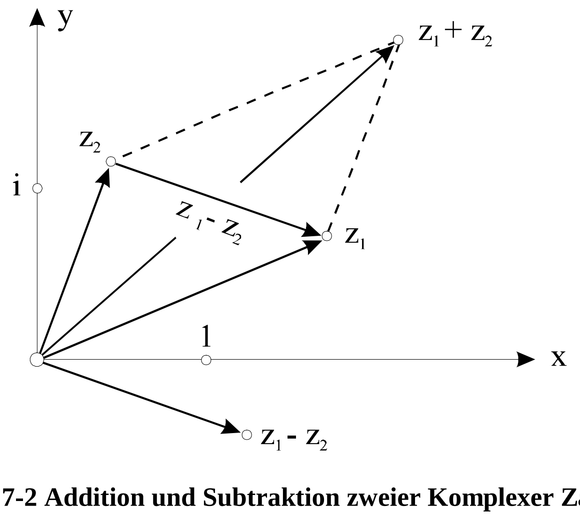


Abb. 7-2 Addition und Subtraktion zweier Komplexer Zahlen

<u>Hinweis</u>: Oftmals ist es zweckmäßig, in der komplexen Ebene statt des beschriebenen Punktes, den Vektor-Pfeil zu betrachten, der vom Nullpunkt zum betrachteten Punkt hinweist (Ortsvektor). Bei dieser Betrachtungsweise addieren sich zwei komplexe Zahlen wie die Kräfte in einem Kräfteparallelogramm. Die Differenz zweier komplexer Zahlen hat dann die Länge und Richtung der zweiten Diagonalen im Paralleleogramm (Abb. 7-2).
Der Zahl i entspricht der Punkt (0,1) der imaginären Achse und die Zahl 1 dem Punkt (1,0) der reellen Achse. In der Geometrie der Ebene ist es üblich, neben den kartesischen Koordinaten, auch Polarkoordinaten zu benutzen. Ein Punkt in der Ebene wird dann beschrieben durch seinen Abstand $r = \overline{OP}$ vom Koordinatenursprung 0 und dem Winkel φ, den der Fahrstrahl von 0 nach P mit der positiven x-Achse einschließt (Abb. 7-3).

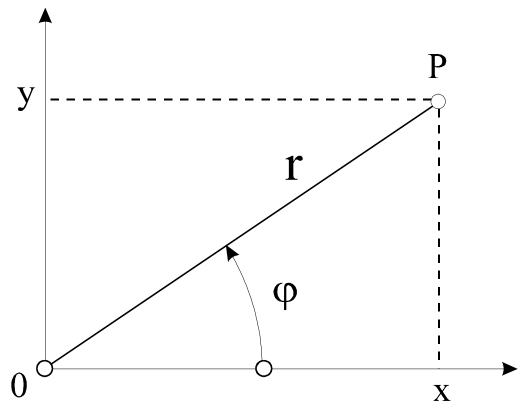


Abb. 7-3 Polarkoordinaten r, φ

Der Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten und den Polarkoordinaten ist gegeben durch

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Unter Beachtung der **Euler-Identitäten** $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi; e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$ lassen sich die komplexen Zahlen auch in Polarkoordinaten darstellen.

Definition 7-9

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} \quad \text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

Definition 7-10

Der zur komplexen Zahl $z \neq 0$ gehörige Winkel φ (Abb. 7-3) heißt *Argument der komplexen Zahl z* und wird $\arg z = \varphi + 2\pi k$ $\quad$ (k = 0,1,*2*,..) geschrieben. Das Argument von z ist nicht eindeutig bestimmt, sondern nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π. Es ist also

$$z = |z| e^{i \arg z}$$

Hinweis: Mit den obigen Definitionen ist eine geometrische Interpretation der Multiplikation und der Division komplexer Zahlen möglich. Es gilt nämlich für die beiden komplexen Zahlen z_1 und z_2:

$$z_1 = |z_1| e^{i \arg z_1}, \; z_2 = |z_2| e^{i \arg z_2}$$

dann gilt für das Produkt $z_1 \cdot z_2$ einerseits

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1 \cdot z_2| e^{i \arg(z_1 \cdot z_2)}$$

und andererseits

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| e^{i \arg z_1} \cdot |z_2| e^{i \arg z_2} = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)}$$

Daraus folgt

Definition 7-11

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$$

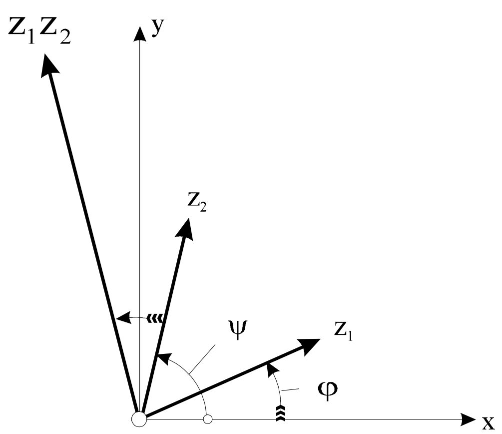


Abb. 7-4 Multiplikation komplexer Zahlen

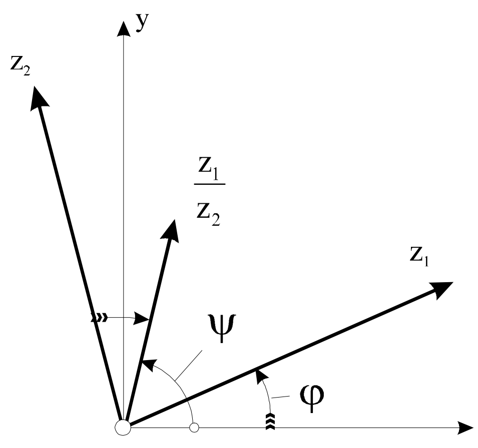


Abb. 7-5 Division komplexer Zahlen

Aus den obigen Betrachtungen ergeben sich nun einfache geometrische Darstellungen der Multiplikation und der Division komplexer Zahlen.

Multiplikation:

> Wir drehen den Vektor z_2 im positiven Sinne um den Winkel φ und strecken ihn im Verhältnis $1:\rho = 1:|z_1|$ Der neue Vektor stellt dann das Produkt $z_1 \cdot z_2$ dar.

Die Multiplikation komplexer Zahlen entspricht einer Drehstreckung (Abb. 7-4).

Division: Für den Quotienten z_1/z_2 erhalten wir

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\arg z_1 - \arg z_2)}$$

Dieses Ergebnis deuten wir wie folgt:

Drehen wir den Vektor z_2 im negativen Sinne um den Winkel φ und strecken ihn im Verhältnis ρ:1, so erhalten wir den Vektor $z = z_1/z_2$ (Abb. 7-5)

Definition 7-12

Aus $z = |z| e^{i \arg z}$ erhalten wir für die n-te Potenz von z: $z^n = |z|^n e^{i \cdot n \cdot \arg z}$ und es gilt:

$$\arg(z^n) = n \arg(z) + 2k\pi$$

Bezeichnen wir die Lösungen von $z^n = w$ generell mit $z = \sqrt[n]{w}$, dann folgt

$$\arg(\sqrt[n]{w}) = \frac{1}{n} \arg(w) + \frac{2k\pi}{n}$$

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\, e^{\frac{i}{n} \arg(w) + \frac{2\pi i k}{n}} \qquad (k = 0,1,\dots,n-1)$$

<u>Hinweis</u>: Es genügt, wenn wir uns auf die Werte $k = 0,1,\dots,n-1$ beschränken, da wir für die anderen Werte $k \in Z$ periodisch immer wieder dieselben komplexen Zahlen erhalten.

Beispiel 7-4

Insbesondere erhalten für w = 1 die n-ten **Einheitswurzeln**

$$\sqrt[n]{1} = e^{\frac{2k\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n} \qquad (k = 0,1,\dots,n-1)$$

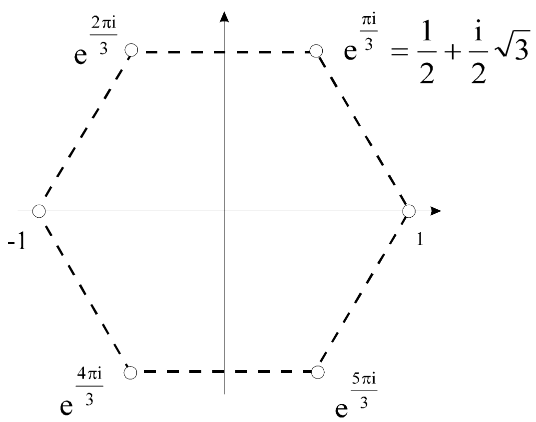


Abb. 7-6 Sechste Einheitswurzeln

Sie bilden geometrisch die Eckpunkte eines n-Ecks. Das n-Eck hat stets den auf der reellen Achse gelegenen Punkt $z_0 = 1$ zur Ecke. Alle Eckpunkte $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ genügen der Gleichung

$$x^n - 1 = 0$$

die **Kreisteilungsgleichung** genannt wird, weil die Lösungsmenge den Umfang des Einheitskreises in *n* gleiche Teile teilt.